FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

5. ročník — 1998/1999

MATEMATIKA LIBOVOLNĚ MALÉHO

seriál na pokračování

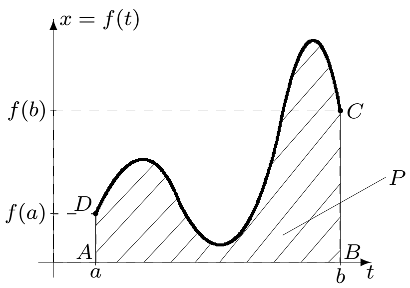
3. část

6. RIEMANNŮV INTEGRÁL

Slova "integrál" jsme poprvé použili v předcházející kapitole ve slovním spojení "neurčitý integrál", představujícím alternativní název pro primitivní funkci $F(t)$ k dané funkci $f(t)$. Se symbolem $\int$ pro integrál jsme se setkali při použití zápisu $F(t) = \int f(t)dt$. Tímto zápisem jsme vyjadřovali skutečnost, že $F'(t) = f(t)$, tj. že funkce $f(t)$ je derivací své funkce primitivní.

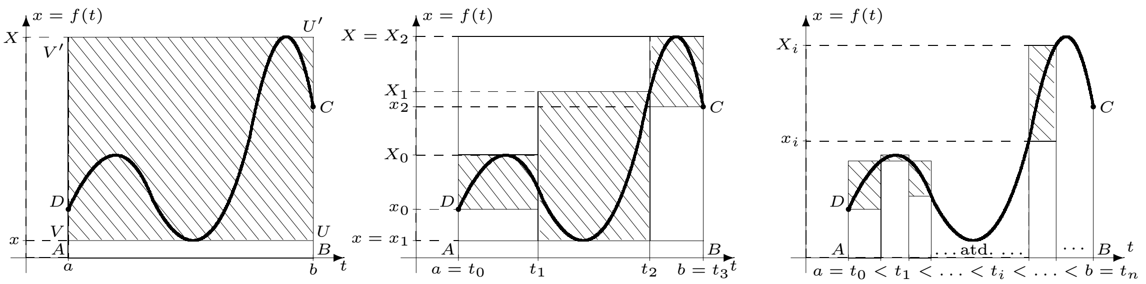
Další úvahy uvedeme formulací geometrické úlohy, která zdánlivě s problémem primitivní funkce nesouvisí:

Na intervalu $< a, b >$ je zadána spojitá funkce $f(t)$. Pro jednoduchost předpokládejme, že její hodnoty jsou nezáporné. Situaci schematicky vystihuje následující obrázek. Z mnoha praktických důvodů by nás mohlo zajímat, zda lze na základě znalosti průběhu funkce $f(t)$ (tj. funkčního předpisu $x = f(t)$, umožňujícího vypočítat pro každou hodnotu nezávisle proměnné $t \in < a, b >$ příslušnou funkční hodnotu x) určit plošný obsah P vyšrafovaného obrazce $ABCD$. Pokud to možné je, jistě si budeme přát najít způsob, jak tento obsah určit.



Znalost elementární euklidovské geometrie nám na tomto místě zřejmě příliš nepomůže. Její metody umožňují určit plošný obsah pouze některých nejjednodušších obrazců, zejména mnohoúhelníků, částí kruhu, popř. obrazců z nich nějakým způsobem složených. Na problém výpočtu obsahu obrazce omezeného například částí paraboly však již elementární geometrie nestačí, i když parabola je křivkou stále ještě poměrně jednoduchou. Díky matematice libovolně malého se přesto nemusíme možnosti vyřešení naší obecné úlohy vzdát.

Pro začátek se zkusme spokojit s jejím přibližným řešením, při kterém vystačíme se znalostí vzorce pro obsah obdélníka. Později se přesvědčíme, že toto omezení není nutné.



