FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy university v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

5. ročník — 1998/1999

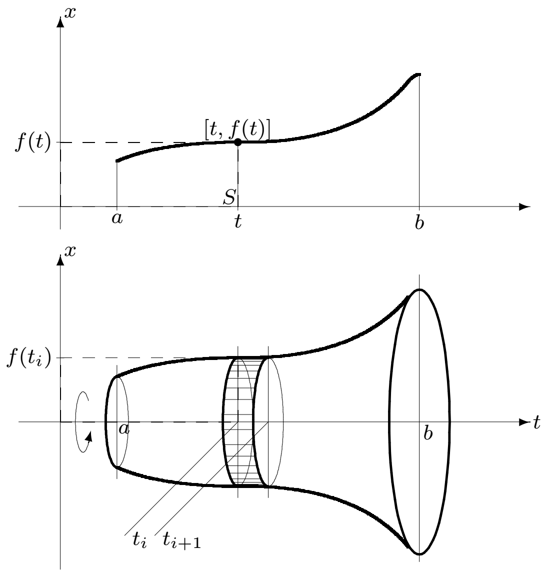
MATEMATIKA LIBOVOLNĚ MALÉHO

seriál na pokračování

4. část

7. GEOMETRICKÉ A FYZIKÁLNÍ APLIKACE RIEMANNOVA INTEGRÁLU

Jednou z typických ukázek geometrických aplikací Riemannova integrálu je právě *výpočet obsahu plošných obrazců,* pomocí nějž jsme pojem určitého integrálu vyložili v předchozí kapitole. Jinou užitečnou aplikací je *určení objemu rotačních těles:*
Předpokládejme opět, že $x = f(t)$ je spojitá nezáporná funkce na intervalu $< a, b >$ (viz obrázek).



Necháme-li souřadnicovou rovinu určenou osami proměnných t a x rotovat kolem osy t, pohybuje se obecný bod grafu $[t, f(t)]$ po kružnici se středem v bodě $S = [t, 0]$ na ose t a poloměrem $f(t)$. Rovina této kružnice je kolmá k ose t. Všechny takto vzniklé kružnice vytvoří plášť rotačního tělesa o kruhových podstavách se středy v bodech $[a, 0], [b, 0]$ a poloměrech $f(a), f(b)$.

Zvolme dělení $D_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ intervalu $< a, b >$. Roviny vedené dělicími body kolmo k ose t rozdělí rotační těleso na vrstvy, jejichž tvar je při jemném dělení D_n velmi blízký válcům. Objem i-tého z těchto válců je

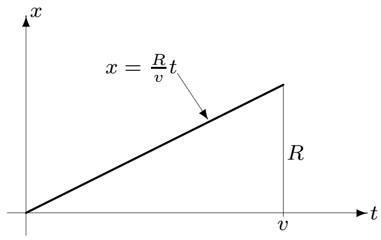
$$\Delta V_i = \pi \left[f(t_i)\right]^2 \cdot (t_{i+1} - t_i) = \pi \left[f(t_i)\right]^2 \cdot \Delta t_i \ .$$

Pro $\nu(D_n) \to 0$ je limitní hodnota součtu objemů těchto elementárních válců rovna objemu celého tělesa, tj.

$$V = \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi \left[f(t_i)\right]^2 \Delta t_i = \int_a^b \pi \left[f(t)\right]^2 dt$$

Příklad

Z elementární geometrie víme, že objem rotačního kužele o podstavě s poloměrem R a výšce v je $V = \frac{1}{3}\pi R^2 v$. Ověříme tento vzorec užitím Riemannova integrálu.



