FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

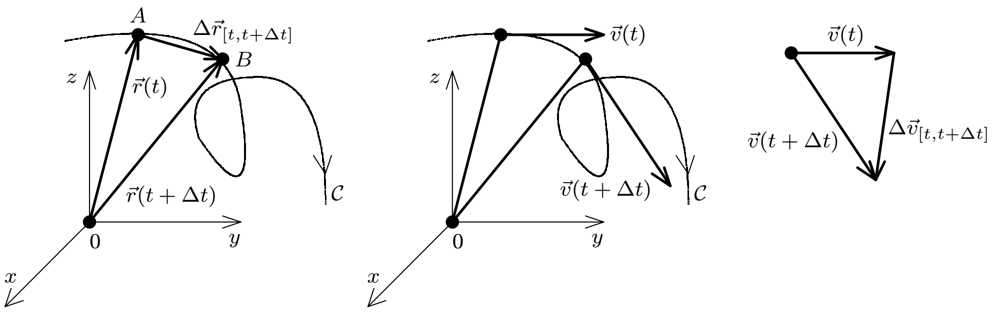
5. ročník — 1998/1999

MATEMATIKA LIBOVOLNĚ MALÉHO

seriál na pokračování

1. část

Infinitezimální počet – matematika „libovolně malého“ – je aparát vhodný pro řešení řady fyzikálních úloh. Jedním ze základních pojmů tohoto aparátu je pojem *limitního přechodu.* Lze jej ilustrovat následující posloupností obrázků a vztahů, týkajících se pohybu hmotného bodu po určité křivce (trajektorii) $\mathcal{C}$:



$\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ … *polohový vektor* bodu v *časovém okamžiku* t

$\vec{r}(t+\Delta t) = (x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))$

… *polohový vektor* bodu v *časovém okamžiku* $t+\Delta t$

$\Delta\vec{r}_{[t,t+\Delta t]} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = (x(t+\Delta t) - x(t), y(t+\Delta t) - y(t), z(t+\Delta t) - z(t))$

… *vektor posunutí* bodu v *časovém intervalu* $[t, t+\Delta t]$

$$\langle\vec{v}\,\rangle_{[t,t+\Delta t]} = \frac{\Delta\vec{r}_{[t,t+\Delta t]}}{\Delta t} = \left(\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}, \frac{z(t+\Delta z) - z(t)}{\Delta z}\right)$$

… *vektor průměrné rychlosti* v *časovém intervalu* $[t, t+\Delta t]$

$\langle\vec{a}\rangle_{[t,t+\Delta t]} = \dfrac{\Delta\vec{v}_{[t,t+\Delta t]}}{\Delta t}$ … *vektor průměrného zrychlení* v *časovém intervalu* $[t, t+\Delta t]$

Všimněte si, že některé veličiny se vztahují k časovým okamžikům, jiné k intervalům. Vektor průměrné rychlosti vystihuje přibližně, „jak rychle“ měnil hmotný bod svou polohu během časového intervalu $[t, t+\Delta t]$. Jiný hmotný bod, který by se pohyboval rovnoměrně přímočaře rychlostí $\vec{v}_0$ rovnou průměrné rychlosti $\langle\vec{v}\,\rangle_{[t,t+\Delta t]}$ a byl by v čase t v bodě A, dorazil by do bodu B v čase $t+\Delta t$, tj. současně s naším hmotným bodem, který se pohybuje po křivce $\mathcal{C}$.