(a) (b) (c)

Obrázky znázorňují způsob určení přibližné hodnoty obsahu obrazce s různou přesností a současně symbolizují jednotlivé kroky postupu vedoucího k zpřesňování výsledku. Na obr. (a) je hledaný obsah obrazce $ABCD$ "sevřen" mezi obsahy dvou obdélníků: vepsaného $ABUV$ a opsaného $ABU'V'$. Označíme-li písmenem x (resp. X) nejmenší (resp. největší) hodnotu, jíž funkce nabývá na intervalu $< a, b >$, dostáváme

$$P_{ABUV} \leq P \leq P_{ABU'V'} \Rightarrow x(b-a) \leq P \leq X(b-a) \; .$$

Kdybychom tedy pro odhad plošného obsahu P obrazce $ABCD$ použili kteroukoli z hodnot $P_{ABUV} = x(b-a)$, $P_{ABU'V'} = X(b-a)$, nedopustíme se v žádném případě větší odchylky od skutečnosti, než činí hodnota rozdílu $P_{ABU'V'} - P_{ABUV} = (X-x)(b-a)$ (z důvodů, které ozřejmíme za chvíli, ji označme $\sigma(D_1)$.) V obrázku je obrazec tohoto plošného obsahu zvýrazněn šrafováním.

V dalším kroku odhady zpřesníme (viz obr. (b)). Rozdělíme interval $< a, b >$ například dalšími dvěma dělícími body t_1, t_2 na tři intervaly $< a, t_1 >$, $< t_1, t_2 >$, $< t_2, b >$. Označíme-li $a = t_0$ a $b = t_3$, je $< a, b > = < t_0, t_3 > = < t_0, t_1 > \cup < t_1, t_2 > \cup < t_2, t_3 >$. Soubor čísel $D_3 = \{t_0, t_1, t_2, t_3\}$ se nazývá *dělením intervalu* $< a, b >$. Index 3 u symbolu D značí, že interval $< a, b >$ je rozdělen na tři části. Nejmenší a největší hodnoty funkce $f(t)$ na jednotlivých intervalech označíme postupně $x_0, X_0, x_1, X_1, x_2, X_2$. Z obrázku je zřejmé, že obsah obrazce $ABCD$ je omezen zdola celkovým obsahem $s(D_3) = x_0(t_1-t_0) + x_1(t_2-t_1) + x_2(t_3-t_2)$ *vepsaných obdélníků* a shora celkovým obsahem $S(D_3) = X_0(t_1-t_0) + X_1(t_2-t_1) + X_2(t_3-t_2)$ *obdélníků opsaných.*
Platí tedy

$$s(D_3) \leq P \leq S(D_3) \; ,$$

tj.

$$x_0(t_1-t_0) + x_1(t_2-t_1) + x_2(t_3-t_2) \leq P \leq X_0(t_1-t_0) + X_1(t_2-t_1) + X_2(t_3-t_2) \; .$$

Kteroukoli z hodnot $s(D_3)$ a $S(D_3)$ můžeme opět použít pro odhad obsahu P, aniž se přitom dopouštíme chyby větší, než je obsah $\sigma(D_3)$ vyšrafovaného obrazce, tj.
$S(D_3) - P \leq \sigma(D_3)$, $P - s(D_3) \leq \sigma(D_3)$, přičemž

$$\sigma(D_3) = S(D_3) - s(D_3) = (X_0 - x_0)(t_1 - t_0) + (X_1 - x_1)(t_2 - t_1) + (X_2 - x_1)(t_3 - t_2) \; .$$

Porovnáním obrázků (a) a (b) snadno zjistíme, že $0 \leq \sigma(D_3) \leq \sigma(D_1)$, takže vložením dalších dělicích bodů dovnitř intervalu $< a, b >$, tj. *zjemněním* jeho dělení, se celkový obsah vepsaných resp. opsaných obdélníků přiblížil hodnotě P zdola resp. shora. Při označení $s(D_1) = P_{ABUV}$ a $S(D_1) = P_{ABU'V'}$ můžeme psát

$$s(D_1) \leq s(D_3) \leq P \leq S(D_3) \leq S(D_1)$$

nebo

$$S(D_3) - P \leq S(D_1) - P \qquad \text{a} \qquad P - s(D_3) \leq P - s(D_1) \ .$$