Kužel zadaných rozměrů vznikne rotací přímky o směrnici $\mathrm{tg}\alpha = \frac{R}{v}$ kolem osy t, je-li $t \in < 0, v >$. Zřejmě $x = f(t) = \frac{R}{v}t$.

$$V = \int_0^v \pi \left[\frac{R}{v}t\right]^2 dt = \frac{\pi R^2}{v^2} \int_0^v t^2 dt = \frac{\pi R^2}{v^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^v = \frac{\pi R^2}{v^2} \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3}\pi R^2 v \ ,$$

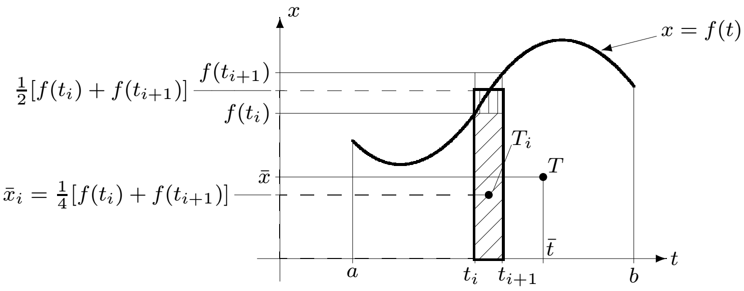
což je očekávaný výsledek.

K významným fyzikálním aplikacím Riemannova integrálu patří úlohy spočívající v nalezení různých fyzikálních charakteristik hmotných objektů — hmotnosti, polohy těžiště, momentů setrvačnosti rovinných či prostorových útvarů. Pro řešení těchto úloh v jejich plné obecnosti není matematický aparát, který máme prozatím k dispozici, zcela postačující a proto se musíme omezit jen na jednodušší případy. Budeme uvažovat jen o tělesech, která jsou homogenní (tj. s konstantní hustotou popisující rozložení hmotnosti) a rotačně symetrická; počítat budeme jejich hmotnost a polohu těžiště.

Hmotnost homogenního rovinného obrazce S s plošnou hustotou σ_0 [kgm^{-2}] resp. *homogenního prostorového útvaru* U s hustotou ρ_0 [kgm^{-3}] lze určit snadno, dokážeme-li vypočítat příslušný plošný obsah nebo objem:

$$m_S = \sigma_0 P_S \ , \quad m_U = \rho_0 V_U \ .$$

Poloha těžiště rovinného obrazce se určuje na základě úvahy ilustrované následujícím obrázkem:



Označíme hledané souřadnice těžiště $T = [\overline{t}, \overline{x}]$, souřadnice těžiště T_i i-tého z obdélníků, na něž rozdělíme obrazec při zvoleném dělení $D_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ intervalu $< a, b >$ jsou $T_i =$ $= [\overline{t}_i, \overline{x}_i] = \left[\frac{t_i+t_{i+1}}{2}\ ,\ \frac{f(t_i)+f(t_{i+1})}{4}\right]$. Hmotnost i-tého obdélníka je $\Delta m_i = \sigma_0 \dfrac{f(t_i) + f(t_{i+1})}{2} \Delta t_i$.

Z definice těžiště vyplývá

$$\sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i \left(\overline{t}_i - \overline{t}\right) = 0\ , \quad \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i \left(\overline{x}_i - \overline{x}\right) = 0\ .$$

Pro $\nu(D_n) \to 0$ dostáváme

$$\overline{t} \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i = \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i \overline{t}_i = \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sigma_0 \frac{[f(t_i) + f(t_{i+1})]\,(t_i + t_{i+1})}{4} \Delta t_i$$

tj.

$$\overline{t} = \frac{\sigma_0}{m} \int_a^b t f(t) dt\ ,$$

kde $\quad m = \sigma_0 \displaystyle\int_a^b f(t) dt \quad$ je hmotnost uvažovaného obrazce.

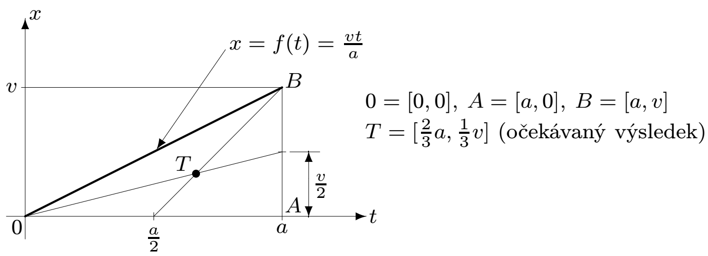
Podobně

$$\overline{x} = \frac{\sigma_0}{m} \int_a^b \frac{[f(t)]^2}{2} dt\ .$$

Poznámka: Pro $\quad \nu(D_n) \to 0 \quad$ je $\quad [\overline{t}_i, \overline{x}_i] \to [t, \frac{1}{2} f(t)]\ , \quad \Delta m_i \to \sigma_0 f(t) dt\ .$

