FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

5. ročník — 1998/1999

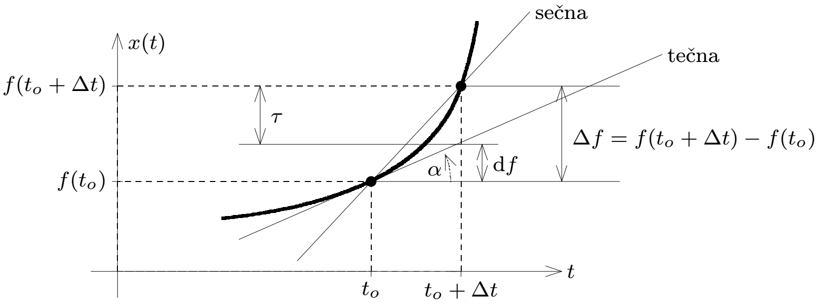
MATEMATIKA LIBOVOLNĚ MALÉHO

seriál na pokračování

2. část

3. DIFERENCIÁL FUNKCE

Touto kapitolou zakončíme úvodní část našeho matematického seriálu. Vyjdeme opět z obrázku:



Předpokládejme, že funkce $f(t)$ je zadána pravidlem, pomocí nějž se její hodnota v bodě t_0 snadno vyčíslí. Bude-li např. $f(t) = \sqrt[3]{t}$, najde se snadno hodnota pro $t_0 = 8$, neboť $f(8) = 2$. Pokud potřebujeme znát hodnotu funkce $f(t)$ v bodě blízkém bodu t_0 a spokojíme-li se s přibližným výsledkem, můžeme jej snadno získat následujícím způsobem.

Je-li Δt dostatečně malé, lze skutečný přírůstek funkční hodnoty při změně proměnné t z hodnoty t_0 na $t_0 + \Delta t$, tzv. *diferenci*

$$\Delta f(t_0, \Delta t) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$$

nahradit přírůstkem tečny, tzv. *diferenciálem*

$$\mathrm{d}f(t_0, \Delta t) = \Delta t \cdot \mathrm{tg}\alpha = f'(t_0)\Delta t$$

Hodnota diference i diferenciálu závisí jak na výchozím bodě t_0, tak na přírůstku Δt. Diferenciál se spočte velmi snadno, neboť je lineární funkcí přírůstku Δt (je tomuto přírůstku přímo úměrný s konstantou úměrnosti $f'(t_0)$). Chyba $\tau(t_0, \Delta t)$, vznikající nahrazením diference diferenciálem je při malém Δt zanedbatelná, neboť je úměrná vyšší než prvé mocnině přírůstku Δt.

Nechť např. pro funkci $f(t) = \sqrt[3]{t}$ je $t_0 = 8$ a $\Delta t = 0,06$.

Pak $\mathrm{d}f(8,\ 0,06) = \frac{1}{3}(8)^{-\frac{2}{3}} \cdot 0,06 = \frac{0,06}{12} = 0,005$ tj. $\sqrt[3]{8,06} \doteq 2,005$. (Porovnejte tento výsledek s hodnotou získanou výpočtem na kalkulačce.)

Příklad

V případě lineární funkce $f(t) = t$ je $f'(t_0) = 1$ pro libovolné t_0 a tedy $\mathrm{d}f(t_0, \Delta t) \equiv \mathrm{d}t(t_0, \Delta t) = \Delta t$. Pro obecnou funkci $f(t)$ proto můžeme psát $\mathrm{d}f(t_0, \Delta t) = f'(t_0)\mathrm{d}t(t_0, \Delta t)$. Vynecháme-li vypisování veličin $t_0, \Delta t$, pak pro obecné t je $\mathrm{d}f = f'(t)\mathrm{d}t$, tj. $f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$.
Tento zápis derivace je rovněž velmi obvyklý. Ve fyzice:

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t} \quad , \quad \vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

Zápis $f'(t) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ interpretujeme často také tak, že směrnice tečny ke grafu funkce v bodě $[t, f(t)]$ je podílem „nekonečně“ (infinitezimálně) malých odpovídajících přírůstků $\mathrm{d}f$ a $\mathrm{d}t$ závisle a nezávisle proměnné.

