Kapitola 1

Diferencovatelné variety

Tato kapitola pojednává o základních podkladových strukturách diferenciálního a integrálního počtu, takzvaných *diferencovatelných varietách*. Výklad je veden stručně, především formou matematických zápisů, bez podrobných slovních komentářů. Důkazy jednodušších tvrzení jsou přenechány čtenáři.

1.1 Topologie

Zavedení *topologie*, jakožto souboru podmnožin specifikovaných vlastností určité *nosné množiny* $\mathcal{X}$, je nezbytné zejména pro vymezení pojmu *okolí* obecného bodu $x \in \mathcal{X}$ a tím pro definici *spojitosti zobrazení* množin opatřených topologií.

Topologie na množině $\mathcal{X}$:

Libovolný systém $\tau = \{\mathcal{U}_\iota \mid \iota \in I, I \text{ indexová množina}\}$ *nosné* množiny $\mathcal{X}$, který má následující vlastnosti:

- **TOP 1:** $\emptyset \in \tau$, $\mathcal{X} \in \tau$
- **TOP 2:** $\bigcup_{\iota \in I'} \mathcal{U}_\iota \in \tau$ pro libovolnou podmnožinu $I' \subset I$ indexové množiny
- **TOP 3:** $\mathcal{U}_\iota, \mathcal{U}_\kappa \in \tau \Rightarrow \mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa \in \tau$ pro libovolné indexy $\iota, \kappa \in I$

Topologický prostor: Dvojice $(\mathcal{X}, \tau)$

Táž nosná množina, různé topologie $\Rightarrow$ různé topologické prostory. V následujících příkladech vždy ukažte, že se jedná o topologii na množině $\mathcal{X}$.

Příklad 1. *Triviální topologie:* $\tau = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$

Příklad 2. *Diskrétní topologie:* $\tau = 2^{\mathcal{X}}$

Příklad 3. *Přirozená topologie* $\tau_{\mathcal{R}^n}$ *v* $\mathcal{R}^n$: Soubor všech sjednocení kartézských součinů otevřených intervalů tvaru $(a^1, b^1) \times \ldots \times (a^n, b^n)$, $(a^i, b^i) \subset \mathcal{R}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, doplněný prázdnou množinou.

Příklad 4. $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$, $(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{R}^n$ je uspořádaná $n-$tice. *Otevřený kvádr* $\mathcal{K} = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{R}^n \mid a^i < x^i < b^i \, , \, i = 1, \ldots, n\}$. Dokažte, že $\tau = \{\mathcal{U} \subset \mathcal{R}^n \mid \forall x \in \mathcal{U} \, \exists \mathcal{K}_x : x \in \mathcal{K}_x \subset \mathcal{U}\}$ je topologie na $\mathcal{R}^n$ a že je totožná s topologií přirozenou.

Otevřená množina: $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{A} \in \tau$

Uzavřená množina: $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \setminus \mathcal{A} \in \tau$

Otevřené okolí bodu $x \in \mathcal{X}$: libovolná množina $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{A} \in \tau \ : \ x \in \mathcal{A}$

Existují podmnožiny množiny $\mathcal{X}$, které jsou současně otevřené i uzavřené? Uveďte příklady. Je odpověď závislá na volbě konrétní topologie?

Věta 1.1

Nechť $(\mathcal{X}, \tau)$ je topologický prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. Pak pro každý bod $x \in \mathcal{X}$ nastane právě jedna z možností:

- **X 1:** Existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x tak, že $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$.
- **X 2:** Existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu x tak, že $\mathcal{U} \subset (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A})$.
- **X 3:** Pro libovolné okolí $\mathcal{U}$ bodu x platí $\mathcal{U} \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$, $\mathcal{U} \cap (\mathcal{X} \setminus \mathcal{A}) \neq \emptyset$.

Vnitřek množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: $\mathrm{int}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} \mid \mathbf{X\ 1}\}$

Vnějšek množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: $\mathrm{ext}\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} \mid \mathbf{X\ 2}\}$

Hranice množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: $\partial\mathcal{A} = \{x \in \mathcal{X} \mid \mathbf{X\ 3}\}$

Uzávěr množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$: $\mathrm{cl}\,\mathcal{A} = \mathrm{int}\,\mathcal{A} \cup \partial\mathcal{A}$

Hausdorffovský topologický prostor: Pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ existují množiny $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \tau$ tak, že $x_1 \in \mathcal{U}_1$, $x_2 \in \mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset$

Příklad 5. $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2$, $\tau = \{\mathcal{U} \,|\, \mathcal{U} = \bigcup_{(a,b)} (a, b) \times \mathcal{R} \, , \, (a, b) \subset \mathcal{R}\}$. Je topologický prostor $(\mathcal{X}, \tau)$ hausdorffovský?

Indukovaná topologie:

- $(\mathcal{X}, \tau)$ topologický prostor, $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$
- $\tau_\mathcal{Y} = \{\mathcal{U} \cap \mathcal{Y} \mid \mathcal{U} \in \tau\}$ — Dokažte, že $\tau_\mathcal{Y}$ je topologií na množině $\mathcal{Y}$.

Topologický podprostor: $(\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$

Příklad 6. *Poloprostor v* $(\mathcal{R}^n, \tau_{\mathcal{R}^n})$: $(\mathcal{R}^n_+, \tau_{\mathcal{R}^n_+})$, $\mathcal{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{R}^n \mid x^n \geq 0\}$ s indukovanou topologií $\tau_{\mathcal{R}^n_+}$.

Metrika na množině $\mathcal{X}$:

Libovolné zobrazení $\varrho : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \ni (x_1, x_2) \to \varrho(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ s vlastnostmi

- **MET 1:** $\varrho(x_1, x_2) \geq 0$; rovnost nastane $\Leftrightarrow x_1 = x_2$ *pozitivní def.*
- **MET 2:** $\varrho(x_1, x_2) = \varrho(x_2, x_1)$ *symetrie*
- **MET 3:** $\varrho(x_1, x_3) \leq \varrho(x_1, x_2) + \varrho(x_2, x_3)$ *trojúhelníková nerovnost*

Poznámka: Vlastnost **MET 1** lze oslabit takto: **MET 1′:** $\varrho(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Dokažte, že nerovnost $\varrho(x_1, x_2) \geq 0$ je důsledkem **MET 1′**, **MET 2** a **MET 3**.

Příklad 7. $\mathcal{X} = \mathcal{R}^n$, $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{R}^n$ je uspořádaná $n-$tice. $\varrho(x_1, x_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_2^i - x_1^i)^2}$. Dokažte, že se jedná o metriku *(euklidovská metrika)* $\varrho_{\mathcal{R}^n}$.

Metrický prostor: Dvojice $(\mathcal{X}, \varrho)$

Topologie indukovaná metrikou:

- $(\mathcal{X}, \varrho)$ metrický prostor, $x_0 \in \mathcal{X}$ libovolný bod
- $\mathcal{S} = \{x \in \mathcal{X} \mid \varrho(x, x_0) < r,\ r \in \mathcal{R}\}$ *otevřená koule v* $\mathcal{X}$
- $\tau = \{\mathcal{U} \mid \forall x \in \mathcal{U}\, \exists \mathcal{S}_x :\ x \in \mathcal{S}_x \subset \mathcal{U}\}$ Dokažte, že τ je topologií na $\mathcal{X}$.

Euklidovská topologie: Topologie v $\mathcal{R}^n$ indukovaná euklidovskou metrikou. Dokažte, že euklidovská topologie je totožná s přirozenou topologií $\tau_{\mathcal{R}^n}$.

Báze topologie: Libovolný podsystém $\tau_0 = \{\mathcal{V}_\iota \mid \iota \in I'\} \subset \tau$ takový, že pro každou množinu $\mathcal{U} \in \tau$ existuje $J \subset I'$ tak, že $\mathcal{U} = \bigcup_{\iota \in J} \mathcal{V}_\iota$

Druhý axiom spočetnosti: Topologický prostor $(\mathcal{X}, \tau)$ tzv. splňuje druhý axiom spočetnosti, existuje-li spočetná báze jeho topologie.