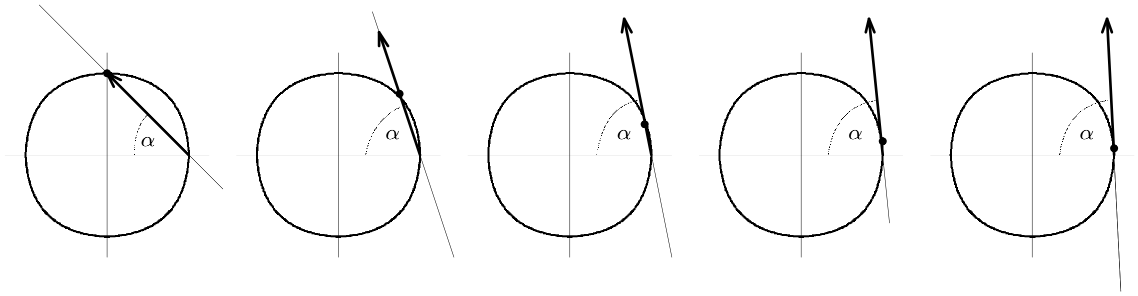
Náhrada skutečného pohybu bodu po křivce v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$ pohybem rovnoměrným přímočarým bude přirozeně tím přesnější, čím bude interval $[t, t+\Delta t]$ kratší. Provádíme tzv. *limitní přechod* $\Delta t \to 0$. Co se však přitom děje se souřadnicemi vektoru průměrné rychlosti? Přestože se jmenovatelé i čitatelé zlomků $\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$, $\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}$, $\frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}$ stávají libovolně blízkými nule, jejich podíly nabývají rozumných hodnot a blíží se při zmenšujících se Δt ke konečným číslům - svým *limitním hodnotám.* Ty již, na rozdíl od veličin průměrných, nezávisí na délce časového intervalu Δt, ale pouze na jeho počátečním okamžiku t a udávají tak souřadnice tzv. *vektoru okamžité rychlosti* hmotného bodu. Píšeme

$$\vec{v}\ (t) = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]}$$

Poznámka: Z předcházejícího výkladu je zřejmé (a následující příklad to názorně ukazuje), že *velikost vektoru průměrné rychlosti* $|\langle \vec{v} \rangle_{[t,t+\Delta t]}|$ je něco jiného než *průměrná hodnota velikosti vektoru okamžité rychlosti* $\langle |\vec{v}| \rangle_{[t,t+\Delta t]}$, která se v běžné řeči označuje slovním spojením *„průměrná rychlost."*

Příklad

Rovnoměrný pohyb po kružnici: $x = R\cos\omega t$, $y = R\sin\omega t$, $z = 0$, $\omega =$konst. $T = \frac{2\pi}{\omega}$ je perioda oběhu. Nechť $T = 4$ s, $R = 1$ m.



$\alpha = 45,0^o$ $|\langle \vec{v} \rangle| = 1,414\ \mathrm{ms}^{-1}$ — $\alpha = 67,5^o$ $|\langle \vec{v} \rangle| = 1,531\ \mathrm{ms}^{-1}$ — $\alpha = 78,8^o$ $|\langle \vec{v} \rangle| = 1,561\ \mathrm{ms}^{-1}$ — $\alpha = 84,5^o$ $|\langle \vec{v} \rangle| = 1,568\ \mathrm{ms}^{-1}$ — $\alpha = 87,3^o$ $|\langle \vec{v} \rangle| = 1,570\ \mathrm{ms}^{-1}$