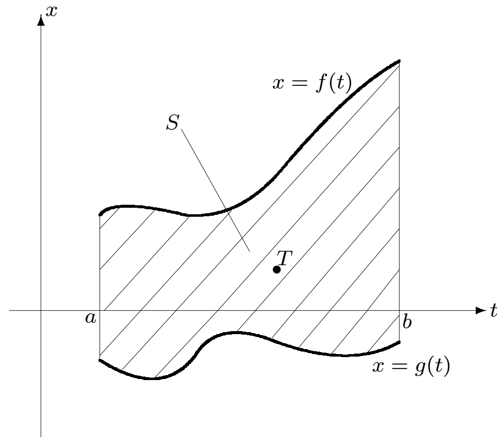
Příklady

- Určíme polohu těžiště pravoúhlého trojúhelníka o odvěsnách a, v. Výsledek opět budeme moci porovnat s výpočtem známým z geometrie: $T = \frac{1}{3}(0 + A + B)$.



$$m = \sigma_0 \int_0^a f(t)dt = \sigma_0 \frac{v}{a} \int_0^a t dt = \frac{1}{2}\sigma_0 a v \ ,$$
$$\overline{t} = \frac{\sigma_0}{m} \int_0^a t f(t)dt = \frac{2}{av} \int_0^a \frac{v}{a} t^2 dt = \frac{2}{a^2} \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3} a \ ,$$
$$\overline{x} = \frac{\sigma_0}{m} \int_0^a \frac{[f(t)]^2}{2} dt = \frac{1}{av} \int_0^a \frac{v^2}{a^2} t^2 dt = \frac{v}{a^3} \left[\frac{t^3}{3}\right] = \frac{1}{3} v \ .$$

- Určíme polohu těžiště obecného rovinného útvaru znázorněného na obrázku.



$$m = \sigma_0 \int_a^b f(t)dt - \int_a^b g(t)dt = \sigma_0 \int_a^b [f(t) - g(t)]\, dt$$
$$\overline{t} = \frac{\sigma_0}{m} \int_a^b t\, [f(t) - g(t)]\, dt \ , \quad \overline{x} = \frac{\sigma_0}{m} \int_a^b \frac{1}{2} [f(t) - g(t)]^2\, dt$$

Podobným postupem se určí *poloha těžiště rotačního tělesa* T. V tomto případě je díky symetrii $\overline{x} = 0$. $T_i = [\overline{t}_i, 0] = \left[\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, 0\right]$, $\Delta m_i = \pi \rho_0 \left[f(t_i)\right]^2 \Delta t_i$.

$$\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta m_i \left(\overline{t}_i - \overline{t}\right) = 0 \ , \quad \text{tj.} \quad \overline{t} = \frac{1}{m} \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi \rho_0 \left[f(t_i)\right]^2 \cdot \frac{t_i + t_{i+1}}{2} \ ,$$
$$\overline{t} = \frac{\pi \rho_0}{m} \int_a^b t \left[f(t)\right]^2 dt \ ,$$

kde $m = \rho_0 \int_a^b \pi \left[f(t)\right]^2 dt$ je hmotnost uvažovaného tělesa.

Příklad

Poloha těžiště kužele o poloměru podstavy R a výšce v je určena vztahem

$$\overline{t} = \frac{\pi \rho_0}{m} \int_0^v t \left[\frac{R}{v} t\right]^2 dt = \frac{\pi \rho_0}{\frac{1}{3}\pi R^2 v\ \rho_0} \cdot \frac{R^2}{v^2} \left[\frac{1}{4} t^4\right]_0^v = \frac{3}{4} v \ .$$

Tato hodnota udává vzdálenost těžiště kužele od jeho vrcholu. Těžiště leží na ose kužele.