Věta 1.2: Teorém o bázi topologie

Nechť $\mathcal{X}$ je množina a τ_0 systém jejích podmnožin. Na $\mathcal{X}$ existuje topologie τ s bází τ_0 právě tehdy, platí-li

- **B 1:** $\mathcal{X} = \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{U}_\iota$, $\mathcal{U}_\iota \in \tau_0$
- **B 2:** Pro libovolné množiny $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_0$ a libovolný bod $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ existuje $\mathcal{W} \in \tau_0$ tak, že $x \in \mathcal{W} \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$.

Důkaz:

- Nechť $(\mathcal{X}, \tau)$ je topologický prostor, τ_0 báze topologie τ. Nechť $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau_0$, $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$. τ_0 je báze topologie $\Rightarrow \exists (\mathcal{W}_\iota)_{\iota \in I}$, $\mathcal{W}_\iota \in \tau_0$: $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{\iota \in I} \mathcal{W}_\iota \Rightarrow \exists \kappa \in I$: $x \in \mathcal{W}_\kappa$. Označme $\mathcal{W} = \mathcal{W}_\kappa$.

- Nechť τ_0 má vlastnosti **B 1** a **B 2**. Označme $\tau = \emptyset \cup \{\bigcup_{\iota \in I'} \mathcal{U}_\iota \mid \mathcal{U}_\iota \in \tau_0,\ I' \subset I$ je libovolná $\}$.

Pak τ je hledaná topologie:
TOP 1: $\emptyset \in \tau$ podle definice, $\mathcal{X} \in \tau$ podle **B1**.
TOP 2: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \mathcal{U} = \bigcup_{\kappa \in K} \mathcal{U}_\kappa$, $\mathcal{V} = \bigcup_{\mu \in M} \mathcal{U}_\mu$; $\mathcal{U}_\kappa, \mathcal{U}_\mu \in \tau_0$, $K, M \subset I \Rightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} = (\bigcup_{\kappa \in K} \mathcal{U}_\kappa) \cup (\bigcup_{\mu \in M} \mathcal{U}_\mu) \Rightarrow \mathcal{U} \cup \mathcal{V} \in \tau$.
TOP 3: $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \tau \Rightarrow \forall x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}\ \exists \mathcal{W}_x : x \in \mathcal{W}_x \subset \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $\mathcal{W}_x \in \tau_0$ (podle **B2**). Pak $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \bigcup_{x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}} \mathcal{W}_x \in \tau$. $\diamondsuit$

Topologie na kartézském součinu topologických prostorů $(\mathcal{X}, \tau_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$:

$\tau_0 \equiv (\tau_\mathcal{X} \times \tau_\mathcal{Y})_0 = \{\mathcal{U} \times \mathcal{V} \mid \mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X},\ \mathcal{V} \in \tau_\mathcal{Y}\}$ Dokažte, že τ_0 je báze topologie na $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

Spojité zobrazení v bodě:

- $(\mathcal{X}, \tau_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, $x \in \mathcal{X}$
- Pro každou množinu $\mathcal{V} \in \tau_\mathcal{Y}$ obsahující $f(x)$ existuje množina $\mathcal{U} \in \tau_\mathcal{X}$ taková, že $x \in \mathcal{U}$, $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.

Homeomorfismus topologických prostorů:

Vzájemně jednoznačné a vzájemně spojité zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$.

Topologická ekvivalence: Topologické prostory $(\mathcal{X}, \tau_\mathcal{X})$, $(\mathcal{Y}, \tau_\mathcal{Y})$ jsou považovány za topologicky ekvivalentní, jsou-li homeomorfní, tj. existuje–li mezi nimi homeomorfismus.

Lokálně euklidovský prostor $(\mathcal{X}, \tau)$:

Každý bod $x \in \mathcal{X}$ má otevřené okolí homeomorfní s $\mathcal{R}^n$.

n–rozměrná topologická varieta: Hausdorffovský topologický prostor se spočetnou bází topologie lokálně homeomorfní s $\mathcal{R}^n$

Pozn.: Analogicky definujeme *n–rozměrnou topologickou varietu s okrajem:* Hausdofrrovský topologický prostor se spočetnou bází topologie lokálně homeomorfní s $\mathcal{R}^n_+$ ($\mathcal{R}^n_+ = \{(x^1, \ldots, x^n) \in \mathcal{R}^n \mid x^n \geq 0\}$).

Zjistěte, zda předchozí definici lze oslabit: Je možné na základě lokální homeomorfnosti $\mathcal{X}$ s $\mathcal{R}^n$ dokázat spočetnost báze toopologie resp. hausdorffovost?

Otevřené pokrytí množiny $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, ($(\mathcal{X}, \tau)$ je topologický prostor):

- $\mathcal{O} = \{\mathcal{U}_\iota \mid \mathcal{U}_\iota \in \tau,\ \iota \in I' \subset I\}$
- $\mathcal{A} = \bigcup_{\iota \in I'} \mathcal{U}_\iota$

Kompaktní množina:

Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, $(\mathcal{X}, \tau)$ topologický prostor. $\mathcal{A}$ se nazývá *kompaktní*, když pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{O}$ existuje konečné podpokrytí $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.

Dokažte: Množina $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^n$ ($\mathcal{R}^n$ s přirozenou topologií) je kompaktní právě tehdy, je-li omezená a uzavřená. Omezenost: $\exists$ otevřený kvádr $\mathcal{K} \in \tau \,:\, \mathcal{A} \subset \mathcal{K}$.

1.2 Struktura diferencovatelných variet

Strukturu diferencovatelné variety zavedeme připojením požadavku diferencovatelnosti souřadnicových přechodů mezi homeomorfismy, lokálně zobrazujícími topologickou varietu $(\mathcal{X},\tau)$ na $n-$rozměrný euklidovský prostor $(\mathcal{R}^n,\tau_{\mathcal{R}^n})$.

$\mathcal{R}^n-$atlas na $\mathcal{X}$:

Soubor dvojic $\mathcal{AT} = \{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota) \mid \iota \in I'\}$, $I' \subset I$ s vlastnostmi

- **AT 1:** Je-li $\mathcal{U}_\iota \in \tau$ pro $\iota \in I'$, pak $\bigcup_{\iota \in I'} \mathcal{U}_\iota = \mathcal{X}$.
- **AT 2:** Pro každý index $\iota \in I'$ je $\varphi_\iota : \mathcal{U}_\iota \to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota) \subset \mathcal{R}^n$ homeomorfismus množiny $\mathcal{U}_\iota$ na otevřenou množinu $\varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota)$ v $\mathcal{R}^n$, tj. $\varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota) \in \tau_{\mathcal{R}^n}$.
- **AT 3:** Pro libovolné indexy $\iota, \kappa \in I'$ je zobrazení $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa) \to$ $\to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa)$ *difeomorfismus* otevřených množin v $\mathcal{R}^n$, tj. $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}$ a $\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1}$ jsou diferencovatelná zobrazení třídy C^∞.

Lokální souřadnicový systém na $\mathcal{X}$:

$(\mathcal{U}, \varphi), \mathcal{U} \in \tau, \varphi : \mathcal{U} \to \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathcal{R}^n, \varphi(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, φ je homeomerfismus
Pro $x \in \mathcal{U}$ značíme $\varphi(x) = (x^1\varphi(x), \ldots, x^n\varphi(x))$, zkráceně $(x^1(x), \ldots, x^n(x))$, $x^1\varphi, \ldots, x^n\varphi$ jsou *souřadnicové funkce na $\mathcal{U}$*, zkráceně $\varphi = (x^1, \ldots . x^n)$.

Globální souřadnicový systém: Souřadnicový systém $(\mathcal{X}, \varphi)$

Transformace souřadnic:

Zobrazení $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(\mathcal{U}_\kappa) \to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota)$ (**AT 3**), značení $\varphi_\iota\varphi_\kappa^{-1}$. V souřadnicích $\varphi_\iota\varphi_\kappa^{-1}(x^1\varphi_\kappa, ..., x^n\varphi_\kappa) = (x^1\varphi_\iota\varphi_\kappa^{-1}(x^1\varphi_\kappa, ..., x^n\varphi_\kappa), ..., x^n\varphi_\iota\varphi_\kappa^{-1}(x^1\varphi_\kappa, ..., x^n\varphi_\kappa))$, zkráceně $(x_\iota^1, \ldots, x_\iota^n) = (x_\iota^1(x_\kappa^1, \ldots, x_\kappa^n), \ldots, x_\iota^n(x_\kappa^1, \ldots, x_\kappa^n))$.

