FYZIKÁLNÍ SEKCE

Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně

KORESPONDENČNÍ SEMINÁŘ Z FYZIKY

7. ročník — 2000/2001

Vzorová řešení čtvrté série úloh

(25 bodů)

Vzorové řešení úlohy č. 1 (6 bodů)

(a) Protože se částice pohybuje po kružnici rovnoměrně, je úhel $\varphi(t)$ úměrný času. Současně ovšem platí $\varphi(T) = 2\pi$, tedy

$$\varphi(t) = \frac{2\pi}{T}t. \tag{1}$$

(b) Podle obr. 1 platí

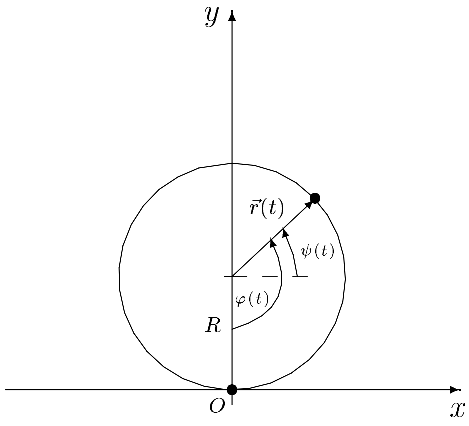
$$x(t) = R\cos\psi(t), \qquad y(t) = R + R\sin\psi(t), \qquad \psi(t) = \varphi(t) - \frac{\pi}{2}.$$

Odtud získáme s použitím goniometrických vzorců

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta,\\ \sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\end{aligned}$$

a vztahu (1) dokazovaná vyjádření složek polohového vektoru v okamžiku t

$$x(t) = R\sin\frac{2\pi}{T}t, \qquad y(t) = R\left(1 - \cos\frac{2\pi}{T}t\right). \tag{2}$$



Obr. 1

(c) Dosazením $t = 1$ s a $t + \Delta t = 2$ s do vztahů (2) vychází

$$x(t) = 30 \text{ cm}, \qquad y\,(t) = 30 \text{ cm}, \qquad \text{tj. } \vec{r}\,(t) = (30 \text{ cm}, 30 \text{ cm}),$$
$$x(t+\Delta t) = 0 \text{ cm}, \qquad y\,(t+\Delta t) = 60 \text{ cm}, \qquad \text{tj. } \vec{r}\,(t+\Delta t) = (0 \text{ cm}, 60 \text{ cm}).$$

(d) Vektor průměrné rychlosti je definován vztahem

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Za použití vztahů (2) a goniometrických vzorců

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

dostaneme pro složky vektoru posunutí $\Delta\vec{r}$ v časovém intervalu $[t, t+\Delta t]$ obecný předpis

$$\Delta x = 2R\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right]\sin\frac{\pi}{T}\Delta t, \tag{3}$$

$$\Delta y = 2R\sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{\Delta t}{2}\right)\right]\sin\frac{\pi}{T}\Delta t. \tag{4}$$

Po dosazení zadaných hodnot $t = 1$ s a $\Delta t = 1$ s vychází pro průměrnou rychlost částice v intervalu $[t, t+\Delta t]$

$$\langle \vec{v} \rangle = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}\right) = \left(-30 \text{ cm.s}^{-1}, 30 \text{ cm.s}^{-1}\right).$$

(e) Průměrná velikost rychlosti je definována vztahem

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Protože $\Delta s = R\Delta\varphi$ a $\Delta\varphi$ je určeno vztahem (1), vychází

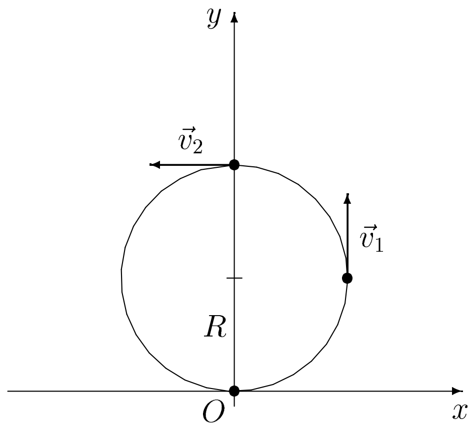
$$\langle v \rangle = \frac{2\pi R}{T},$$

číselně $\langle v \rangle \doteq 47\ \mathrm{cm.s^{-1}}$. Tato veličina je nezávislá na volbě časového intervalu $[t, t+\Delta t]$, což je ve shodě s očekáváním – částice se po kružnici pohybuje rovnoměrně.