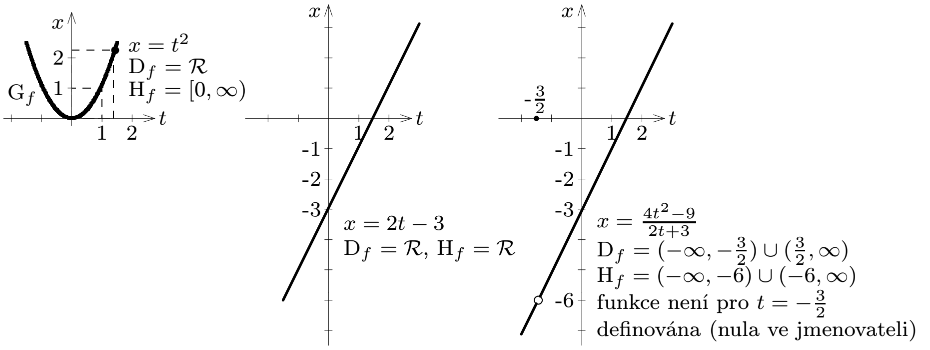
V obrázcích jsou zakresleny vektory průměrné rychlosti pro časové intervaly $[0, 1]$ s, $[0, \frac{1}{2}]$ s, $[0, \frac{1}{4}]$ s, $[0, \frac{1}{8}]$ s, $[0, \frac{1}{16}]$ s. „Průměrná rychlost", o níž se hovoří v předcházející poznámce, je ve všech případech, samozřejmě, stejná $\langle |\vec{v}| \rangle = 1,571\ \mathrm{ms}^{-1}$. V dalším půjde o to, jak takové limitní hodnoty prakticky počítat, aniž bychom museli limitní přechod numericky provádět.

1. FUNKCE, JEJÍ LIMITA A SPOJITOST

S jistou dávkou matematické nepřesnosti lze říci, že funkce vyjadřuje závislost určité veličiny (závisle proměnné) na veličinách jiných (nezávisle proměnných). Příkladem mohou být již zmíněné závislosti souřadnic bodu na čase.

Uvažujme nyní o případu jedné reálné nezávisle proměnné t a jedné reálné závisle proměnné x. Píšeme $x = f(t)$ a čteme „x je funkcí t". Symbol f, tzv. *funkční předpis*, určuje pravidlo, kterým jsou hodnotám t přiřazeny hodnoty x. Někdy píšeme jen $x = x(t)$. (Tento zápis bývá ve fyzice častější.) Hodnoty, kterých může nabývat proměnná t, tvoří *definiční obor funkce*, D_f.

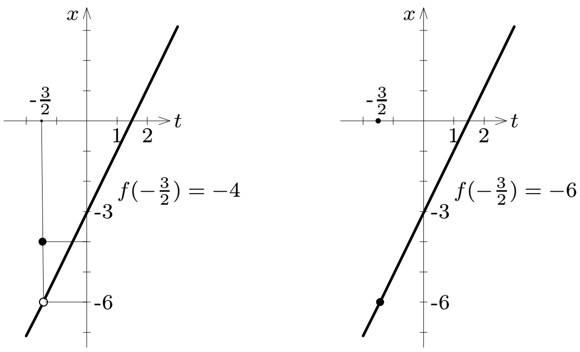
D_f je buď zadáno současně s uvedením pravidla f, nebo je automaticky chápáno jako množina všech hodnot t, pro něž lze podle pravidla f vyčíslit hodnotu x. Např. pro $x = \sqrt{t}$ musí být $t \geq 0$, neboť záporné hodnoty nelze odmocňovat. Říkáme, že f je definována na množině D_f. Hodnoty, jichž bude nabývat proměnná x, probíhá-li t definiční obor, tvoří *obor hodnot funkce*, H_f. V rovině souřadnic t (vodorovná osa) a x (svislá osa) vytvoří body o souřadnicích $[t, f(t)]$ *graf funkce* G_f.



Třetí obrázek názorně ukazuje význam limitní hodnoty. Funkce $x = f(t) = \frac{4t^2-9}{2t+3}$ není pro $t = -\frac{3}{2}$ definována. Jelikož se t k této hodnotě přibližuje, ať již ze strany hodnot nižších či vyšších, přibližuje se funkční hodnota x ke své limitě, číslu -6. Píšeme