Souřadnicový systém kompatibilní s atlasem:

$(\mathcal{U}, \varphi)$ na $\mathcal{X} \,:\, \overline{\mathcal{AT}} = \mathcal{AT} \cup (\mathcal{U}, \varphi)$ je $\mathcal{R}^n-$atlas na $\mathcal{X}$

Kompatibilní (ekvivalentní) atlasy:

Atlasy $\mathcal{AT}$ a $\overline{\mathcal{AT}}$ na $\mathcal{X}$, pro něž je $\mathcal{AT} \cup \overline{\mathcal{AT}}$ opět atlasem na $\mathcal{X}$

Diferencovatelná struktura:

Třída ekvivalence $\{\mathcal{AT}\}$, $\mathcal{AT}$ atlas na $\mathcal{X}$. Každá diferencovatelná struktura obsahuje právě jeden atlas $\mathcal{AT}_{max}$ takový, že $\mathcal{AT} \in \{\mathcal{AT}_{max}\} \Rightarrow \mathcal{AT} \subset \mathcal{AT}_{max}$.

n–rozměrná diferencovatelná (hladká) varieta (též pouze *varieta*):

Libovolná $n-$rozměrná topologická varieta $(\mathcal{X}, \tau)$ opatřená diferencovatelnou strukturou.

Věta 1.3

Na každé diferencovatelné varietě existuje spočetný atlas.

Důkaz. Důkaz tvrzení vyplývá přímo z existence spočetné báze topologie topologické variety. $\diamondsuit$

Příklad 8. *Diferencovatelná struktura na sféře.*

Nechť $\mathcal{S}^2 = \{x = (\xi(x), \eta(x), \zeta(x)) \in \mathcal{R}^3 \mid (\xi(x))^2 + (\eta(x))^2 + (\zeta(x))^2 = 1\}$ je topologický podprostor v $(\mathcal{R}^3, \tau_{\mathcal{R}^3})$ (topologie na $\mathcal{S}^2$ indukována topologií $\tau_{\mathcal{R}^3}$).

• **Kolmá projekce:**

$$\mathcal{U}_+ = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \xi(x) > 0\},\ \varphi_+(x) = (\eta(x), \zeta(x)) \quad \mathcal{U}_- = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \xi(x) < 0\},\ \varphi_-(x) = (\eta(x), \zeta(x))$$

$$\mathcal{V}_+ = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \eta(x) > 0\},\ \psi_+(x) = (\xi(x), \zeta(x)) \quad \mathcal{V}_- = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \eta(x) < 0\},\ \psi_-(x) = (\xi(x), \zeta(x))$$

$$\mathcal{W}_+ = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \zeta(x) > 0\},\ \chi_+(x) = (\xi(x), \eta(x)) \quad \mathcal{W}_- = \{x \in \mathcal{S}^2 \mid \zeta(x) < 0\},\ \chi_-(x) = (\xi(x), \eta(x))$$

Dokažte, že $\mathcal{AT} = \{(\mathcal{U}_+, \varphi_+), (\mathcal{U}_-, \varphi_-), (\mathcal{V}_+, \psi_+), (\mathcal{V}_+, \psi_+), (\mathcal{W}_+, \chi_+), (\mathcal{W}_-, \chi_-)\}$ je atlas na $\mathcal{S}^2$.

• **Stereografická projekce:**

$$\mathcal{U}_n = \mathcal{S}^2 - \{n\},\ n = (\xi(n), \eta(n), \zeta(n)) = (0, 0, 1),\ \sigma_n : \mathcal{U}_n \ni x \to \sigma_n(x) = \mathcal{R}^2_{\xi\eta} \cap \overline{nx}$$

$$\mathcal{U}_s = \mathcal{S}^2 - \{s\},\ s = (\xi(s), \eta(s), \zeta(s)) = (0, 0, -1),\ \sigma_s : \mathcal{U}_s \ni x \to \sigma_n(x) = \mathcal{R}^2_{\xi\eta} \cap \overline{sx}$$

$\mathcal{R}^2_{\xi\eta} = \{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathcal{R}^3 \mid \zeta = 0\}$ je *projekční rovina* a $\overline{nx}$ resp. $\overline{sx}$ jsou přímky spojující obecný bod x sféry se *severním* a *jižním pólem* n a s, takzvané *projekční paprsky*.

Dokažte, že $\overline{\mathcal{AT}} = \{(\mathcal{U}_n, \sigma_n), (\mathcal{U}_s, \sigma_s)\}$ je atlas na $\mathcal{S}^2$ a prověřte kompatibilitu s $\mathcal{AT}$.

Otevřená podvarieta $n-$rozměrné variety $\mathcal{X}$:

Nechť $\mathcal{A} = \{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota) \mid \iota \in I\}$ je atlas na $\mathcal{X}$ a nechť $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{W} \in \tau_{\mathcal{X}}$. Označme $\mathcal{A}_{\mathcal{W}} = \{(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{W}, \varphi_\iota|_{\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{W}}) \mid \iota \in I\}$.

Dokažte, že $\mathcal{A}_{\mathcal{W}}$ je atlasem na $\mathcal{W}$, takže se $\mathcal{W}$, spolu s diferencovatelnou strukturou tímto atlasem definovanou, stává $n-$rozměrnou diferencovatelnou varietou.

$m-$rozměrná podvarieta $\mathcal{X}$ $n-$rozměrné variety $\mathcal{Y}$:

Podmnožina $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ taková, že pro každý bod $x_0 \in \mathcal{X}$ existuje souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{A}_{\mathcal{Y}_{max}}$, $\varphi = (x^i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$ takový, že $x_0 \in \mathcal{U}$ a platí: $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X} \Rightarrow x^{m+1}\varphi(x) = \dots = x^n\varphi(x) = 0$

$\mathcal{R}^n_+$-atlas na $\mathcal{X}$:

Soubor dvojic $\mathcal{AT}_+ = \{(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota) \mid \iota \in I' \subset I\}$ s vlastnostmi

- **AT 1:** Je-li $\mathcal{U}_\iota \in \tau$ pro $\iota \in I'$, pak $\bigcup_{\iota \in I'} \mathcal{U}_\iota = \mathcal{X}$.
- **AT 2:** Pro každý index $\iota \in I'$ je $\varphi_\iota : \mathcal{U}_\iota \to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota) \subset \mathcal{R}^n$ homeomorfismus množiny $\mathcal{U}_\iota$ na otevřenou množinu $\varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota)$ v $\mathcal{R}^n_+$, tj. $\varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota) \in \tau_{\mathcal{R}^n_+}$.
- **AT 3:** Pro libovolné indexy $\iota, \kappa \in I'$ je zobrazení $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1} : \varphi_\kappa(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa) \to$ $\to \varphi_\iota(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_\kappa)$ *difeomorfismus* otevřených množin v $\mathcal{R}^n_+$, tj. $\varphi_\iota \circ \varphi_\kappa^{-1}$ a $\varphi_\kappa \circ \varphi_\iota^{-1}$ jsou diferencovatelná zobrazení třídy C^∞.

Dvojice $(\mathcal{U}_\iota, \varphi_\iota) \in \mathcal{AT}_+$ jsou *souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$*. Pojmy kompatibility a diferencovatelné struktury jsou zavedeny stejně jako výše.

$n-$rozměrná diferencovatelná varieta s okrajem

Libovolná $n-$rozměrná topologická varieta s okrajem $(\mathcal{X}, \tau)$ opatřená maximálním $\mathcal{R}^n_+$-atlasem (diferencovatelnou strukturou).

Poznámka: Diferencovatelností zobrazení definovaného na množině $\mathcal{A} \in \tau_{\mathcal{R}^n_+}$ se rozumí existence jeho diferencovatelného prodloužení na množinu $\mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$.

Věta 1.4

Na každé varietě s okrajem existuje spočetný $\mathcal{R}^n_+-$atlas.

Vnitřní bod variety: $x \in \mathcal{X}$, pro který $\exists(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT}_{max}$ tak, že $x \in \mathcal{U}$, $\varphi(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{R}^n}$

Okrajový bod variety: $x \in \mathcal{X}$, který není vnitřním bodem

Okraj variety: $\partial\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{X} \mid x \text{ je okrajový bod } \mathcal{X}\}$

Věta 1.5

Okraj $\partial\mathcal{X}$ $n-$rozměrné variety $\mathcal{X}$ s okrajem je $(n-1)-$rozměrná varieta.