Poznámka: Diferenciálu lze užít např. pro stanovení chyby fyzikální veličiny x, která je funkcí měřené veličiny t, tj. $x = f(t)$. Je-li veličina t měřena s chybou δt, pak chyba stanovení veličiny x je $\delta x = \mathrm{d}f(t, \delta t) = f'(t)\delta t$.

4. PŘIBLIŽNÉ VYJÁDŘENÍ FUNKCE. TAYLORŮV POLYNOM.

V předchozí kapitole o diferenciálu funkce $x = f(t)$ jsme se zabývali možností přibližného výpočtu její funkční hodnoty v bodě $t = t_0 + \Delta t$, blízkém bodu t_0, spočívající v náhradě skutečného průběhu funkce v okolí bodu t_0 lineární závislostí. Přibližně jsme psali

$$f(t) = f(t_0 + \Delta t) \doteq f(t_0) + f'(t_0)\Delta t = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) \quad .$$

Všimněte si, že pravá strana této přibližné rovnosti je speciálním případem *polynomu* (mnohočlenu) *prvého stupně*, který má obecný tvar

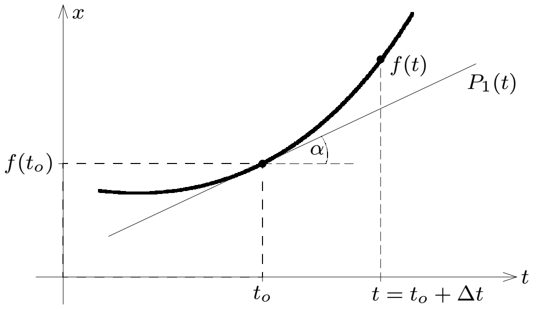
$$P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0) \quad .$$

Jeho koeficienty a_0 a a_1 v uvažovaném případě nabývají hodnot $a_0 = f(t_0)$, $a_1 = f'(t_0)$.

Úloha

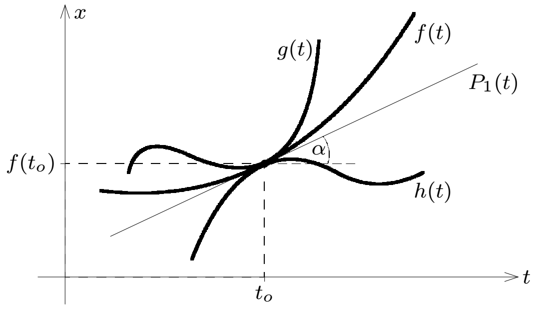
Pro polynom $P_1(t) = a_0 + a_1(t - t_0)$ vypočtěte jeho funkční hodnotu $P_1(t_0)$ a hodnotu jeho prvé derivace $P_1'(t_0)$. Co lze říci o grafech funkcí $f(t)$ a $P_1(t)$ v okolí bodu t_0, je-li $a_0 = f(t_0)$ a $a_1 = f'(t_0)$?

V předchozí úloze jste viděli, že grafy funkcí $f(t)$ a $P_1(t)$ pro $a_0 = f(t_0)$ a $a_1 = f'(t_0)$ procházejí pro $t = t_0$ stejným bodem $[t_0, f(t_0)]$ a mají v tomto bodě společnou tečnu.



$a_0 = P_1(t_0) = f(t_0)$

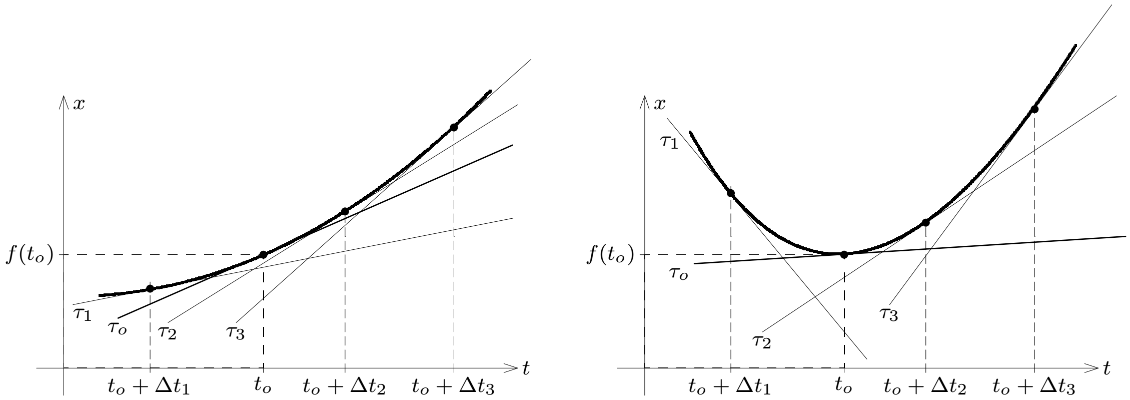
$a_1 = P_1'(t_0) = f'(t_0) = \mathrm{tg}\alpha$