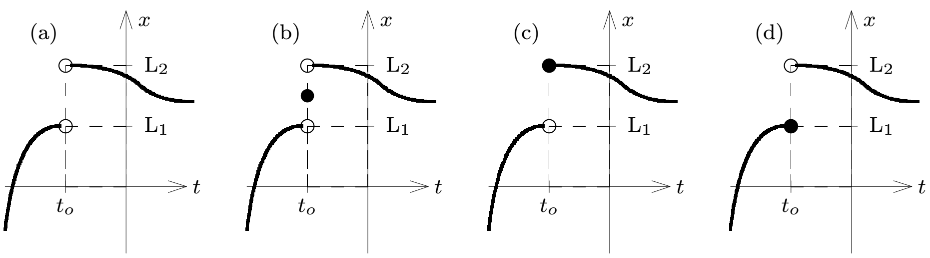
$$\lim_{t \to -\frac{3}{2}} \frac{4t^2 - 9}{2t + 3} = \lim_{t \to -\frac{3}{2}} \frac{(2t-3)(2t+3)}{2t+3} = \lim_{t \to -\frac{3}{2}} (2t - 3) = -6 \ .$$

Není-li funkce v některém bodě $t = t_0$ pravidlem f definována, lze ji *dodefinovat*, tj. tomuto bodu t_0 prostě funkční hodnotu přisoudit. Následující obrázky ukazují dva různé způsoby dodefinování funkce $x = \frac{4t^2-9}{2t+3}$ v bodě $t_0 = -\frac{3}{2}$.
(Který z nich považujete za lepší?)



Ve druhém případě vznikla dodefinováním funkce, jejíž limita v bodě $t_0 = -\frac{3}{2}$ je rovna její funkční hodnotě. Graf této funkce není přerušen - je „spojitý“.

Následující obrázky ukazují příklady grafů funkcí, které v určitém bodě limitu vůbec nemají:



Ve všech případech mají funkce v bodě t_0 limitu L_1 zleva (t se blíží k t_0 ze strany nižších hodnot) a limitu L_2 zprava (t se blíží k t_0 ze strany vyšších hodnot). Píšeme

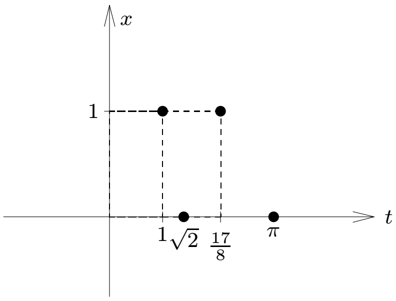
$$\lim_{t\to t_0^-} f(t) = L_1 \ , \lim_{t\to t_0^+} f(t) = L_2 \ .$$

Protože $L_1 \neq L_2$, limita neexistuje.
Ve všech případech je funkce v bodě t_0 nespojitá, v případě (a) dokonce není v t_0 definována. V případě (c) je však *spojitá zprava* či v případě (d) *spojitá zleva*. Platí zde

$$\lim_{t\to t_0^+} f(t) = f(t_0) \ , \ resp. \lim_{t\to t_0^-} f(t) = f(t_0) \ .$$

Příklad

Funkce $x = f(t)$ je definována tak, že pro t racionální nabývá hodnoty 1 a pro t iracionální hodnoty 0 (*Dirichletova funkce*). Tato funkce nemá v žádném bodě limitu. Její graf nelze nakreslit celý, lze pouze vyznačit jeho libovolný bod.



Takové podivné funkce se však ve fyzikálních úlohách nevyskytují. Většinou budeme mít co do činění s funkcemi spojitými, jejichž grafy budou hladké čáry (bez zlomů).

Na základě získané představy o limitě ji nyní konečně definujeme: Číslo L se nazývá *limitou funkce* $x = f(t)$ *v bodě* t_0, jestliže pro libovolně zvolené (jakkoli malé) číslo $\epsilon > 0$ dokážeme najít takový interval $(t_0 - \delta, \ t_0 + \delta)$, $\delta > 0$, že platí

(a) funkce $f(t)$ je definována ve všech bodech množiny $(t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$ (bod t_0 tedy může být vyňat, funkce v něm definována být nemusí),