(f) Vektor okamžité rychlosti je v každém okamžiku tečný k trajektorii a má vzhledem k rovnoměrnosti pohybu stálou velikost $|\ \vec{v}\ | = \frac{2\pi R}{T}$. Podle obr. 2 tedy platí

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \left(0,\ \frac{2\pi R}{T}\right) \doteq \left(0\ \mathrm{cm.s^{-1}}, 47\ \mathrm{cm.s^{-1}}\right), \\ \vec{v}_2 &= \left(-\frac{2\pi R}{T},\ 0\right) \doteq \left(-47\ \mathrm{cm.s^{-1}}, 0\ \mathrm{cm.s^{-1}}\right). \end{aligned}$$

Velikost okamžité rychlosti $|\ \vec{v}\ | = \frac{2\pi R}{T}$ je podle očekávání rovna průměrné velikosti rychlosti částice $\langle v \rangle$ odvozené v části (e).



Obr. 2

Poznámka:
Tuto část úlohy bylo možné řešit nejen úvahou o rovnoměrnosti pohybu, ale také užitím definičního vztahu pro vektor okamžité rychlosti

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \vec{v} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}\,(t+\Delta t) - \vec{r}\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Pro velmi malá $\Delta t \to 0$ můžeme ve vztazích (3) a (4) zanedbat Δt oproti t a současně psát $\sin \frac{\pi \Delta t}{T} \approx \frac{\pi \Delta t}{T}$. Potom

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \approx \frac{2\pi R}{T} \cos \frac{2\pi}{T} t, \\ v_y &= \frac{\Delta y}{\Delta t} \approx \frac{2\pi R}{T} \sin \frac{2\pi}{T} t. \end{aligned}$$

Dosazením $t = 1$ s a $t = 2$ s odtud dostaneme hledané vztahy pro složky vektorů $\vec{v}_1$ a $\vec{v}_2$. Velikost okamžité rychlosti je přitom v každém okamžiku dána výrazem $|\ \vec{v}\ | = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{2\pi R}{T}$.

(g) V části (e) jsme zjistili, že průměrná velikost rychlosti nezávisí na intervalu, v němž ji určujeme, a platí pro ni vztah

$$\langle v \rangle = \frac{2\pi R}{T}.$$

Na druhé straně, pro zadané intervaly $[t_1, t_2] = [t_1, t_1 + nT]$, kde n je přirozené číslo, zřejmě platí

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}\,(t_2) - \vec{r}\,(t_1) = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \langle \vec{v} \rangle = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\, \langle \vec{v} \rangle \,| = 0.$$

Obecně je tedy

$$\langle v \rangle \neq |\, \langle \vec{v} \rangle \,|\,.$$

Vzorové řešení úlohy č. 2 (8 bodů)

Veličiny $\langle v_x \rangle$, $\langle v_y \rangle$, $\langle v_z \rangle$ a $|\, \langle \vec{v} \rangle \,|$ pro $t = 1$ s a Δt podle tabulky vypočteme stejným způsobem jako v předchozí úloze. Úhel α, který svírá vektor průměrné rychlosti $\langle \vec{v} \rangle$ částice s osou x určíme např. ze vztahu pro skalární součin vektoru $\langle \vec{v} \rangle$ a jednotkového vektoru $\vec{u} = (1, 0)$ ve směru osy x:

$$\langle \vec{v} \rangle \cdot \vec{u} = \langle v_x \rangle = |\, \langle \vec{v} \rangle \,| \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos \frac{\langle v_x \rangle}{|\, \langle \vec{v} \rangle \,|}.$$

Δt [s]	$\langle v_x \rangle$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_y \rangle$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_z \rangle$ [cm.s^{-1}]	$\lvert \langle \vec{v} \rangle \rvert$ [cm.s^{-1}]	α [$^{\circ}$]
1,000	-30,00	30,00	0,00	42,43	135,0
0,500	-17,57	42,43	0,00	45,92	112,5
0,250	-9,13	45,92	0,00	46,82	101,3
0,125	-4,61	46,82	0,00	47,05	95,6

Složky okamžité rychlosti v čase $t = 1,000$ s jsou $v_x = 0,00$ cm.s^{-1} a $v_y = 47,12$ cm.s^{-1}. Potom $|\, \vec{v} \,| = 47,12$ cm.s^{-1} a $\alpha_0 = 90,0^{\circ}$.