$a_0 = P_1(t_0) = f(t_0) = g(t_0) = h(t_0)$

$a_1 = P_1'(t_0) = f'(t_0) = g'(t_0) = h'(t_0) = \mathrm{tg}\alpha$

Funkcí s touto vlastností může být celá řada. Obrázek vpravo znázorňuje kromě funkce $f(t)$ ještě další dvě funkce $g(t)$ a $h(t)$, které mají s polynomem $P_1(t)$ v bodě t_0 stejnou funkční hodnotu i hodnotu derivace, takže bychom se mohli přít o to, kterou z nich vystihuje lineární závislost $P_1(t)$ v okolí bodu t_0 lépe. (Můžete se pokusit sami formulovat nějaké kritérium, které by umožnilo vyřešit tento spor.) Na obrázku je ovšem vidět, že lineární závislostí, tj. funkcí $P_1(t)$, je v okolí bodu t_0 nejlépe vystižen průběh funkce $f(t)$, a to proto, že graf funkce $f(t)$ je v okolí bodu $[t_0, f(t_0)]$, jímž prochází, ze všech tří znázorněných případů nejméně zakřiven. (Graf funkce $P_1(t)$ není samozřejmě zakřiven vůbec.) Následující obrázky ukazují, že *křivost grafu funkce v daném bodě* je určena tím, jak rychle mění v okolí tohoto bodu svůj směr jeho tečna.



$\Delta t_1 < \Delta t_2 < \Delta t_3 \quad (\Delta t_1 < 0,\ \Delta t_2 > 0,\ \Delta t_3 > 0)$

Směrnice tečny v obecném bodě je určena prvou derivací funkce $f'(t)$. Chápejme $f'(t)$ jako novou funkci proměnné t, např. $f_1(t) = f'(t)$. O „rychlosti“ její změny rozhoduje její derivace, tj. $f_1'(t) = f''(t)$. Symbol $f''(t)$ značí druhou derivaci funkce f, tj. „derivaci derivace“. Její hodnota tedy charakterizuje křivost grafu funkce f.

Na základě úvah o křivosti vás už jistě napadlo, že průběh funkce $f(t)$ je jistě možné v okolí bodu t_0 vystihnout lépe než lineární funkcí $P_1(t)$. Tato „výstižnější“ funkce by měla být také, podobně jako $P_1(t)$, jednoduchá, ale kromě společné funkční hodnoty a tečny by měla mít v bodě t_0 s funkcí $f(t)$ shodnou i křivost grafu.
Tento požadavek může splnit opět mnohočlen, tentokrát druhého stupně

$$P_2(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2$$

s koeficientem a_2 zvoleným tak, aby $P_2''(t_0) = f''(t_0)$.
Platí $\quad P_2'(t) = f'(t_0) + 2a_2(t - t_0)\ , \qquad P_2''(t) = 2a_2,\ $ tj. $\ P_2''(t_0) = 2a_2$.
Z požadavku stejné křivosti tedy plyne $a_2 = \frac{1}{2}f''(t_0)$, takže

$$P_2(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t - t_0)^2$$

Předchozí úvahy jsou samozřejmě v pořádku tehdy, jestliže funkci $f(t)$ lze dvakrát derivovat, tj. jestliže existují $f'(t_0)$, $f''(t_0)$.