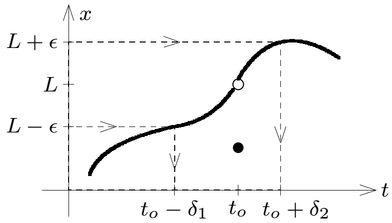
(b) pro všechna čísla $t \in (t_0 - \delta, t_0) \cup (t_0, t_0 + \delta)$ je

$$| \ f(t) - L \ | < \epsilon \ .$$

Píšeme

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L \ .$$

Zamyslíte-li se nad touto definicí, můžete ji přečíst také takto: Číslo L je limitou funkce $f(t)$ v bodě t_0, jestliže se funkční hodnoty nevzdálí od L o více než ϵ, pohybuje-li se proměnná t dostatečně blízko bodu t_0. Číslo ϵ je přitom zvoleno libovolně předem. Způsob nalezení čísla δ při zvoleném ϵ ukazuje následující obrázek.



δ je menší z čísel δ_1, δ_2. Interval, z něhož je bod t_0 vyňat, tj. množina $(t_0-\delta, t_0) \cup (t_0, t_0+\delta)$ se nazývá δ - *okolí* bodu t_0.
Z obrázku je vidět, že číslo $f(t_0)$ není v tomto případě limitou funkce v bodě t_0.
(Zdůvodněte!)

Funkce $x = f(t)$ se nazývá v bodě t_0 *spojitá*, je-li

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = f(t_0) \ .$$

Limitu potřebujeme nalézt velmi často i v případech, kdy jsou funkce definovány zlomky, v jejichž jmenovateli vychází pro některé hodnoty nezávisle proměnné t nula. K takové situaci mnohdy dochází při výpočtu další důležité charakteristiky funkce, její derivace, a proto si jí všimněme podrobněji na konkrétních příkladech:

- $$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{(t+2)(t-2)}{(t-2)} = \lim_{t\to 2}(t+2) = 4$$

  (Nepohodlný výraz $t-2$, způsobující při $t=2$ vynulování jmenovatele, jsme vykrátili. Tento obrat jsme si mohli dovolit proto, že při limitním přechodu se proměnná t pohybuje sice velmi blízko hodnoty 2, ale nenabývá jí. Jakmile se nepohodlného výrazu zbavíme, můžeme již $t_0 = 2$ dosadit.)

- $$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4}{t+2} = 0$$

  (Při dosazení $t=2$ žádný problém nevzniká, funkce je v bodě 2 spojitá.)

- $$\lim_{t\to 2} \frac{t^2-4t+3}{t-2} = \lim_{t\to 2} \frac{(t-1)(t-3)}{t-2} \qquad \text{neexistuje}$$

  (Nepohodlný výraz nelze vykrátit. Pro $t \to 2^-$ nabývá funkce velkých kladných hodnot, pro $t \to 2^+$ velkých záporných hodnot.)

Výpočty limit bychom se mohli zabývat velmi podrobně a velice dlouho. Naším cílem je však využít jich ve fyzikálních aplikacích a k tomu nám prozatím naše příklady postačí. Uvedeme jen ještě několik jednoduchých pravidel pro počítání s limitami:

(1) Je-li

$$\lim_{t\to t_0} f(t) = L_1 \ , \ \ \lim_{t\to t_0} g(t) = L_2,$$

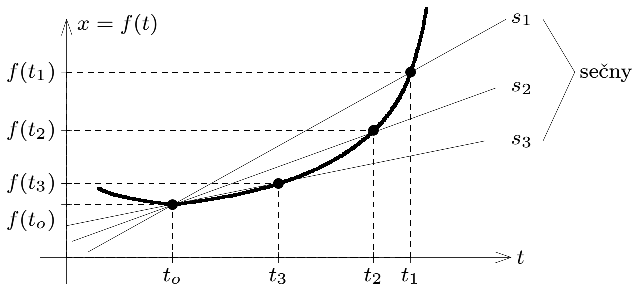
pak $$\lim_{t\to t_0}[f(t) \pm g(t)] = L_1 \pm L_2 \ , \ \ \lim_{t\to t_0}[f(t)g(t)] = L_1 L_2 \ , \ \ \lim_{t\to t_0} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{L_1}{L_2} \ ,$$

přičemž v posledním případě musíme předpokládat, že $g(t)$ je nenulové na nějakém δ–okolí bodu t_0 a že i $L_2 \neq 0$.
(Vyslovte podobná pravidla pro spojitost součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí!)