Dalším zjemňováním dělení lze odhad obsahu obrazce stále zpřesňovat. Předpokládejme, že každé další, jemnější, dělení vznikne z dělení předchozího vložením nových dělicích bodů a přečíslováním všech dělicích bodů tak, aby jejich indexy byly uspořádány vzestupně. Označme takto vzniklé dělení

$$D_n = \{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\} \ , \quad \text{kde} \quad a = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n = b \ .$$

Zřejmě platí

$$s(D_1) \leq s(D_3) \leq \dots \leq s(D_n) \leq P \leq S(D_n) \leq \dots \leq S(D_3) \leq S(D_1) \ ,$$

$$0 \leq \sigma(D_n) \leq \dots \leq \sigma(D_3) \leq \sigma(D_1) \ ,$$

přičemž při označení $\Delta t_i = t_{i+1} - t_i$ je

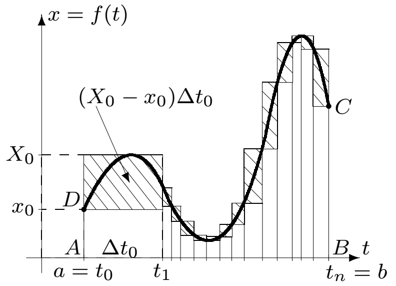
$$s(D_n) = x_0(t_1 - t_0) + x_1(t_2 - t_1) + \dots + x_{n-1}(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta t_i,$$

$$S(D_n) = X_0(t_1 - t_0) + X_1(t_2 - t_1) + \dots + X_{n-1}(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} X_i \Delta t_i,$$

$$\sigma(D_n) = S(D_n) - s(D_n) = (X_0 - x_0)(t_1 - t_0) + (X_1 - x_1)(t_2 - t_1) + \dots +$$
$$+ (X_{n-1} - x_{n-1})(t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - x_i)(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^{n-1} (X_i - x_i)\Delta t_i \ .$$

Poznámka: znak $\sum_{i=0}^{n-1}$, tzv. *sumační znak*, je použit pro zkrácený zápis skutečnosti, že sečítáme výrazy téhož typu, indexované celočíselnou proměnnou $i \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Intuice napovídá, že neustálým zjemňováním dělení intervalu $< a, b >$, které lze provádět prakticky neomezeně, můžeme docílit toho, že veličina $\sigma(D_n)$ bude pro dostatečně velké n libovolně blízká nule, takže celkový obsah $s(D_n)$ vepsaných obdélníků a celkový obsah $S(D_n)$ obdélníků opsaných se budou od hledané hodnoty P lišit libovolně málo. Je třeba zdůraznit, že tohoto výsledku lze docílit jedině tehdy, zjemňujeme-li v každém dalším kroku popsaného postupu všechny dílky předchozího dělení. Nemělo by smysl například jeden dílek, třeba interval $< t_0, t_1 >$, ponechávat beze změny a ostatní zjemňovat. Rozdíl obsahů příslušného opsaného a vepsaného obdélníka $(X_0 - x_0)(t_1 - t_0) = (X_0 - x_0)\Delta t_0$ by zůstával stejný, takže by při jakkoli jemném "porcování" ostatních dílků platila nerovnost $\sigma(D_n) \geq (X_0 - x_0)(t_1 - t_0) = \text{konst.} > 0$. Nemohli bychom tak docílit libovolně malých hodnot veličiny σ. Situaci schematicky znázorňuje následující obrázek.