Další jednoduchou fyzikální aplikací Riemannova integrálu, které si všimneme, je jeho použití při *nalezení časové závislosti rychlosti a polohového vektoru hmotného bodu* na základě znalosti jeho zrychlení $\vec{a}(t)$, počáteční polohy $\vec{r}(0)$ a počáteční rychlostí $\vec{v}(0)$. (Vektory $\vec{r}(0)$, $\vec{v}(0)$, jsou určeny tzv. *počáteční podmínky.*) Uvažujme o hmotném bodu, který se může pro jednoduchost pohybovat pouze podél osy x. Jeho zrychlení $a_x(t)$ nechť je známou funkcí času. Počáteční podmínky mají tvar $x(0) = x_0\ ,\ v_x(0) = v_0$.
Platí

$$a_x(t) = \dot{v}_x(t)\ , \quad \text{tedy} \quad v_x(t) = \int a_x(t)dt + A\ ,$$

$$v_x(t) = \dot{x}(t)\ , \quad \text{tedy} \quad x(t) = \int v_x(t)dt + B\ .$$

Konstanty A, B je třeba určit z počátečních podmínek (viz kapitola 5). Určování konstant A, B dosazováním počátečních podmínek se lze vyhnout použitím Riemannova integrálu takto: $v_x(t)$ je primitivní funkcí k $a_x(t)$ na intervalu $< 0, t >$, proto

$$\int_0^t a_x(t)dt = v_x(t) - v_x(0) = v_x(t) - v_0\ .$$

Podobně

$$\int_0^t v_x(t)dt = x(t) - x(0) = x(t) - x_0\ .$$

Odtud

$$v_x(t) = v_0 + \int_0^t a_x(t)dt\ ,$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v_x(t)dt\ .$$

Není-li pohyb hmotného bodu omezen na osu x, jsou veličiny $v_y(t), y(t), v_z(t), z(t)$ určeny analogickými vztahy.

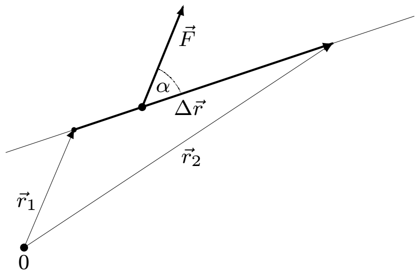
Poznámka: Je-li $a \to -\infty$ nebo $b \to \infty$, hovoříme o tzv. *nevlastním integrálu.*

Platí

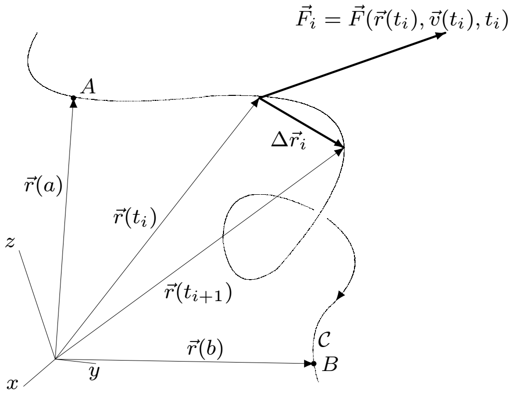
$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(t)dt = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)\ ,$$
$$\int_a^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(t)dt = \lim_{b\to\infty} F(b) - F(a)\ ,$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a)\ ,$$

pokud potřebné limity existují.

K Riemannovu integrálu vede i *výpočet práce konané silou $\vec{F}$, působící na částici pohybující se po určité trajektorii $\mathcal{C}$.* Práci konanou silou podél určité trajektorie umíme zatím vyjádřit pouze tehdy, je-li síla konstantní a trajektorie přímková. V takovém případě platí $W = |\vec{F}||\Delta\vec{r}| \cos\alpha = \vec{F}\Delta\vec{r}$.



Nyní výpočet práce zobecníme na případ proměnné síly a libovolné trajektorie. Síla $\vec{F}$ působící na částici závisí obecně na čase t, na poloze částice $\vec{r}$ a na její rychlosti $\vec{v}$.