Vyšší derivace funkce $f(t)$ již nemají tak názorný význam, jako derivace prvého a druhého řádu. Ve zpřesňování náhrady skutečného průběhu funkce polynomem však lze pokračovat zvyšováním stupně polynomu a využitím požadavku rovnosti derivací vyššího řádu funkce $f(t)$ a polynomu.

$$P_3(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + a_3(t-t_0)^3$$

Přesvědčte se přímým výpočtem a dosazením $t = t_0$, že

$$P_3(t_0) = f(t_0), \quad P_3'(t_0) = f'(t_0), \quad P_3''(t_0) = f''(t_0)$$

Koeficient a_3 najdeme na základě požadavku rovnosti třetích derivací funkce $f(t)$ a polynomu $P_3(t)$. K jejich označení již nepoužijeme tři čárky, ale následující způsob:

$$P_3^{(3)}(t_0) = f^{(3)}(t_0).$$

$P_3^{(3)}(t) = 3 \cdot 2a_3 = 3!a_3.$ Pak $a_3 = \frac{1}{3!}f^{(3)}(t_0).$

Poznámka: Vykřičník je znakem tzv. *faktoriálu*, který má následující význam:
$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$ pro každé přirozené n;
zvlášť se definuje $0! = 1$.

Obecně je

$$P_n(t) = f(t_0) + f'(t_0)(t-t_0) + \frac{1}{2}f''(t_0)(t-t_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^n(t_0)(t-t_0)^n .$$

Tento tzv. *Taylorův polynom* (mnohočlen) nahrazuje přibližně funkci $f(t)$ v okolí bodu t_0, pochopitelně za předpokladu existence derivací této funkce v bodě t_0 až do řádu n, tj. $f'(t_0)$, $f''(t_0)$, …, $f^{(n)}(t_0)$. Matematicky lze dokázat, že zvyšováním stupně Taylorova polynomu se přesnost náhrady skutečně zvyšuje. Také pro odhad chyby, které se touto náhradou dopouštíme, má matematika své metody. Pro naše účely však postačí za velikost chyby přibližně považovat absolutní hodnotu $(n+1)$-tého členu Taylorova polynomu

$$\left| \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(t_0)(t-t_0)^{n+1} \right| .$$

Příklad

Určíme hodnotu $\sqrt[4]{16,12^3}$ s přesností na pět desetinných míst. (Tento požadavek znamená, že chyba, které se smíme dopustit, činí nejvýše $0,5 \cdot 10^{-5}$.)

$x = f(t) = \sqrt[4]{t^3} = t^{\frac{3}{4}}$, $t_0 = 16$, $f(t_0) = \sqrt[4]{16^3} = 8$, $\Delta t = t - t_0 = 0,12$.

$f'(t) = \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}$, $f'(t_0) = \frac{3}{2^3}$, $f'(t_0)\Delta t = \frac{3}{2^3} \cdot 0,12 = \frac{3^2}{2} \cdot 10^{-2} = 4,5 \cdot 10^{-2}$,

$f''(t) = \frac{-3}{16}t^{-\frac{5}{4}}$, $f''(t_0) = \frac{-3}{2^9}$, $\frac{1}{2}f''(t_0)\Delta t^2 = \frac{-3^3}{2^6} \cdot 10^{-4} = -4,2 \cdot 10^{-5}$,

$f^{(3)}(t) = \frac{15}{64}t^{-\frac{9}{4}}$, $\quad f^{(3)}(t_0) = \frac{15}{2^{15}}$, $\quad \frac{1}{3!}f^{(3)}(t_0)\Delta t^3 = \frac{3^3 \cdot 5}{2^{10}} \cdot 10^{-6} = 1,2 \cdot 10^{-7} < 5 \cdot 10^{-6}$,

$\sqrt[4]{16,12^3} \doteq 8 + 0,045 - 0,00004 = 8,04496$.

5. PRIMITIVNÍ FUNKCE

V kapitole 2 jsme definovali a geometricky interpretovali pojem derivace funkce. Umíme také pro celou řadu funkcí jejich derivaci vypočítat, známe pravidla pro derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí i pravidlo pro výpočet derivace funkcí složených. Nyní před námi stojí opačná úloha: Na množině $D_f \subset \mathcal{R}$ (např. na intervalu) je zadána funkce $f(t)$, o níž chceme zjistit, zda mohla vzniknout derivací nějaké, zatím neznámé, funkce $F(t)$. V kladném případě se pak budeme zabývat i problémem nalezení této "předlohy", nazývané *primitivní* (prvotní) *funkce*. Nejprve však vyslovme její definici:

Funkce $F(t)$ se nazývá *primitivní funkcí k funkci* $f(t)$ na otevřené množině $D_f \subset \mathcal{R}$, jestliže v každém bodě $t_0 \in D_f$ platí $F'(t_0) = f(t_0)$.