Důkaz:

Nechť $x_0 \in \partial\mathcal{X}$. Pak $\exists\,(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi = (x^1\varphi,\ldots,x^n\varphi)$, $x_0 \in \mathcal{U} : \varphi(x_0) = \{0_{\mathcal{R}^n}\}$, $\varphi(\mathcal{U}) \in \tau_{\mathcal{R}^n_+}$, ale $\varphi(\mathcal{U}) \not\in \tau_{\mathcal{R}^n} \Rightarrow$ pro $\forall\, x \in \mathcal{U}\cap\partial\mathcal{X}$ je $x^n(x) = 0 \Rightarrow \mathcal{U}\cap\partial\mathcal{X} = \{x \in \mathcal{U} \mid x^n(x) = 0\}$. Označme $(\mathcal{U}\cap\partial\mathcal{X},\psi)$, $\psi : \mathcal{U}\cap\partial\mathcal{X} \ni x \to \psi(x) = (x^1\varphi(x),\ldots,x^{n-1}\varphi(x)) \in \mathcal{R}^{n-1}$. Soubor takto získaných dvojic $\{(\mathcal{U}\cap\partial\mathcal{X},\psi)\}$ je atlas na $\partial\mathcal{X}$ (dokažte). $\diamondsuit$

Zobecněte pojem podvariety na podvarietu variety s okrajem. Dokažte, že okraj $n-$rozměrné variety s okrajem je její $(n-1)-$rozměrnou podvarietou.

Věta 1.6: Teorém o diferencovatelné struktuře

Nechť $\mathcal{X}$ je množina, $\mathcal{X} \neq \emptyset$ a nechť $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_i) \mid i \in I\}$, kde $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{X}$, $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \varphi_i(\mathcal{U}_i)$, je spočetný systém s vlastnostmi

- **DIF 1:** $\cup_{i\in I}\mathcal{U}_i = \mathcal{X}$
- **DIF 2:** Pro libovolné dva body $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, $x_1 \neq x_2$, existují indexy i,k a množiny $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{X}$ takové, že platí $x_1 \in \mathcal{V}_1 \subset \mathcal{U}_i$, $x_2 \in \mathcal{V}_2 \subset \mathcal{U}_k$, $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \emptyset$, $\varphi(\mathcal{V}_1)$, $\varphi(\mathcal{V}_2) \in \tau_{\mathcal{R}^n}$.
- **DIF 3:** $\varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k) \in \tau_{\mathcal{R}^n}$ pro libovolné indexy $i,k \in I$
- **DIF 4:** $\varphi_i\varphi_k^{-1} : \varphi_k(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k) \to \varphi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_k)$ jsou difeomorfismy

Pak na $\mathcal{X}$ existuje jediná topologie a diferencovatelná struktura taková, že $\{(\mathcal{U}_i,\varphi_\iota),\ i \in I\}$ je atlas na $\mathcal{X}$.

Důkaz:

Na základě předpokladů věty zkonstruujeme bázi τ_0 hledané topologie $\tau_{\mathcal{X}}$. Označme $\mathcal{V} = \varphi_i^{-1}(\mathcal{A})$ pro každou množinu $\mathcal{A} \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, pro kterou existuje index $i \in I$ takový, že $\mathcal{A} \subset \varphi_i(\mathcal{U}_i)$. Systém $\tau_0 = \{\mathcal{V}\}$ je bází jisté topologie na $\mathcal{X}$. Skutečně, nechť $\mathcal{V}_1$, $\mathcal{V}_2 \in \tau_0$ a $x \in \mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$. Pak (plyne z konstrukce systému τ_0) existují indexy i,k tak, že $x \in \mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_k$, $\varphi_i(\mathcal{V}_1) \subset \varphi_i(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_k)$, $\varphi_k(\mathcal{V}_2) \subset \varphi(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_k)$. Označme $\mathcal{A}_1 = \varphi_i(\mathcal{V}_1)\cap\varphi_i(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_k)$, $\mathcal{A}_2 = \varphi_k(\mathcal{V}_2)\cap\varphi_k(\mathcal{U}_i\cap\mathcal{U}_k)$. Zřejmě platí $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, $\varphi_i(x) \in \mathcal{A}_1$, $\varphi_k(x) \in \mathcal{A}_2$. Vzhledem k **DIF 4** existují množiny $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2 \in \tau_{\mathcal{R}^n}$ takové, že $\mathcal{B}_2 = \varphi_k\varphi_i^{-1}(\mathcal{B}_1)$, $\varphi_i(x) \in \mathcal{B}_1$, $\varphi_k(x) \in \mathcal{B}_2$. Označme $\mathcal{W} = \varphi_k^{-1}(\mathcal{B}_2) = \varphi_i^{-1}(\mathcal{B}_1)$. Platí tedy $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}_1\cap\mathcal{V}_2$. Podle věty 1.2 je systém τ_0 bází jisté toplogie $\tau_{\mathcal{X}}$ na $\mathcal{X}$. $\diamondsuit$

Dále ukažte, že zobrazení $\varphi_i : \mathcal{U}_i \to \varphi_i(\mathcal{U}_i)$, $i \in I$, jsou vzhledem k $\tau_{\mathcal{X}}$ homeomorfismy a že vlastnost **DIF 2** zaručuje, že topologický prostor $(\mathcal{X},\tau_{\mathcal{X}})$ je hausdorffovský. Nakonec ukažte, že zkonstruovaná topologie $\tau_{\mathcal{X}}$ je jednoznačná (jiná volba topologie je v rozporu s předpoklady věty).

1.3 Podvariety v euklidovských prostorech

Diferencovatelnou varietu $(\mathcal{R}^n,\tau_{\mathcal{R}^n})$ s atlasem $\mathcal{A}_{\mathcal{R}^n} = \{(\mathcal{U}, id_{\mathcal{R}^n})\}$, $\mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, dále označujeme jen $\mathcal{R}^n$.

Příklad 9. Nechť $\mathcal{Y} = (\mathcal{R}^2, \tau_{\mathcal{R}^2})$, $\mathcal{X} = \{x = (x^1, x^2) \in \mathcal{Y} \,|\, x^2 = |x^1|, x^1 \in (-1,1)\}$, kde (x^1, x^2) jsou standardní souřadnice na $\mathcal{R}^2$. Pak $\mathcal{A}_{\mathcal{X}} = \{(\mathcal{X}, \varphi)\}$, $\varphi(x) = x^1 \in \mathcal{R}^1$, je atlas na $\mathcal{X}$ (určený globálním souřadnicovým systémem). $\mathcal{X}$ je tedy jednorozměrná diferencovatelná varieta. $\mathcal{X}$ však není jednorozměrnou podvarietou variety $\mathcal{Y}$. Skutečně, zvolme na $\mathcal{Y}$ například atlas $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}} = \{(\mathcal{U}_\iota, id_{\mathcal{U}_\iota}) \mid \iota \in I\}, \mathcal{U}_\iota \in \tau_{\mathcal{R}^2}$, $id_{\mathcal{U}_\iota}(x) = (x^1, x^2)$. Tento atlas definuje na $\mathcal{Y}$, po doplnění všemi kompatibilními souřadnicovými systémy, diferencovatelnou strukturu $(\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})_{max}$. Pro bod $x_0 = (0,0) \in \mathcal{Y}$ nelze najít souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi) \in (\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})_{max}$, splňující podmínky definice podvariety. Žádný souřadnicový systém $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$, $\overline{\mathcal{U}} \in \tau_{\mathcal{R}^2}$, $\overline{\varphi}(x) = (\overline{x}^1\overline{\varphi}(x), \overline{x}^2\overline{\varphi}(x))$, pro který $x_0 \in \overline{\mathcal{U}}$ a $\overline{x}^2\overline{\varphi}(x) = \overline{x}^2\overline{\varphi}(x^1, |x^1|) = 0$ pro libovolný bod $x \in \overline{\mathcal{U}} \cap \mathcal{X}$, nebude totiž kompatibilní se zvoleným atlasem $\mathcal{A}_{\mathcal{Y}}$. Dokážeme to sporem: Nechť $(\overline{\mathcal{U}}, \overline{\varphi})$ je takový souřadnicový systém, zvolený navíc tak, že $\overline{\varphi}(x_0) = (0,0)$. Nechť $(\mathcal{U}, id_{\mathcal{U}}) \in (\mathcal{A}_{\mathcal{Y}})_{max}$. Pak zobrazení $id_{\mathcal{U}}(\overline{\varphi})^{-1} : \overline{\varphi}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}}) \to id_{\mathcal{U}}(\mathcal{U} \cap \overline{\mathcal{U}})$ není diferencovatelné. Neexistuje totiž