Celkovou práci W_{AB} síly $\vec{F}$ po trajektorii $\mathcal{C}$ $[\vec{r} = \vec{r}(t)]$ mezi body A a B $[t \in < a, b >]$ lze přibližně vyjádřit jako součet elementárních prací typu $\Delta W_i = \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i$.
$[D_n = \{a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b\}$ je dělení uvažovaného časového intervalu.]

$$\begin{aligned} W_{AB} &\doteq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta W_i = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}\left(\vec{r}(t_i), \vec{v}(t_i), t_i\right) \Delta\vec{r}_i = \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}\left(\vec{r}(t_i), \vec{v}(t_i), t_i\right) \frac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{\Delta t_i} \Delta t_i \ . \end{aligned}$$

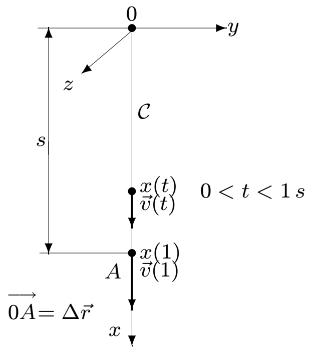
Přesnost tohoto vyjádření je tím větší, čím je dělení D_n jemnější. Pro $\nu(D_n) \to 0$ lze provést záměnu $\vec{F}\left(\vec{r}(t_i), \vec{v}(t_i), t_i\right) \to \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right)$,
$\dfrac{\vec{r}(t_{i+1}) - \vec{r}(t_i)}{\Delta t_i} \to \vec{v}(t)$, $\quad \Delta t_i \to dt$, $\quad \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \to \int_a^b$, neboť indexovaná proměnná $\{t_i\}$
$i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ přechází v proměnnou spojitou.
Pak $\quad W_{AB} = \displaystyle\lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(\vec{r}_i, \vec{v}_i . t_i) \Delta\vec{r}_i = \int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t\right) \vec{v}(t) dt$.
Značíme $\quad W_{AB} = \displaystyle\int_{\mathcal{C}} \vec{F} d\vec{r}$
a hovoříme o *dráhovém integrálu síly*. Je-li $\vec{F}$ závislá pouze na poloze, jedná se o tzv. *křivkový integrál druhého typu* z vektorového pole $\vec{F}$ po křivce $\mathcal{C}$.

Příklady

- Rychlost kuličky padající k Zemi v odporujícím prostředí závisí za předpokladu, že odporová síla vyhovuje Stokesovu vztahu $\vec{F}_{odp} = -6\pi\eta r\vec{v} = -b\vec{v}$, na čase takto:

$$\vec{v} = \frac{m\vec{g}}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) .$$

m je hmotnost kuličky, r její poloměr, η dynamická viskozita prostředí. (O správnosti tohoto výsledku se můžete přesvědčit dosazením do druhého Newtonova zákona $m\vec{a} = m\vec{g} - b\vec{v}$, *tj.* $\dot{\vec{v}}(t) + \frac{b}{m}\vec{v}(t) = \vec{g}$.) Zjistíme, jakou dráhu urazila kulička od počátku svého pohybu za jednu sekundu a jakou práci při tom vykonala tíhová síla a síla odporu prostředí.
Předpokládejme, že soustava souřadnic je zvolena podle obrázku.



Kulička je volně vypuštěna z počátku, tj. $\vec{r}(0) = \vec{0}$, $\vec{v}(0) = \vec{0}$. V čase t je $\vec{v}(t) = (v(t), 0, 0)$, kde $v(t) = \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)$. Platí $x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt$, tj.

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t \frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)dt = \frac{mg}{b}\Big[t\Big]_0^t - \frac{mg}{b}\cdot\left[-\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t}\right]_0^t \Rightarrow \\ &\Rightarrow\ x(t) = \frac{mgt}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right) . \end{aligned}$$

Dále je $y(t) = 0, z(t) = 0$. Dráha, kterou urazí kulička za jednu sekundu, je $s = |x(1) - x(0)| = \frac{mg}{b} - \frac{m^2 g}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}}\right)$, $e \doteq 2,72$.
Při výpočtu práce tíhové síly $m\vec{g}$ není nutné použít integrálu, neboť tíhová síla je konstantní a částice se pohybuje po přímce

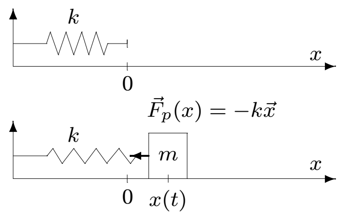
$$W_g = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mgs = \frac{m^2 g^2}{b} - \frac{m^3 g^2}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}}\right) .$$