Δt [s]	$\langle v_x \rangle - v_x$ [cm.s^{-1}]	$\langle v_y \rangle - v_y$ [cm.s^{-1}]	$\lvert \langle \vec{v} \rangle \rvert - \lvert \vec{v} \rvert$ [cm.s^{-1}]	$\alpha - \alpha_0$ [$^{\circ}$]
1,000	-30,00	-17,12	-4,70	45,0
0,500	-17,57	-4,70	-1,20	22,5
0,250	-9,13	-1,20	-0,30	11,3
0,125	-4,61	-0,30	- 0,08	5,6

Z výsledků v druhé tabulce je vidět, že s klesající délkou intervalu $[t, t + \Delta t]$, kde $t = 1$ s, se snižuje rozdíl průměrných a okamžitých hodnot jednotlivých veličin.

Tato skutečnost je pochopitelná, protože okamžité hodnoty kinematických veličin jsou definovány jako limitní případy veličin průměrných pro $\Delta t \to 0$.

Vzorové řešení úlohy č. 3 (5 bodů)

(a) Rychloměr zastaví svá měření v případě, že se kolo nepohybuje. Po každém úseku tedy platí

$$\langle v \rangle_{\mathrm{r}} = \frac{s}{\tau},$$

kde $\langle v \rangle_{\mathrm{r}}$ je průměrná velikost rychlosti, kterou ukazuje rychloměr, s je celková dráha ujetá na kole od začátku výletu a τ je celkový čas jízdy od začátku výletu (v τ není zahrnuta doba zastávek). Veličiny s i τ přitom odečítáme na rychloměru.

(b) Správnou hodnotu průměrné velikosti rychlosti na konci každého časového úseku vypočteme jako podíl celkové ujeté dráhy s a celkového času t od začátku výletu (t nyní zahrnuje i dobu zastávek), tj.

$$\langle v \rangle_{\mathrm{s}} = \frac{s}{t}.$$

Veličinu s přitom odečítáme na rychloměru, čas t, který uplynul od začátku výletu, musíme měřit na pomocných stopkách, neboť $\tau \neq t$.

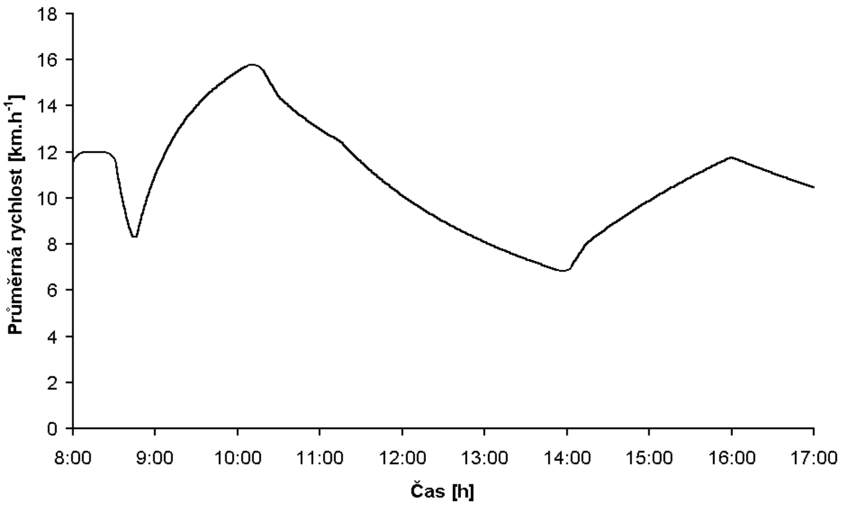
Předpokládáme-li, že se cyklisté v průběhu jednotlivých úseků pohybují rovnoměrně, je řešení částí (a) a (b) shrnuto v následující tabulce:

ÚSEK	ČAS [hod]	$\langle v \rangle_{\mathrm{r}}$ [km.h^{-1}]	$\langle v \rangle_{\mathrm{s}}$ [km.h^{-1}]
1.	8:00 – 8:30	12	12
2.	8:30 – 8:45	12	8
3.	8:45 – 10:15	18	16
4.	10:15 – 10:30	18	14
5.	10:30 – 11:15	15	12
6.	11:15 – 14:00	15	7
7.	14:00 – 14:15	17	8
8.	14:15 – 16:00	20	12
9.	16:00 – 17:00	20	11

(c) Správnou hodnotu průměrné velikosti rychlosti vypočteme v každém okamžiku jako podíl celkové ujeté dráhy s a doby t, která uběhla od počátku výletu, tj.