$$\frac{\partial x^2 id_{\mathcal{U}}(\overline{\varphi})^{-1}(\overline{x}^1, 0)}{\partial \overline{x}^1} = \frac{\partial x^2(0,0)}{\partial \overline{x}^1},$$

neboť je $x^2(\overline{x}^1, 0) > 0$ pro lib. $(\overline{x}^1, 0) \in \overline{\varphi}(\overline{\mathcal{U}} \cap \mathcal{X})$. Proto $\lim_{\overline{x}^1 \to 0^+} \frac{x^2(\overline{x}^1,0)}{\overline{x}^1} \neq \lim_{\overline{x}^1 \to 0^-} \frac{x^2(\overline{x}^1,0)}{\overline{x}^1}$.

Věta 1.7

Nechť $\mathcal{X}$ je $m-$rozměrná podvarieta v $\mathcal{R}^n$. Nechť pro $\forall x \in \mathcal{X}$ je $(\mathcal{U}_x, \varphi_x) \in \mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ souřadnicový systém s vlastností $(x^{m+1}\varphi_x(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{X}), \ldots, x^n\varphi_x(\mathcal{U}_x \cap \mathcal{X})) = \{0_{\mathcal{R}^{m-n}}\}$. Pak zobrazení $\varphi_x : \mathcal{U}_x \to \varphi_x(\mathcal{U}_x)$ a $\varphi_x^{-1} : \varphi_x(\mathcal{U}_x) \to \mathcal{U}_x$ jsou diferencovatelná.

Důkaz:

Tvrzení je přímým důsledkem požadavku, aby zobrazení $\varphi_x id_{\mathcal{U}_\iota}^{-1} : id_{\mathcal{U}_\iota}(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_x) \to \varphi_x(\mathcal{U}_\iota \cap \mathcal{U}_x)$ bylo difeomorfismem otevřených podmnožin v $\mathcal{R}^n$. $\diamondsuit$

Věta 1.8: Konstrukce podvariet v $\mathcal{R}^n$ pomocí rovnic

Nechť $\mathcal{A} \subset \mathcal{R}^n$, $\mathcal{A} \in \tau_{\mathcal{R}^n}$ a $G : \mathcal{A} \to \mathcal{R}^{n-m}$ diferencovatelná funkce s Jacobiho maticí $DG(x)$ hodnosti $(n-m)$ ve všech bodech množiny $\mathcal{X} = G^{-1}(\{0\})$. Pak $\mathcal{X}$ je $m-$rozměrná podvarieta v $\mathcal{R}^n$.

Důkaz:

Nechť $x_0 \in \mathcal{X}$ a nechť v matici $DG(x_0)$ je například det $\left(\frac{\partial G^i}{\partial x^j}\right) \neq 0$ pro $i \in \{1, ..., n-m\}, j \in \{m+1, ..., n\}$; $(x^1, \ldots, x^n)$ jsou standardní souřadnice na $\mathcal{R}^n$. Definujme zobrazení

$$\chi(x^1, \ldots, x^n) = (x^1, \ldots, x^m, G^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, G^{n-m}(x^1, \ldots, x^n)).$$

Platí det$D\chi(x_0) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathcal{U} \in \tau_{\mathcal{R}^n}$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}$ tak, že $x_0 \in \mathcal{U}$ a $\chi|_{\mathcal{U}}$ je difeomorfismus. $(\mathcal{U} \cap \mathcal{X}, \chi|_{\mathcal{U} \cap \mathcal{X}})$ je souřadnicový systém na $\mathcal{X}$. Pak pro každý bod $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{X}$ je $\chi(x) = (x^1, \ldots, x^m, 0 \ldots, 0)$. $\mathcal{X}$ tedy vyhovuje definici $m-$rozměrné podvariety v $\mathcal{R}^n$. $\diamondsuit$

Příklad 10. *$n-$rozměrná sféra v $\mathcal{R}^{n+1}$*: $G : \mathcal{A} \ni (x^1, .., x^n) \to G(x^1, .., x^n) = (x^1)^2 + .. + (x^n)^2 - R^2 \in \mathcal{R}$.

1.4 Diferencovatelná zobrazení variet

Diferencovatelné zobrazení variet:

Zobrazení $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ takové, že pro každý bod $x \in \mathcal{X}$ existuje souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT_X}$ a souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AT_Y}$ tak, že platí:

- $x \in \mathcal{U}$, $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$
- zobrazení $\psi f \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{V})$ je diferencovatelné (tzv. *souřadnicová reprezentace zobrazení f*)

Difeomorfismus variet:

Vzájemně jednoznačné a vzájemně $C^\infty-$diferencovatelné zobrazení $\mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

(Globálně) difeomorfní variety:

Existuje jejich difeomorfismus. Stejná dimenze.

Lokálně difeomorfní variety:

- $\forall x \in \mathcal{X}$ a $\forall \in \mathcal{Y}\, \exists (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT_X}$, $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AT_Y} : x \in \mathcal{U}$, $y \in \mathcal{V}$
- $\varphi(\mathcal{U}) = \psi(\mathcal{V}) = \mathcal{R}^n$
- $\psi\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \psi(\mathcal{V})$ je difeomorfismus

Věta 1.9

Každé dvě $n-$rozměrné variety $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou lokálně difeomorfní.

Příklad 12. Přímka a kružnice jsou lokálně difeomorfní, nejsou však difeomorfní globálně. Kružnice a elipsa jsou (globálně) difeomorfní (zkonstruujte nějaký jejich difeomorfismus.)

Poznámka: Dvě difeomeorfní diferencovatelné variety jsou považovány za ekvivalentní, podobně jako jsou dvě homeomorfní topologické variety považovány za topologicky ekvivalentní. Každý difeomorfismus je však současně homeomorfismem, tj. ekvivalentní diferencovatelná struktura $\Rightarrow$ topologická ekvivalence. Opačné tvrzení platí jen pro dimenzi $n \leq 3$. Pro $n \geq 4$ je možné, aby na jedné a téže topologické varietě bylo zavedeno více (nekompatibilních) atlasů, tj. různých diferencovatelných struktur. Například $\mathcal{R}^4$ připouští nekonečně mnoho diferencovatelných struktur, na $\mathcal{S}^7 \subset \mathcal{R}^8$ lze zavést 28 diferencovatelných struktur.

Lieova grupa:

Každá varieta $\mathcal{G}$ s grupovou operací $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \ni (g_1, g_2) \to g_1.g_2 \in \mathcal{G}$: zobrazení $(g_1, g_2) \to g_1.g_2$, $g \to g^{-1}$ jsou diferencovatelná

Příklad 11. *Úplná lineární grupa prostoru* $\mathcal{R}^n$

$\mathcal{GL}_n$ =grupa všech regulárních matic řádu n s grupovou operací násobení matic. Základní varieta: $\mathcal{R}^{n^2} \setminus \{M \,|\, det(M) = 0\}$. Atlas: $\{(\mathcal{GL}_n, \varphi)\}$ globální atlas, $\varphi : \mathcal{GL}_n \to \mathcal{R}^{n^2}$, $M = (x_{ij}(M))_{i,j \in \{1,\ldots,n\}}$,

$$\varphi(M) = (x_{11}(M), \ldots, x_{1n}(M), x_{21}(M), \ldots, x_{2n}(M), \ldots, x_{n1}(M), \ldots, x_{nn}(M)) \in \mathcal{R}^{n^2}.$$

Dokažte požadovanou diferencovatelnost zobrazení $(g_1, g_2) \to g_1.g_2$, $g \to g^{-1}$.