Práce odporové síly je

$$\begin{aligned} W_{odp} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{odp} d\vec{r} = \int_0^1 (-b\vec{v})\vec{v}dt = -b\int_0^1 v^2(t)dt = -b\int_0^1 \left[\frac{mg}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}t}\right)\right]^2 dt = \\ &= -\frac{m^2 g^2}{b}\int_0^1 \left(1 - 2e^{-\frac{b}{m}t} + e^{-\frac{2b}{m}t}\right)dt = -\frac{m^2 g^2}{b}\left[t + \frac{2m}{b}e^{-\frac{b}{m}t} - \frac{m}{2b}e^{-\frac{2b}{m}t}\right]_0^1 = \\ &= -\frac{m^2 g^2}{b}\left(1 + \frac{2m}{b}e^{-\frac{b}{m}} - \frac{m}{2b}e^{-\frac{2b}{m}} - \frac{2m}{b} + \frac{m}{2b}\right) , \\ W_{odp} &= -\frac{m^2 g^2}{b} + \frac{2m^3 g^2}{b^2}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}}\right) - \frac{m^3 g^2}{2b^2}\left(1 - e^{-\frac{2b}{m}}\right) . \end{aligned}$$

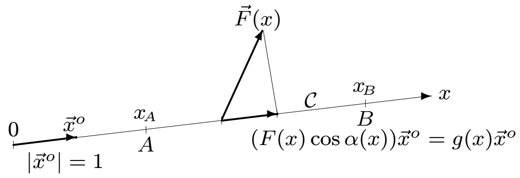
Skutečnost, že celková práce sil působících na kuličku je
$W = W_g + W_{odp} = \dfrac{m^3 g^2}{2b^2}\left(1 - e^{-\frac{b}{m}}\right)^2 = \dfrac{1}{2} m v^2(1)$,   (přesvědčte se)
je současně kontrolou správnosti výsledků získaných pro W_g a W_{odp}.

- Vypočteme práci, kterou vykoná pružná síla $\vec{F}_p = -k\vec{x}$ při vychýlení lineárního oscilátoru z rovnovážné polohy do místa o souřadnici x_0.



$$W_p = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_p d\vec{x} = \int_{\mathcal{C}} -k\vec{x} d\vec{x} = \int_0^{x_0} kx dx = \frac{1}{2} k \ x_0^2 \ .$$

Všimněte si, že v tomto, zvlášť jednoduchém, případě jsme ani nepotřebovali znát časovou závislost $x = x(t)$. Jedná se totiž o jednu z velmi častých situací, kdy působící síla závisí pouze na poloze částice. V takových případech nebývá nutné převádět vztah pro práci na Riemannův integrál s časovou proměnnou a lze pracovat pouze s výrazy závislými na souřadnicích. Problém není v celé obecnosti tak jednoduchý, abychom jej zde mohli vyložit. Jeho podstatu lze však alespoň částečně pochopit na případu, kdy je trajektorie částice přímková a průmět síly $\vec{F}$ do této trajektorie je závislý na poloze částice známým způsobem tj. $F \cos\alpha = g(x)$.



Dělení intervalu $< x_A, x_B >$:$D_n = \{x_A = x_0, x_1, \ldots, x_n = x_B\}$ $\Delta\vec{r}_i = (x_{i+1} - x_i)\vec{x}^0$

V takovém případě je práce síly $\vec{F}$ při přemístění částice mezi body A, B dána Riemannovým integrálem tvaru

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(x_i)\Delta\vec{r}_i = \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i)\cos\alpha(x_i)\Delta x_i = \\ &= \lim_{\nu(D_n)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i)\Delta x_i = \int_{x_A}^{x_B} g(x)dx \ . \end{aligned}$$

Označíme-li $G(x)$ primitivní funkci k funkci $g(x)$ na intervalu $< x_A, x_B >$, pak práce

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} g(x)dx = \Big[G(x)\Big]_{x_A}^{x_B} \equiv G(x_B) - G(x_A)$$

je určena pouze hodnotami funkce $G(x)$ v koncovém a počátečním bodě uvažované části trajektorie bez ohledu na konkrétní časovou závislost polohy částice. Nezávisí tedy například ani na tom, jak rychle se částice po přímce pohybovala a za jak dlouho vzdálenost AB překonala.