Z předchozí úvahy vyplývá, že je třeba definovat veličinu, která by charakterizovala "jemnost" dělení jako celku. Vidíme, že jemnost dělení je určena jeho nejhrubším dílkem, t.j. nejdelším z intervalů $< t_i, t_{i+1} >$. Ten bude jakousi "normou" pro posouzení jemnosti dělení. Jeho délku $\nu(D_n) = \max\{\Delta t_i\}, \;\; i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, tj. největší ze souboru čísel $\{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots, \Delta t_{n-1}\}$, také *normou dělení* D_n nazveme. Aby se hodnoty $\sigma(D_n)$ mohly přiblížit k nule libovolně blízko, je třeba zjemňovat dělení intervalu $< a, b >$ tak, že jeho norma poklesne na libovolně malou hodnotu. Tuto skutečnost vyjádříme matematickým zápisem

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sigma(D_n) = 0 \; .$$

Z platnosti tohoto vztahu ovšem přímo plyne rovnost

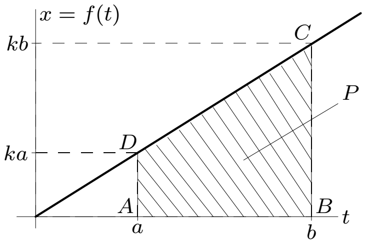
$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n) = \lim_{\nu(D_n)\to 0} S(D_n) = P \; .$$

Ukážeme, že pomocí popsaného postupu lze opravdu obsah některých obrazců i prakticky vypočítat.

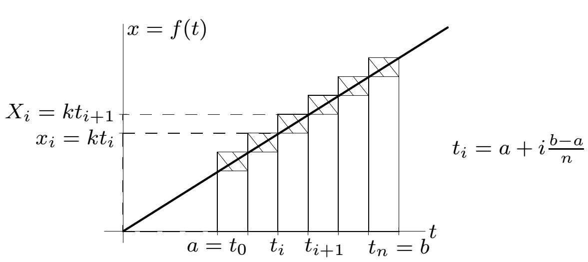
Příklad

$x = f(t) = kt\,,\; k > 0$ je konstanta. Kontrola správnosti výpočtu bude v tomto případě snadná, neboť obsah lichoběžníka $ABCD$ umíme určit i pomocí vztahů z elementární geometrie:

$$P = \frac{|BC| + |AD|}{2}(b-a) = \frac{kb + ka}{2}(b-a) = \frac{k}{2}(b^2 - a^2) \; .$$



Zvolme nyní dělení D_n intervalu $< a, b >$ tak, aby všechny jeho dílky měly stejnou délku $\Delta t_i = \frac{b-a}{n}$ pro $i \in \{0, \dots, n-1\}$.



$$\sigma(D_n) = \sum_{i=0}^{n-1}(X_i - x_i)\Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1}(k\ t_{i+1} - k\ t_i)\Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1} k\ \Delta t_i^2 = k\ \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(b-a)^2}{n^2} =$$

$$= \frac{k(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} 1 = \frac{k(b-a)^2}{n^2} \underbrace{(1+1+\ldots+1)}_{n} = \frac{k(b-a)^2}{n} \, .$$

Při zvětšujícím se počtu dílků, tj. pro $n \to \infty$, bude zřejmě $\nu(D_n) \to 0$. Pak

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sigma(D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{k(b-a)^2}{n} = k(b-a)^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$s(D_n) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1} k t_i \frac{b-a}{n} = \frac{k(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} t_i = \frac{k(b-a)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left(a + i\frac{b-a}{n} \right) =$$
$$= \frac{k(b-a)}{n} na + \frac{k(b-a)^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i \, .$$