Kapitola 2

Algebra tenzorů

Tato kapitola předkládá, po stručném souhrnu potřebných základních pojmů algebry vektorových prostorů, definici tenzorových prostorů konstruovaných nad vektorovým prostorem $\mathcal{V}$ konečné dimenze, založenou na představě tenzorů jako multilineárních zobrazení operujících na vektorových argumentech z prostoru $\mathcal{V}$ a duálního prostoru $\mathcal{V}^*$. Tento způsob konstrukce pojmu tenzoru je z hlediska praktických výpočtů nejúčinnější. Kromě standardních operací vytvářejících na množinách tenzorů strukturu vektorového prostoru jsou zavedeny další operace potřebné pro tenzorovou analýzu a fyzikální aplikace. Jiné možné definice jsou s touto ekvivalentní, prostory tenzorů téhož typu definované ekvivalentními způsoby jsou kanonicky izomorfní, tj. totožné z hlediska jak algebraické struktury, tak transformačních vlastností při přechodech mezi bázemi.

2.1 Vektorový prostor a duální prostor

Vektorový prostor:

Značení: $\mathcal{V}(n, \mathcal{K})$ je vektorový prostor *dimenze n nad polem skalárů $\mathcal{K}$*, nejčastěji $\mathcal{K} = \mathcal{R}$, zjednodušené značení: $\mathcal{V}$ (jsou-li dimenze a pole skalárů zřejmé z kontextu)

Báze vektorového prostoru:

Každý maximální lineárně nezávislý systém $(e_1, \ldots, e_n)$ prvků prostoru $\mathcal{V}(n, \mathcal{K})$.

Lineární zobrazení vektorových prostorů:

Zobrazení $f : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{W}(m, \mathcal{K})$ s vlastností $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$

pro libovolné vektory $a, b \in \mathcal{V}(n, \mathcal{K})$ a libovolné skaláry $\alpha, \beta \in \mathcal{K}$

Lineární funkce (forma): Lineární zobrazení $g : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{K}$

Obraz lineárního zobrazení: $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathcal{V}) = \{b \in \mathcal{W} \mid \exists a \in \mathcal{V} : \ f(a) = b\}$

Jádro lineárního zobrazení: $\mathrm{Ker}\,(f) = f^{-1}(0_{\mathcal{W}}) = \{a \in \mathcal{V} \mid f(a) = 0_{\mathcal{W}}\}$

Izomorfismus vektorových prostorů:

Bijektivní lineární zobrazení $\iota : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Vektorové prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ nad polem $\mathcal{K}$ jsou izomorfní, právě když mají stejnou dimenzi. Dokažte.

Doplněk vektorového podprostoru $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{V}$:

Vektorový podprostor $\mathcal{L}' \subset \mathcal{V}$, pro který $\mathcal{L}' + \mathcal{L} = \mathcal{V}$, $\mathcal{L}' \cap \mathcal{L} = \{0_{\mathcal{V}}\}$. Značíme $\mathcal{L}' \oplus \mathcal{L} = \mathcal{V}$. Přitom $\mathcal{L} + \mathcal{L}' = \{c = a + b \mid a \in \mathcal{L},\ b \in \mathcal{L}'\}$.

Vlastnosti doplňků: Dokažte.

- Doplněk není určen jednoznačně.
- $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{L}' = \dim \mathcal{V}$
- Každý vektor $a \in \mathcal{V}$ má jednoznačný rozklad $a = a_{\mathcal{L}} + a_{\mathcal{L}'}, a_{\mathcal{L}} \in \mathcal{L}, a_{\mathcal{L}'} \in \mathcal{L}'$.

Věta 2.1

Nechť $f : \mathcal{V}(n, \mathcal{K}) \to \mathcal{W}(m, \mathcal{K})$ je lineární zobrazení. Pak $\mathrm{Im}\,(f)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{W}$, $\mathrm{Ker}\,(f)$ je vektorovým podprostorem ve $\mathcal{V}$ a platí $\dim \mathrm{Im}\,(f) + \dim \mathrm{Ker}\,(f) = n$. Dokažte.

Hodnost a defekt lineárního zobrazení: $h = \dim \mathrm{Im}\,(f)$, $d = \dim \mathrm{Ker}\,(f)$

Duální prostor prostoru $\mathcal{V}$*:*

- $\mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*(n, \mathcal{K}) = \{f : \mathcal{V} \to \mathcal{K} \mid f \text{ je lineární}\}$ (f je *lineární forma*)
- Struktura vektorového prostoru zavedená standardním způsobem: $f,\ g \in \mathcal{V}^*$, $\alpha \in \mathcal{K}$, $(f + g)(a) = f(a) + g(a)$, $(\alpha f)(a) = \alpha f(a)\ \forall a \in \mathcal{V}$
  Dokažte, že $f + g, \alpha f \in \mathcal{V}^*$.

Duální báze:

$(e^1, \ldots, e^n)$, $e^i \in \mathcal{V}^*, i \in \{1, \ldots, n\} : \ e^i(e_j) = \delta^i_j\ \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$
Dokažte, že soubor lineárních zobrazení $(e^1, \ldots, e^n)$ je bází v prostoru $\mathcal{V}^*$.

Přechody mezi bázemi:

- $(e_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$, $(\overline{e}_i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ dvě báze ve $\mathcal{V}$, matice přechodu $A = (A^i_j)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$, $B = A^{-1} = (B^i_j)_{i,j\in\{1,\dots,n\}}$
- $\overline{e}_i = A^j_i e_j$, $e_i = B^j_i \overline{e}_j \Rightarrow \overline{e}^i = B^i_j e^j$, $e^i = A^i_j \overline{e}^j$

Najděte transformační vztahy pro složky vektoru $a = \alpha^i e_i = \overline{\alpha}^i \overline{e}_i$. Dokažte transformační vlastnosti duální báze a najděte transformační vztahy pro složky lineární formy $f = f_i e^i = \overline{f}_i \overline{e}^i$.

Duální (vnitřní) součin: Zobrazení

$< \mid >: \mathcal{V}^* \times \mathcal{V} \ni (f, a) \to < f \mid a > = f(a) \in \mathcal{K}$. Platí $< f_i e^i \mid \alpha^j e_j > = f_i \alpha^i$.

Věta 2.2

Nechť $\mathcal{L} \subset \mathcal{V}$ je vektorový podprostor dimenze k a $(e_1, \dots, e_k)$ jeho báze. Označme $\mathcal{L}^*$ duální prostor k $\mathcal{L}$. (Prostor $\mathcal{L}^*$ je generován souborem lineárních forem $(e^1, \dots, e^k)$. Pak $\mathcal{L}^\perp = \{a \in \mathcal{V} \mid < f \mid a > = 0_\mathcal{V}\ \forall f \in \mathcal{L}^*\}$ je doplněk podprostoru $\mathcal{L}$ ve $\mathcal{V}$ (tzv. doplněk *generovaný duálním součinem*). Dokažte.

Pullback f^* :

Nechť $f : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ je lineární zobrazení, $g : \mathcal{W} \to \mathcal{K}$ lineární funkce. Zobrazení $f^* : \mathcal{W}^* \ni g \to f^* g \in \mathcal{V}^*$ definujeme vlastností $f^* g(a) = g(f(a))\ \forall a \in \mathcal{V}$.

Operace $g\,(\,,)$:

Nechť $g : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ je libovolný izomorfismus, tj. $g(a) \in \mathcal{V}^*\ \forall a \in \mathcal{V}$. Definujeme $g\,(\,,) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \ni (a, b) \to g(a, b) = < g(a) \mid b > \in \mathcal{K}$.
Platí $g(a, b) = < g(\alpha^i e_i) \mid \beta^j e_j > = < \alpha^i g_{ik} e^k \mid \beta^j e_j > = g_{ij} \alpha^i \beta^j$.

Skalární součin:

Symetrická a pozitivně definitní operace $g(\,,)$ tj.

- $g(a, b) = g(b, a)$
- $g(a, a) \geq 0$, rovnost $\Leftrightarrow a = 0_\mathcal{V}$

Poznámka: Prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}^*$ jsou stejné dimenze a jsou tedy izomorfní (najděte alespoň jeden izomorfismus). Vzhledem k různým transformačním vlastnostem při přechodech mezi bázemi však jejich izomorfismus není tzv. *kanonický*.