Příklad

Funkce $f(t) = 4t^3 - 2t + 1$ je definována v celém reálném oboru. Funkce $F(t) = t^4 - t^2 + t$ je k ní funkcí primitivní na množině $\mathcal{R}$, neboť $F'(t) = 4t^3 - 2t + 1$ pro libovolný bod $t \in \mathcal{R}$. Avšak také zderivováním funkcí $G(t) = t^4 - t^2 + t + 5$, $H(t) = t^4 - t^2 + t - 18$ dostaneme funkci $f(t)$! Funkce $G(t)$ i $H(t)$ jsou rovněž primitivními funkcemi k funkci $f(t)$ na množině $\mathcal{R}$.

Z předchozího příkladu vidíme, že pokud k funkci $f(t)$ existuje alespoň jedna primitivní funkce, pak jich je nekonečně mnoho a navzájem se liší vždy o nějakou konstantní hodnotu. Tato nejednoznačnost vyplývá ze skutečnosti, že derivací konstantní funkce je funkce identicky nulová. Máme-li k dispozici funkci $f(t)$, která vznikla derivováním, nevíme, zda prvotní (primitivní) funkce nějakou konstantu obsahovala. Kdybychom chtěli ze všech primitivních funkcí vybrat jedinou, museli bychom zadat její hodnotu v určitém bodě t_0.

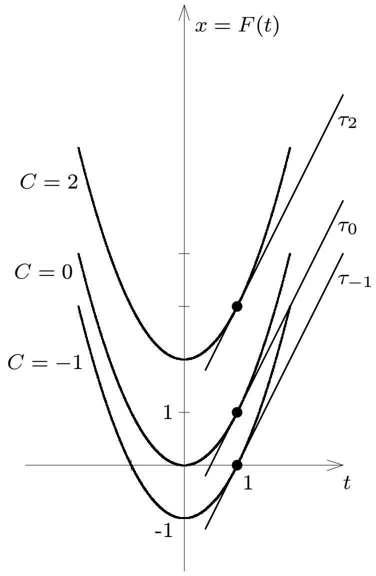
Příklad

Všechny primitivní funkce k funkci $f(t) = 4t^3 - 2t + 1$ mají tvar $F(t) = t^4 - t^2 + t + C$, kde C je libovolná konstanta. Přejeme-li si vybrat například tu z nich, která má v bodě $t_0 = 2$ hodnotu $F(t_0) = -1$, získáme číslo C dosazením: $-1 = 2^4 - 2^2 + 2 + C$, tj. $C = -15$. Pak $F(t) = t^4 - t^2 + t - 15$.

Grafy všech primitivních funkcí mají stejný tvar, jsou pouze navzájem posunuty podél souřadnicové osy x. Vytvářejí tzv. *jednoparametrickou soustavu křivek*, jejímž parametrem je veličina C.

Příklad

$f(t) = 2t$, $\quad F(t) = t^2 + C$. Směrnice všech tečen τ_C jsou v libovolně zvoleném bodě t_0 stejné a rovny $F'(t_0) = 2t_0$.



$t_o = 1$
$F'(t_0) = 2$ pro libovolné C

Abychom byli schopni primitivní funkce nacházet, musíme se seznámit s postupy, které jsou opakem derivování. Začneme několika užitečnými pravidly pro nalezení primitivních funkcí k některým funkcím elementárním. O jejich správnosti se snadno přesvědčíte, neboť derivovat jste se již naučili. Můžete je také srovnat s pravidly pro derivování, uvedenými v kapitole 2.