(2) Předpokládejme, že funkce $x = f(t)$ je v bodě t_0 spojitá. Dále uvažujme o funkci $y = g(x)$, definované na množině D_g obsahující obor hodnot funkce f. Předpokládejme, že funkce $g(x)$ je spojitá v bodě $x_0 = f(t_0)$.
Pak je i *složená funkce* $y = F(t) = g[f(t)]$ spojitá v bodě t_0. Funkce f a g představují *vnitřní* resp. *vnější* složku složené funkce.

2. DERIVACE FUNKCE, TEČNA

Pojem tečny ke grafu funkce vysvětlíme na obrázku:

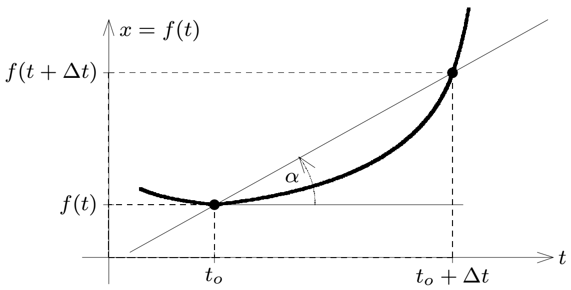


$$t_1 = t_0 + \Delta t_1 \;, t_2 = t_0 + \Delta t_2 \;, t_3 = t_0 + \Delta t_3 \;, \dots$$

$$\Delta t_1 > \Delta t_2 > \Delta t_3 > \dots$$

$$\text{Obecně: } \Delta t \to 0 \Rightarrow \text{ sečna} \to \text{ tečna}$$

Tečna ke grafu funkce v bodě $[t_0, f(t_0)]$ je limitním případem sečny spojující body $A = [t_0, f(t_0)]$ a $B = [t_0 + \Delta t, f(t_0 + \Delta t)]$ pro $\Delta t \to 0$.



Úhel, který svírá tečna s osou t:

$$\alpha_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \alpha \;, \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Směrnice tečny:

$$k = \lim_{\Delta t \to 0} \mathrm{tg}\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Tečnu ke grafu funkce $x = f(t)$ v bodě $[t_0, f(t_0)]$ lze zkonstruovat, existuje-li limita

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} ,$$

která se nazývá *derivace funkce $f(t)$ v bodě t_0*.
Rovnice tečny (odvoďte):

$$x = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0)$$

Derivace funkce $x = f(t)$ v obecném bodě t,

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

je sama funkcí proměnné t.

Vzpomeňte si, kde jsme viděli výrazy typu $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$! Takový tvar měly souřadnice vektoru průměrné rychlosti v intervalech $[t, t + \Delta t]$. Souřadnice vektoru okamžité rychlosti jsou jejich limitami pro $\Delta t \to 0$. Můžeme tedy psát

$$\vec{v}(t) = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} , \lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} , \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} \right) ,$$

$$\vec{v}(t) = (x'(t),\ y'(t),\ z'(t)) \quad \text{nebo} \quad \vec{v}(t) = \vec{r}'(t) .$$

Má-li parametr t význam času, označují fyzikové derivaci tečkou namísto čárky. Tedy

$$\vec{v}(t) = (\dot{x}(t)\ \dot{y}(t),\ \dot{z}(t)) = \dot{\vec{r}}(t)$$

a podobně

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = (\ddot{x}(t),\ \ddot{y}(t),\ \ddot{z}(t)) = \ddot{\vec{r}}(t)$$

Dvě tečky značí tzv. *druhou derivaci* funkce (derivaci derivace). Dalším postupným derivováním lze získat třetí, čtvrtou, ... derivaci původní funkce.