2.2 Tenzorové prostory

Prostor tenzorů $\mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$ typu (p,q) nad $\mathcal{V}(n,\mathcal{K}) = \mathcal{V}$:

- Prostor zobrazení

$$\tau : \underbrace{\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*}_{p-krát} \times \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{q-krát} \ni (\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) \to$$

$$\to \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) \in \mathcal{K}$$

lineárních ve všech vektorových argumentech $(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$

- Struktura vektorového prostoru zavedena standardním způsobem:

$$(\tau + \sigma)(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) =$$

$$\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) + \sigma(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

$$(\alpha\tau)(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \alpha\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

$$\forall \tau,\ \sigma \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V}),\ \forall \alpha \in \mathcal{K}$$

Platí $\tau + \sigma,\ \alpha\tau \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$, $\dim \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V}) = n^{p+q}$. Dokažte.

Tenzor $(p+q)-$tého řádu $p-$krát kontravariantní a $q-$krát kovariantní:

Prvek $\tau \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{V})$, zkrácené značení $\mathcal{T}^p_q$

Tenzorový součin tenzorů:

Nechť $\mu \in \mathcal{T}^p_q$, $\nu \in \mathcal{T}^r_s$. Zobrazení $\tau : (\mathcal{V}^* \times \cdots \times \mathcal{V}^*)_{p+r} \times (\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V})_{q+s} \to \mathcal{R}$,

$$\tau(\omega_1, \ldots \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_{p+r}; \xi_1, \ldots, \xi_q, \xi_{q+1}, \ldots, \xi_{q+s}) =$$

$$= \mu(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)\nu(\omega_{p+1} \ldots \omega_{p+r}; \xi_{q+1} \ldots \xi_{q+s})$$

je prvkem prostoru $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}$. Dokažte.

Vlastnosti tenzorového součinu: Dokažte.

- $\mu \otimes (\nu_1 + \nu_2) = \mu \otimes \nu_1 + \mu \otimes \nu_2$, $(\mu_1 + \mu_2) \otimes \nu = \mu_1 \otimes \nu + \mu_2 \otimes \nu$
- $\mu \otimes (\alpha\nu) = (\alpha\mu) \otimes \nu = \alpha\mu \otimes \nu$
- $\mu \otimes (\nu \otimes \chi) = (\mu \otimes \nu) \otimes \chi \Rightarrow$ značení $\mu \otimes \nu \otimes \chi$

Indukovaná báze:

- $(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q})_{i_1,\ldots,i_p,j_1,\ldots,j_q \in \{1,\ldots,n\}}$ Dokažte, že jde o bázi v $\mathcal{T}^p_q$.
- $\tau = \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_q}$

Příklad 1. Nechť $(e_1, \dots, e_n)$, $(\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n)$ jsou dvě báze prostoru $\mathcal{V}$, A nechť je matice přechodu, tj. $\overline{e}_i = A_i^k e_k$, $B = A^{-1}$. Nechť $\tau \in \mathcal{T}_q^p$. Dokažte následující transformační vztahy pro tenzor τ:

$$\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = A_{j_1}^{l_1} \dots A_{j_q}^{l_q} B_{k_1}^{i_1} \dots B_{k_p}^{i_p} \tau_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p} .$$

Příklad 2. Dvojice $((e_i), (\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}))$, $((\overline{e}_i), (\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p}))$, $1 \leq i, i_1, \dots, i_p, j_1, \dots j_q \leq n$, kde (e_i), $(\overline{e}_i)$ jsou báze ve $\mathcal{V}$ a $(\tau_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$, $(\overline{\tau}_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p})$ soubory čísel, nazveme ekvivalentními, existuje-li regulární matice A s inversní maticí B tak, že platí vztahy z Příkladu 1. Dokažte, že faktorová množina se strukturou vektorového prostoru zavedenou standardním způsobem (sčítání a násobení skalárem po složkách) je kanonicky izomorfní (kanonicky identická) s $\mathcal{T}_q^p$. Zkonstruujte jiné definice prostorů kanonicky identických s $\mathcal{T}_q^p$.

Tenzorový součin tenzorových prostorů:

$$\mathcal{T}_q^p \otimes \mathcal{T}_s^r = ||e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} \otimes e_{k_1} \otimes \dots \otimes e_{k_r} \otimes e^{l_1} \otimes \dots \otimes e^{l_s}|| = \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$$

Poznámka: Pro libovolné $\mu \in \mathcal{T}_q^p$, $\nu \in \mathcal{T}_s^r$ je součin $\mu \otimes \nu \in \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$, ale prvky $\eta \in \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$ nejsou obecně tvaru $\mu \otimes \nu$, $\mu \in \mathcal{T}_q^p$, $\nu \in \mathcal{T}_s^r$. Najděte příklady. Dokažte, že skutečně platí $\mathcal{T}_q^p \otimes \mathcal{T}_s^r = \mathcal{T}_{q+s}^{p+r}$.

2.3 Symetrizace a antisymetrizace

Symetrizace a antisymetrizace lineárně zobrazují prostor tenzorů typu (p, q) na podprostory tenzorů téhož typu, které vykazují vždy určitý typ záměnnosti pořadí vektorových argumentů.

Symetrizace v $\alpha-$tém a $\beta-$tém horním (dolním) indexu:

- $S^{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S^{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$S^{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_\alpha \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) +$$
$$+ \tau(\omega_1, \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_\alpha, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)]$$

- $S_{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S_{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$S_{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_\beta, \dots, \xi_q) +$$
$$+ \tau(\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_\beta, \dots, \xi_\alpha, \dots, \xi_q)]$$

Antisymetrizace v $\alpha-$tém a $\beta-$tém horním (dolním) indexu:

- $A^{\alpha\beta} : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to S^{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}_q^p$:

$$A^{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \dots, \omega_\alpha \dots, \omega_\beta, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q) -$$

$$-\tau(\omega_1, \ldots, \omega_\beta, \ldots, \omega_\alpha, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q)]$$

- $A_{\alpha\beta} : \mathcal{T}^p_q \ni \tau \to A_{\alpha\beta}\tau \in \mathcal{T}^p_q$:

$$A_{\alpha\beta}\tau = \frac{1}{2}[\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_\alpha, \ldots, \xi_\beta, \ldots, \xi_q) -$$
$$-\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_\beta, \ldots, \xi_\alpha, \ldots, \xi_q)]$$

Tenzor symetrický (antisymetrický) v horních resp. dolních indexech α, β:

- $\tau = S^{\alpha\beta}\tau$, resp. $\tau = S_{\alpha\beta}\tau$
- $\tau = A^{\alpha\beta}\tau$, resp. $\tau = A_{\alpha\beta}\tau$

Příklad 3. Dokažte, že symetrický tenzor v indexech α, β má složky invariantní vůči záměně indexů na $\alpha-$té a $\beta-$té pozici, zatímco složky antisymetrického tenzoru při takové záměně změní znaménko. Jaký vztah platí pro složky antisymetrického tenzoru, které mají index na $\alpha-$té a $\beta-$té pozici stejný? Dokažte, že množiny symetrických a antisymetrických tenzorů (v α-tém a $\beta-$tém horním, resp. dolním indexu) jsou vektorovými podprostory v $\mathcal{T}^p_q$. Zobecněte definici symetrie a antisymetrie na skupiny tří a více indexů i na skupinu všech indexů.

Úplná symetrizace: (ve všech horních resp. dolních indexech)

- $P_p = \{(\sigma_1, \ldots, \sigma_p) \mid \text{permutace indexů}\,(1, \ldots, p)\}$
- $\overline{S}\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in P_p} \tau(\omega_{\sigma_1}, \ldots, \omega_{\sigma_p}; \xi_1, \ldots, \xi_q)$
- $\underline{S}\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in P_q} \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_q})$

Úplná antisymetrizace (alternace): (ve všech horních resp. dolních indexech)

- $\overline{A}\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \frac{1}{p!}\sum_{\sigma \in P_p} \mathrm{sgn}(\sigma)\tau(\omega_{\sigma_1}, \ldots, \omega_{\sigma_p}; \xi_1, \ldots, \xi_q)$
- $\underline{A}\tau\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \frac{1}{q!}\sum_{\sigma \in P_q} \mathrm{sgn}(\sigma)\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_{\sigma_1}, \ldots, \xi_{\sigma_q})$

Příklad 4. Charakterizujte úplně symetrické a úplně antisymetrické tenzory pomocí složek. Dokažte, že všechna zobrazení symetrizace i antisymetrizace jsou lineární.