Výraz $\sum_{i=0}^{n-1} i = 0+1+2+\ldots+(n-1)$ je součtem prvých n členů aritmetické posloupnosti s prvým členem $a_1 = 0$ a diferencí $d = 1$ a jeho hodnota je $\frac{n(n-1)}{2}$.
Pak

$$s(D_n) = ka(b-a) + k(b-a)^2 \left(\frac{n-1}{2n} \right)$$

a

$$\begin{aligned} P &= \lim_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n) = \lim_{n\to\infty} \left[ka(b-a) + k(b-a)^2 \cdot \frac{n-1}{2n} \right] = \\ &= ka(b-a) + k(b-a)^2 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \right) = ka(b-a) + \frac{k(b-a)^2}{2} = \\ &= \frac{k}{2}(b-a)[2a+b-a] = \frac{k}{2}(b^2-a^2) \, , \end{aligned}$$

což je očekávaný výsledek. Společná hodnota P limit $\lim_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n)$ a $\lim_{\nu(D_n)\to 0} S(D_n)$ se nazývá *Riemannův (určitý) integrál* funkce $f(t)$ na intervalu $< a, b >$ a užívá se pro ni označení

$$P = \int_a^b f(t) dt \, .$$

Tento zápis má názorný význam, zřejmý z následující úvahy:
V každém z intervalů $< t_i, t_{i+1} >$, $i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ platí

$$x_i \le f(t_i) \le X_i \, .$$

Pak

$$\sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1} X_i \Delta t_i \, ,$$

tj.

$$s(D_n) \le \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta t_i \le S(D_n) \, .$$

Pro $\nu(D_n) \to 0$ je však $\lim_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n) = \lim_{\nu(D_n)\to 0} S(D_n) = P$, a proto i

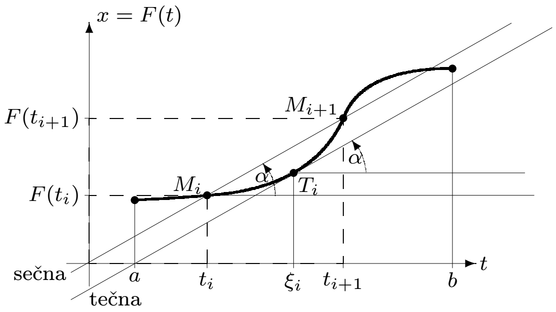
$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i) \Delta t_i = P \, .$$

Pro $\nu(D_n) \to 0$ jsou dělicí body intervalu $< a, b >$ tak "nahuštěny", že indexování ztrácí význam a indexovaná proměnná t_i přechází v proměnnou spojitou t, takže místo $f(t_i)$ píšeme $f(t)$. Místo Δt_i použijeme symbolu dt, který označuje libovolně (infinitezimálně) malou změnu proměnné t. Sumační znak nahradíme znakem integrálu $\int$, symbolizujícím "sčítání nekonečně mnoha infinitezimálně malých obsahů obdélníků $f(t)dt$".

V případě lineární funkce $x = kt$ jsme postupem založeným na výpočtu obsahů vepsaných a opsaných obdélníků při zjemňujícím se dělení definičního intervalu určili obsah obrazce pod grafem funkce přesně, přímým výpočtem kterékoli z limit $\lim\limits_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n)$, $\lim\limits_{\nu(D_n)\to 0} S(D_n)$.

Lze očekávat, že u složitějších funkcí bude takový výpočet velmi pracný a většinou neschůdný. V takových případech bychom se samozřejmě mohli spokojit s přibližným výpočtem pomocí počítače, při němž bychom zjemňování dělení zastavili v okamžiku, kdy by odchylka $\sigma(D_n)$ klesla pod předem stanovenou hodnotu. Za plošný obsah obrazce P bychom pak vzali například aritmetický průměr posledních hodnot $s(D_n)$ a $S(D_n)$.

Věnujme se nyní *nalezení souvislosti Riemannova integrálu a primitivní funkce.* Uvažujme opět o spojité funkci $x = f(t)$ na intervalu $< a, b >$. Funkci k ní primitivní označme $F(t)$. Poněvadž platí $F'(t) = f(t)$ pro $t \in (a, b)$, tj. funkce $F(t)$ má ve všech vnitřních bodech intervalu $< a, b >$ derivaci, je i ona spojitá na intervalu $< a, b >$, a tedy i na každém z intervalů $< t_i, t_{i+1} >$, na něž je interval $< a, b >$ při výpočtu Riemannova integrálu rozdělen.