$$\langle v \rangle_{\mathrm{s}}(t) = \frac{s(t_0) + v \cdot (t - t_0)}{t},$$

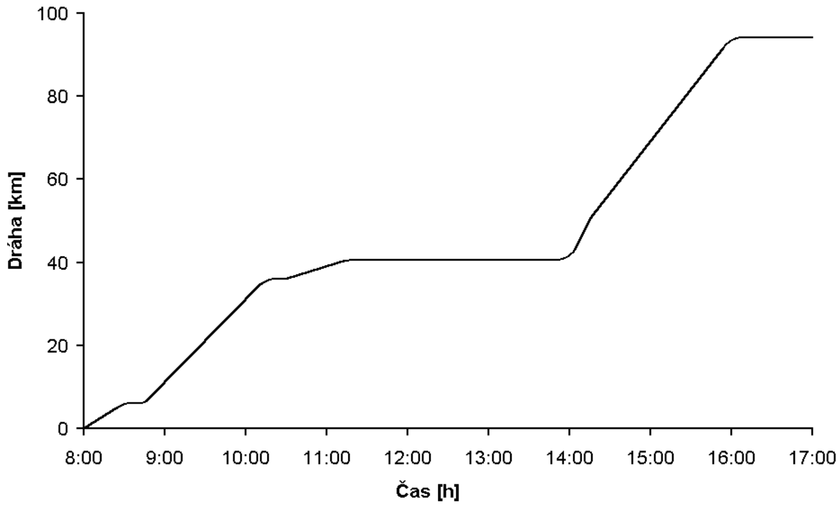
kde $s(t_0)$ je celková dráha ujetá do okamžiku t_0 a v je konstantní velikost rychlosti cyklisty v daném intervalu počínajícím okamžikem t_0.



(d) Celkovou dráhu ujetou za čas t určíme ze známého vztahu pro dráhu rovnoměrného pohybu

$$s\left(t\right)=s\left(t_0\right)+v\cdot\left(t-t_0\right),$$

kde význam jednotlivých veličin je stejný jako v předchozí části.



Vzorové řešení úlohy č. 4 (6 bodů)

(a) Celková dráha, kterou cyklista urazil za 2,5 hodiny, je číselně rovna obsahu plochy omezené časovou osou a grafem. Rozdělíme-li tuto plochu vhodně na obdélníky a trojúhelníky, přivede rutinní geometrický výpočet k výsledku

$$s \doteq 50 \text{ km}.$$

(b) Stejným postupem jako v předchozí části vypočteme celkové dráhy ujeté do zadaného okamžiku a jejich podělením dobou pohybu získáme hledané průměrné velikosti rychlosti. Výsledky jsou shrnuty v následující tabulce:

t [$'$]	$s\,(t)$ [km]	$\langle v\rangle\,(t)$ [km.h^{-1}]
30	11	22
60	18	18
90	30	20
120	40	20

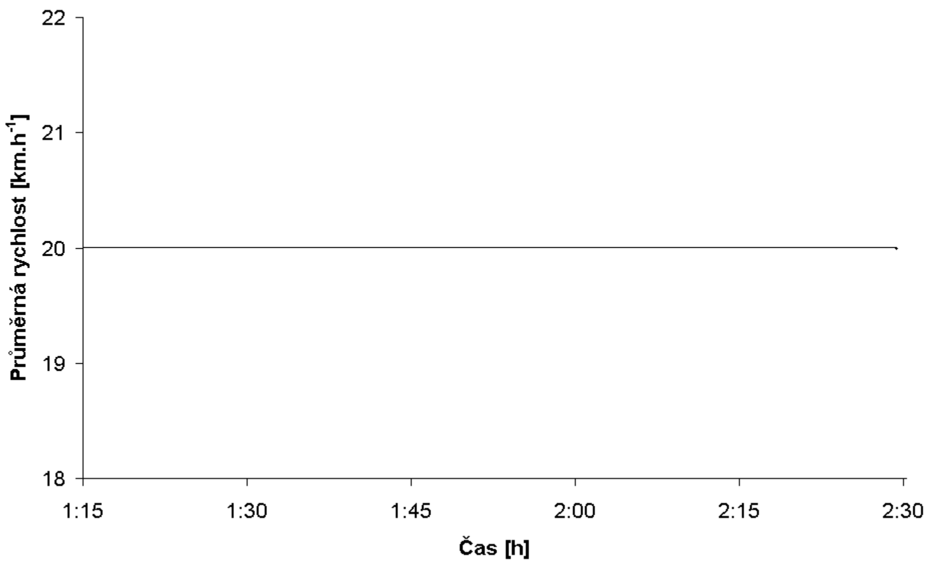
(c) Postupujeme stejně jako v části (c) úlohy č. 3. Platí

$$\langle v\rangle\,(t) = \frac{s\,(t_0) + v\cdot(t-t_0)}{t},$$

kde nyní $t_0 = 75'$, z grafu v zadání je $v = 20$ km.h^{-1} a po provedení příslušného výpočtu vychází $s\,(t_0) \doteq 25$ km. Přímým dosazením se zjistí, že