(1)	$f(t) = t^n$	$F(t) = \frac{t^n}{n+1} \qquad n \neq -1$
(2)	$f(t) = \cos t$	$F(t) = \sin t$
	$f(t) = \sin t$	$F(t) = -\cos t$
(3)	$f(t) = e^t$	$F(t) = e^t$
	$f(t) = \frac{1}{t}$	$F(t) = \ln \lvert t \rvert$
	$f(t) = a^t$	$F(t) = \frac{a^t}{\ln a}\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
	$f(t) = \frac{1}{t \ln a}$	$F(t) = \log_a \lvert t \rvert\,,\ a > 0\,,\ a \neq 1$
(4)	$f(t) = f_1(t) \pm f_2(t)$	$F(t) = F_1(t) \pm F_2(t)$,
		$F_1(t)$ resp. $F_2(t)$ je primitivní funkcí k $f_1(t)$ resp. $f_2(t)$
	$f(t) = k\, g(t)$	$F(t) = kG(t)$, $k =$ konst. ,
		$G(t)$ je primitivní funkcí k $g(t)$
(5)	$f(t) = \frac{1}{\cos^2 t}$	$F(t) = \operatorname{tg} t$
	$f(t) = -\frac{1}{\sin^2 t}$	$F(t) = \operatorname{cotg} t$
(6)	$f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$F(t) = \arcsin t$
	$f(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$F(t) = \arccos t$
(7)	$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$	$F(t) = \operatorname{arctg} t$
	$f(t) = -\frac{1}{1+t^2}$	$F(t) = \operatorname{arccotg} t$

$$
\begin{array}{rll}
(8) & f(t) = \frac{1}{t^2-1} & F(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{t-1}{t+1} \\
(9) & f(t) = \sqrt{1-t^2} & F(t) = \frac{1}{2}\left[\arcsin t + t\sqrt{1-t^2}\right] \\
(10) & f(t) = \sqrt{1+t^2} & F(t) = \frac{1}{2}\left[\ln(t+\sqrt{1+t^2}) + t\sqrt{1+t^2}\right]
\end{array}
$$

Každá jiná funkce, která se od $F(t)$ liší o konstantu, je stejně dobrou primitivní funkcí k $f(t)$, jako $F(t)$.

Primitivní funkce $F(t)$ k funkci $f(t)$ bývá také nazývána jejím *neurčitým integrálem* a značí se $F(t) = \int f(t)dt$. Tento zápis považujme prozatím za čistě formální. Jeho význam se ukáže v další kapitole.

Velmi často — dokonce většinou — znalost uvedených pravidel k nalezení primitivní funkce bohužel nestačí. V takových případech je třeba problém na vhodný tvar, umožňující jejich přímé použití, teprve převést. Z metod užívaných k takovému převodu se v dalším zmíníme o dvou: *metodě substituční* a *metodě integrace per partes* (z latinského "po částech").
Počítání primitivních funkcí a zejména výběr metody jejich výpočtu vyžaduje zkušenost, kterou lze získat jen a jen řešením úloh. Ti z vás, jejichž cílem zatím není získat zběhlost v hledání primitivních funkcí, se však mohou spokojit s jejich definicí a deseti nejjednoduššími pravidly a přejít přímo k další kapitole. Zbytek této kapitoly je určen hlubším zájemcům.

Podstatu *substituční metody* vyložíme na příkladu:

Příklad

Najdeme primitivní funkci k $f(t) = 6\sin^5 t\cos t$. Všimněme si, že $\cos t$ je derivací funkce $\varphi(t) = \sin t$. Můžeme tedy funkci $f(t)$ zapsat jako $f(t) = 6[\varphi(t)]^5 \cdot \varphi'(t)$. Tento zápis připomíná pravidlo pro derivování složené funkce, jejíž vnitřní složkou je funkce $u = \varphi(t)$ a vnější složkou funkce $g(u) = u^6$. Zadaná funkce $f(t)$ je tedy derivací funkce $F(t) = [\varphi(t)]^6 = \sin^6 t$. Správnost ověřte zpětným derivováním, tj. výpočtem $F'(t)$.

Výsledek získaný řešením tohoto příkladu zobecníme:
Jestliže $G(u)$ je primitivní funkcí k funkci $g(u)$, pak $F(t) = G[\varphi(t)]$ je primitivní funkcí k funkci $f(t) = g[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$. Můžeme zapsat $G[\varphi(t)] = \int g[\varphi(t)]\,\varphi'(t)dt$.
Název substituční metoda vyjadřuje skutečnost, že jsme při výpočtu nahradili (substituovali) funkci $\varphi(t)$ novou proměnnou u.