Příklady

- $x = f(t) = at^2$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{a(t + \Delta t)^2 - at^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{at^2 + 2at\Delta t - \Delta t^2 - at^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta t(2at - \Delta t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2at - \Delta t) = 2at$$

  Všimli jste si použití „metody vykrácení nepohodlného výrazu“?

- $x = \sin(t)$

$$f'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(t + \Delta t) - \sin t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta t}{2} \cos(\frac{2t+\Delta t}{2})}{\Delta t} =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\left(\frac{\sin \frac{\Delta t}{2}}{\frac{\Delta t}{2}} \right) \cos \left(t + \frac{\Delta t}{2} \right) \right] = \cos t$$

  (Pro malé úhly α je $\sin \alpha \doteq \alpha$, takže

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1 .$$

  Úhel α je vyjádřen v obloukové míře.)

Metodou „vykrácení nepohodlného výrazu“ lze odvodit pravidla pro derivování funkcí:

(1) $f(t) = t^n$, $f'(t) = nt^{n-1}$, $n \in \mathcal{R}$ libovolné

(2) $f(t) = \sin t$, $f'(t) = \cos t$,

$f(t) = \cos t$, $f'(t) = -\sin t$,

(3) $f(t) = e^t$, $f'(t) = e^t$; $f(t) = a^t$, $f'(t) = a^t \ln a$,

$f(t) = \ln t$, $f'(t) = \frac{1}{t}$; $f(t) = \log_a t$, $f'(t) = \frac{1}{t \ln a}$,

(4) $[f(t) \pm g(t)]' = f'(t) \pm g'(t)$,

(5) $[f(t)g(t)]' = f'(t)g(t) + f(t)g'(t)$; $[k\ f(t)]' = k\ f'(t)$, $k = \text{konst.}$,

(6) $\left[\frac{f(t)}{g(t)}\right]' = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{[g(t)]^2}$,

(7) $F(t) = g[f(t)]$, $F'(t) = g'[f(t)] \cdot f'(t)$.

Příklad

Určíme rovnici tečny ke grafu funkce $y = F(t) = \sin^2 t$ v bodě $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

$F(t) = [\sin t]^2$; $g(x) = x^2$, $x = f(t) = \sin t$ (složená funkce) .

$F'(t) = 2[\sin t] \cdot \cos t$,

$F'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$.

Rovnice tečny: $y = F\left(\frac{\pi}{4}\right) + F'\left(\frac{\pi}{4}\right)(t - \frac{\pi}{4})$,

$y = \frac{1}{2} + \left(t - \frac{\pi}{4}\right) \quad \Rightarrow \quad y = t + \frac{2-\pi}{4}$.

Příklad

Hmotný bod se pohybuje po trajektorii $\mathcal{C}$ vyjádřené takto: $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $x(t) = R\cos\omega t$, $y(t) = R\sin\omega t$, $z(t) = 0$, kde R, ω jsou kladné konstanty. (O jakou křivku se jedná?) Vypočteme okamžitou rychlost a okamžité zrychlení hmotného bodu.

$\vec{r}(t) = (R\cos\omega t\, , R\sin\omega t\, , 0)$ (jde o složené funkce) ,

$\vec{v}(t) = (-R\omega\sin\omega t\, , R\omega\cos\omega t\, , 0)$, $|\vec{v}(t)| = R\omega$,

$\vec{a}(t) = (-R\omega^2\cos\omega t\, , R\omega^2\sin\omega t\, , 0)$, $|\vec{a}(t)| = R\omega^2$.

Co vám připomínají vztahy pro velikost okamžité rychlosti a okamžitého zrychlení?
Nakreslete trajektorii částice a pro nějaký bod na ní vyznačte vektory $\vec{v}$ a $\vec{a}$.