Označme $M_i = [t_i, F(t_i)]$, $M_{i+1} = [t_{i+1}, F(t_{i+1})]$ body na grafu primitivní funkce. Z obrázku je názorně zřejmá skutečnost (kterou lze i matematicky dokázat), že v intervalu (t_i, t_{i+1}) existuje bod ξ_i takový, že tečna ke grafu funkce vedená bodem $T_i = [\xi_i, F(\xi_i)]$ je rovnoběžná se spojnicí $\overline{M_i M_{i+1}}$. (Tento fakt je nutným důsledkem spojitosti funkce $F(t)$; ta totiž zaručuje, že graf $F(t)$ není nikde mezi body M_i, M_{i+1} přerušen.) Platí tedy

$$f(\xi_i) = F'(\xi_i) = \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i} = \operatorname{tg}\alpha \ .$$

Určíme nyní Riemannův integrál funkce $f(t)$ na intervalu $< a, b >$. Poněvadž obecně je

$$x_i \le f(\xi_i) \le X_i \ ,$$

$$s(D_n) = \sum_{i=0}^{n-1} x_i \Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i \le \sum_{i=0}^{n-1} X_i \Delta t_i = S(D_n)$$

a

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} s(D_n) = \lim_{\nu(D_n)\to 0} S(D_n) = \int_a^b f(t)dt \ ,$$

je také

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i = \int_a^b f(t)dt \ .$$

Přitom

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)\Delta t_i = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{F(t_{i+1}) - F(t_i)}{t_{i+1} - t_i}\,(t_{i+1} - t_i) =$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Big[F(t_{i+1}) - F(t_i)\Big] = \Big[F(t_1) - F(t_0)\Big] + \Big[F(t_2) - F(t_1)\Big] + \Big[(F(t_3) - F(t_2)\Big] + \dots$$

$$+\Big[F(t_{n-1}) - F(t_{n-2})\Big] + \Big[F(t_n) - F(t_{n-1})\Big] = \Big[F(t_n) - F(t_0)\Big] = F(b) - F(a)\ .$$

Získáváme velmi jednoduchý a zatím nejpraktičtější vzorec pro výpočet Riemannova integrálu, tzv. *Newtonovu–Leibnizovu formuli*

$$\int_a^b f(t)dt = \Big[F(t)\Big]_a^b \equiv F(b) - F(a)\ ,$$

vyjadřující slibovaný vztah mezi Riemannovým integrálem a primitivní funkcí.

Určení hodnoty Riemannova integrálu funkce $f(t)$ se tedy redukuje na problém nalezení její primitivní funkce $F(t)$, kterým jsme se zabývali v 5. kapitole.

Poněvadž jsme k definici Riemannova integrálu dospěli při řešení geometrické úlohy — výpočtu plochy obrazce pod grafem funkce, uvažovali jsme dosud pro jednoduchost o funkcích nezáporných. Riemannův integrál je definován stejným způsobem i pro funkce, na něž takové omezení neklademe. Může pak samozřejmě nabývat i záporných nebo nulových hodnot.