$$\langle v\rangle\,(75') \doteq 20\ \text{km.h}^{-1}, \quad \text{resp.} \qquad \langle v\rangle\,(150') \doteq 20\ \text{km.h}^{-1},$$

proto je hledaný graf závislosti průměrné velikosti rychlosti na čase takřka přímkou. Musíme si však uvědomit, že ve skutečnosti se průměrná velikost rychlosti s časem mění – v našem případě v desetinách kilometrů za hodinu. Protože ale z grafu v zadání čteme rychlosti s přesností kilometrů za hodinu, nemá smysl ani vypočtené hodnoty uvádět přesněji.



(d) Průměrná velikost rychlosti byla vypočtena již v předchozí části. Vychází

$$\langle v\rangle\,(150') \doteq 20\ \text{km.h}^{-1}.$$

Tento údaj je současně určen podílem celkové ujeté dráhy a celkové doby jízdy, a proto samozřejmě závisí také na dráze ujeté do okamžiku $t_0 = 75'$.

(e) Označme $\Delta\langle v\rangle = 5\ \mathrm{km.h^{-1}}$ zadanou změnu průměrné velikosti rychlosti za celý výlet, $v = 20\ \mathrm{km.h^{-1}}$ původní velikost rychlosti cyklisty v posledním úseku trasy a $\bar{v}$ hledanou velikost rychlosti cyklisty v posledním úseku trasy. Dále označme $t_0 = 75'$ a $t_\mathrm{c} = 150'$. Potom platí

$$\Delta\langle v\rangle + \frac{s\,(t_0) + v\cdot(t_\mathrm{c} - t_0)}{t_\mathrm{c}} = \frac{s\,(t_0) + \bar{v}\cdot(t_\mathrm{c} - t_0)}{t_\mathrm{c}},$$

odtud

$$\bar{v} = v + \frac{\Delta\langle v\rangle}{t_\mathrm{c} - t_0} t_\mathrm{c} = 30\ \mathrm{km.h^{-1}}.$$

Z průběhu výpočtu je patrné, že získaný údaj nezávisí na dráze, kterou cyklista ujel do okamžiku t_0.

Vzorové řešení úlohy č. 5 – prémiové

V úvodním textu k této sérii jsme předpokládali, že v každém okamžiku známe polohový vektor $\vec{r}\,(t)$ částice. Jeho prostřednictvím jsme definovali vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ a průměrnou rychlost $\langle\vec{v}\rangle$ částice v intervalu $[t, t+\Delta t]$ a konečně také okamžitou rychlost $\vec{v}\,(t)$ v okamžiku t. Velikost všech těchto vektorových veličin získáme tak, že sečteme druhé mocniny jejich složek a odmocníme.

K definici změny rychlosti, průměrného zrychlení a okamžitého zrychlení budeme přistupovat zcela analogicky, pouze zaměníme pojem „polohový vektor“ za pojem „rychlost“.

(a) Změna rychlosti částice v intervalu $[t, t+\Delta t]$ je určena vztahem

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t).$$

(b) Průměrné zrychlení v intervalu $[t, t+\Delta t]$ je

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

(c) Velikost průměrného zrychlení je dána velikostí vektoru $\langle\vec{a}\rangle$, tj.

$$\mid\langle\vec{a}\rangle\mid = \sqrt{\langle a_x\rangle^2 + \langle a_y\rangle^2 + \langle a_z\rangle^2},$$

kde $\langle a_x\rangle$, $\langle a_y\rangle$ a $\langle a_z\rangle$ jsou složky vektoru $\langle\vec{a}\rangle$ v dané kartézské soustavě souřadnic.

(d) Okamžité zrychlení je definováno vztahem

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\langle\vec{a}\rangle = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}\,(t+\Delta t) - \vec{v}\,(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

- Při rovnoměrném pohybu s nenulovým okamžitým zrychlením se mění směr vektoru okamžité rychlosti, ale nemění se jeho velikost. Vektor okamžitého zrychlení je potom v každém okamžiku kolmý k vektoru okamžité rychlosti. Typickým příkladem takového pohybu je rovnoměrný pohyb po kružnici.

- Při přímočarém pohybu s nenulovým okamžitým zrychlením se nemění směr vektoru okamžité rychlosti, ale mění se jeho velikost. Příkladem takového pohybu je volný pád.

- Je-li pohyb rovnoměrný a přímočarý, nemění se směr ani velikost vektoru okamžité rychlosti, a proto musí být vektor okamžitého zrychlení v každém okamžiku nulový.