Příklady

- $f(t) = \dfrac{2t^2}{t^3+8}$

  Při výpočtu zvolíme jiný, obvyklejší, i když matematicky méně korektní, způsob zápisu:
  $$F(t) = \int \frac{2t^2}{t^3+8}\,dt = \left|\begin{array}{l} u = \varphi(t) = t^3+8 \\ du = \varphi'(t)\,dt = 3t^2\,dt \text{ (diferenciál)} \\ t^2\,dt = \frac{1}{3}\,du \end{array}\right| =$$
  $$= \int \frac{2\cdot\frac{1}{3}du}{u} = \frac{2}{3}\int\frac{du}{u} = \frac{2}{3}\ln|u| = \frac{2}{3}\ln|t^3+8|\,.$$

- $f(t) = \cos kt\ , \quad k \neq 0$

$$F(t) = \int \cos kt\, dt = \left| \begin{array}{l} u = \varphi(t) = kt \\ du = \varphi'(t)\, dt = k\, dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \cos u\, \frac{du}{k} = \frac{1}{k} \int \cos u\, du = \frac{1}{k} \sin kt.$$

Sami si ověřte, že analogicky lze zobecnit i další z předcházejících pravidel. O správnosti všech výsledků se přesvědčte zpětným derivováním.

Substituční metodu lze použít i opačně — místo náhrady funkce $\varphi(t)$ jedinou proměnnou u lze, je-li to vhodné, nahradit proměnnou t funkcí nové proměnné v, tj. $t = \Psi(v)$.

Příklad

$$f(t) = \frac{1}{(1-t^2)^{3/2}}$$

$$F(t) = \int \frac{dt}{(1-t^2)^{3/2}} = \left| \begin{array}{l} t = \Psi(v) = \sin v \\ dt = \Psi'(v)\, dv = \cos v\, dv \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\cos v\, dv}{(1-\sin^2 v)^{3/2}} = \int \frac{\cos v\, dv}{\cos^3 v} = \int \frac{dv}{\cos^2 v} = \operatorname{tg} v = \operatorname{tg}\left[\arcsin t\right]$$

Metoda per partes se užívá pro nalezení primitivní funkce k funkci, kterou si lze představit jako vhodný součin dvou funkcí. Označme $F_1(t) = u(t)v(t)$. Pak $F_1'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t)$ podle pravidla pro derivaci součinu funkcí. Dále označme $f(t) = u'(t)v(t)$ a $f_2(t) = u(t)v'(t)$, příslušné primitivní funkce $F(t)$ a $F_2(t)$. Poněvadž $F_1'(t) \equiv f_1(t) = f(t) + f_2(t)$, t.j. $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$, je (podle pravidla (4)) $F(t) = F_1(t) - F_2(t)$ neboli

$$\int u'(t)v(t)dt = u(t)v(t) - \int u(t)v'(t)\, dt.$$

Užití tohoto vzorce je zřejmě vhodné v případech, kdy lze snadno určit primitivní funkci $F_2(t)$.

Příklad

$f(t) = te^t$
Označme $u'(t) = e^t$, $v(t) = t$. Pak $u(t) = e^t$ podle pravidla (3) a $v'(t) = 1$. Je tedy $F_1(t) = te^t$, $f_2(t) = 1 \cdot e^t$, tj. $F_2(t) = e^t$. Odtud $F(t) = te^t - e^t = e^t(t-1)$.
Obvyklejší zápis:

$$F(t) = \int te^t dt = \left| \begin{array}{ll} u'(t) = e^t\ , & u(t) = e^t \\ v(t) = t\ , & v'(t) = 1 \end{array} \right| = te^t - \int 1 \cdot e^t dt = te^t - e^t = e^t(t-1).$$

V praktických příkladech je většinou třeba jednotlivé metody i pravidla pro přímou integraci vhodně kombinovat. Výpočty primitivních funkcí nejsou jen prubířským kamenem ostrovtipu zanícených počtářů, ale mají značný praktický význam právě ve fyzice.