Základní vlastnosti Riemannova integrálu:

(1) $$\int_a^b [f_1(t) \pm f_2(t)]\,dt = \int_a^b f_1(t)dt \pm \int_a^b f_2(t)dt\ ,$$

$$\int_a^b [kf(t)]\,dt = k\int_a^b f(t)dt\ , \quad \text{je-li} \quad k = konst.\ ,$$

(2) $$\int_a^b u'(t)v(t)dt = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)dt\ ,$$

(3) $$\int_a^b g[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = G[\varphi(b)] - G[\varphi(a)]\ ,$$

kde $G(u)$ je primitivní funkcí k funkci $g(u)$,

(4) $$\int_a^b f(t)dt = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} f[\psi(v)]\psi'(v)dv\ ,$$

(5) $$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \qquad \textit{aditivita integrálu}\ ,$$

(6) $$\int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt\ ,$$

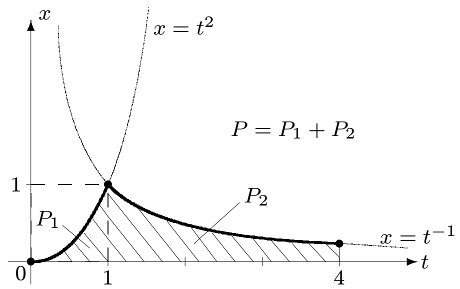
(7) $$|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_b^a |f(t)|dt\ .$$

Tyto vlastnosti vyplývají buď přímo z definice Riemannova integrálu, nebo jsou důsledkem vlastností primitivních funkcí a Newtonovy–Leibnizovy formule. Jejich důkazy jsou poměrně snadné. Pokuste se o ně.

Příklady

- Obrazec je omezen křivkami vyznačenými na obrázku a osou t. Určíme jeho plošný obsah. Graf funkce $x = f(t)$ je tvořen dvěma křivkami určenými různými funkčními předpisy:

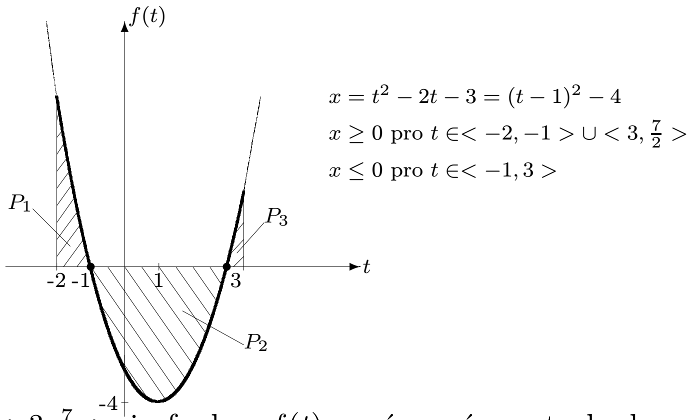
$$x = f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{pro } t \in < 0, 1 > \\ t^{-1} & \text{pro } t \in < 1, 4 > \end{cases}$$



Při výpočtu obsahu obrazce využijeme aditivity integrálu:

$$P = \int_0^4 f(t)dt = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^4 t^{-1} dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\ln t\right]_1^4 = \frac{1}{3} + \ln 4 \,.$$

- Určíme obsah obrazce omezeného grafem funkce $x = f(t) = t^2 - 2t - 3$ a osou t v intervalu $< -2, \frac{7}{2} >$.



V intervalech $< -2, -1 >$ a $< 3, \frac{7}{2} >$ je funkce $f(t)$ nezáporná, proto budou obsahy obrazců P_1 a P_3 vyjádřeny přímo jejími určitými integrály

$$P_1 = \int_{-2}^{-1} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_{-2}^{-1} = \frac{7}{3} \,,$$

$$P_3 = \int_3^{\frac{7}{2}} \left(t^2 - 2t - 3\right) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_3^{\frac{7}{2}} = \frac{13}{24} \,.$$

V intervalu $< -1, 3 >$ je funkce $f(t)$ nekladná, její určitý integrál je proto nekladný a obsah P_2 je nutno počítat jako jeho absolutní hodnotu

$$P_2 = \left|\int_{-1}^{3} (t^2 - 2t - 3) dt\right| = \left|\left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_{-1}^{3}\right| = \frac{32}{3} \,,$$

$$P = P_1 + P_2 + P_3 = 13\frac{13}{24} \,.$$