Prostory $\bigwedge^p_{(q)}$ *a* $\bigwedge^{(p)}_q$:

- $\bigwedge^p_{(q)} = \{\tau \in \mathcal{T}^p_q \mid \tau = \overline{A}\tau\}$ vektorový podprostor v $\mathcal{T}^p_q$, $\dim \bigwedge^p_{(q)} = n^q\binom{n}{p}$
- $\bigwedge^{(p)}_q = \{\tau \in \mathcal{T}^p_q \mid \tau = \underline{A}\tau\}$ vektorový podprostor v $\mathcal{T}^p_q$, $\dim \bigwedge^{(p)}_q = n^p\binom{n}{q}$

Vnější součin: $\mu \in \mathcal{T}^p_q$, $\nu \in \mathcal{T}^r_s$

- $\mu \overline{\wedge} \nu = \frac{(p+r)!}{p!r!}\overline{A}(\mu \otimes \nu)$
- $\mu \underline{\wedge} \nu = \frac{(q+s)!}{q!s!}\underline{A}(\mu \otimes \nu)$

Příklad 5. Zapište definice alternace a vnějšího součinu pro p=0, resp. q=0. Pro tyto případy značíme $\bigwedge_q^{(0)} = \bigwedge_q$ a $\bigwedge_{(0)}^p = \bigwedge^p$, $\mu\underline{\wedge}\nu = \mu \wedge \nu$, $\mu\overline{\wedge}\nu = \mu \wedge \nu$. Dokažte, že báze v $\bigwedge_q$ má tvar $(e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q})$, $j_1, \ldots, j_q \in \{1, \ldots, n\}$. Vypočtěte $\mu \wedge \nu(\xi_1, \ldots, \xi_{q+s})$ pro $\mu \in \mathcal{T}_q^0$, $\nu \in \mathcal{T}_s^0$, jestliže $\mu = \mu_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$, $\nu = \mu_{l_1 \ldots l_s} e^{l_1} \wedge \ldots \wedge e^{l_s}$, $\xi_k = \xi_k^i e_i$. Dále dokažte: $\mu \wedge \nu = (-1)^{pq} \nu \wedge \mu$, $\mu \wedge (\alpha_1 \nu_1 + \alpha_2 \nu_2) = \alpha_1(\mu \wedge \nu_1) + \alpha_2(\mu \wedge \nu_2)$, $\mu \wedge (\nu \wedge \chi) = (\mu \wedge \nu) \wedge \chi = \mu \wedge \nu \wedge \chi$.

2.4 Kontrakce

Kontrakce jsou jistá lineární zobrazení prostoru tenzorů typu (p, q) do prostorů tenzorů nižšího řádu ($(p-1, q-1)$, resp. $(p, q-1)$ a $(p-1, q)$, zadaná speciální volbou některých vektorových argumentů.

Úžení v $\alpha-$tém horním a $\beta-$tém dolním indexu:

- $\iota_\beta^\alpha : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to \iota_\beta^\alpha \tau \in \mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$, $1 \le \alpha \le p$, $1 \le \beta \le q$

$$\iota_\beta^\alpha \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) =$$
$$\tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, e^\gamma, \omega_\alpha, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, e_\gamma, \xi_\beta, \ldots, \xi_{q-1})$$

Příklad 6. Dokažte, že obraz $\iota_\beta^\alpha \tau$ je skutečně prvkem $\mathcal{T}_{q-1}^{p-1}$ a že platí

$$\iota_\beta^\alpha \tau = \tau_{j_1 \ldots j_{\beta-1} j_\gamma j_\beta \ldots j_{q-1}}^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} \gamma i_\alpha \ldots i_{p-1}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{p-1}} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{q-1}}$$

Dále ukažte užitím vztahů pro přechod mezi bázemi, že ač je kontrakce definovaná pomocí báze, je ve skutečnosti na její volbě nezávislá. Dokažte, že kontrakce je lineární zobrazení.

Stopa tenzoru: $Tr_\beta^\alpha \tau = \frac{1}{n} \iota_\beta^\alpha \tau$

Kontrakce vektorovým argumentem:

Nechť $\xi \in \mathcal{V}$, resp. $\omega \in \mathcal{V}^*$

- $\iota_\beta(\xi) : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to \iota_\beta(\xi)\tau \in \mathcal{T}_{q-1}^p$, $1 \le \beta \le q$:

  $\iota_\beta(\xi)\tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) = \tau(\omega_1, \ldots, \omega_p; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, \xi, \xi_\beta, \ldots, \xi_{q-1})$
- $\iota^\alpha(\omega) : \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to \iota^\alpha(\omega)\tau \in \mathcal{T}_q^{p-1}$, $1 \le \alpha \le p$:

  $\iota^\alpha(\xi)\tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_q) = \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, \omega, \omega_\alpha, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_q)$

Příklad 7. Dokažte, že skutečně $\iota_\beta(\xi)\tau \in \mathcal{T}_{q-1}^p$ a $\iota^\alpha(\omega)\tau \in \mathcal{T}_q^{p-1}$ a ukažte, že pro složky kontrahovaných tenzorů v indukovaných bázích platí:

$$\iota_\beta(\xi)\tau = \xi^\gamma \tau_{j_1 \ldots j_{\beta-1} \gamma j_\beta \ldots j_{q-1}}^{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{q-1}}$$

a podobně pro $\iota^\alpha(\omega)\tau$. Dokažte, že kontrakce vektorovými argumenty jsou lineární zobrazení.

Příklad 8. Dokažte, že pro $\tau \in \bigwedge_q \subset \mathcal{T}_q^0$ a $\xi \in \mathcal{V}$ platí pro libovolné $1 \leq \beta \leq q$

$$\iota_\beta(\xi)\tau(\xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) = \tau(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}),\ \iota_\beta(\xi)\tau = \xi^\gamma \tau_{\gamma j_1, \ldots, j_{q-1}} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_{q-1}}$$

2.5 Metriky, snižování a zvedání indexů

Metrický tenzor (metrika)

- Regulární symetrický tenzor $g \in \mathcal{T}_2^0$ (kovariantní metrika)
- Regulární symetrický tenzor $g \in \mathcal{T}_0^2$ (kontravariantní metrika)

Věta 2.3

Pro každou metriku $g \in \mathcal{T}_2^0$ existuje báze $(e_1, \ldots, e_n)$ prostoru $\mathcal{V}$, ve které je

$$g = e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^k \otimes e^k - e^{k+1} \otimes e^{k+1} - \cdots - e^n \otimes e^n$$

Důkaz: Viz například důkaz o kanonickém tvaru kvadratických forem. Analogická věta platí pro kontravariantní metriku. $\diamondsuit$

Signatura metriky:

- $(k, n-k)$
- $(n, 0)$ *euklidovská metrika*
- $(n-1, 1)$ *Minkowského metrika*

Snížení indexu:

- $g \in \mathcal{T}_2^0$ metrika, $\quad g{\downarrow}_\beta^\alpha\colon\ \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to g{\downarrow}_\beta^\alpha\, \tau \in \mathcal{T}_{q+1}^{p-1}$

$$g{\downarrow}_\beta^\alpha\, \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) =$$
$$= \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, g(\xi_\beta), \omega_\alpha, \ldots, \omega_{p-1}; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, \xi_{\beta+1}, \ldots, \xi_{q+1})$$

Zvednutí indexu:

- $g \in \mathcal{T}_0^2$ metrika, $\quad g{\uparrow}_\beta^\alpha\colon\ \mathcal{T}_q^p \ni \tau \to g{\uparrow}_\beta^\alpha\, \tau \in \mathcal{T}_{q-1}^{p+1}$

$$g{\uparrow}_\beta^\alpha\, \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{p+1}; \xi_1, \ldots, \xi_{q-1}) =$$
$$= \tau(\omega_1, \ldots, \omega_{\alpha-1}, \omega_{\alpha+1}, \ldots, \omega_{p+1}; \xi_1, \ldots, \xi_{\beta-1}, g(\omega_\alpha)\xi_\beta, \ldots, \xi_{q-1})$$

Příklad 10. Dokažte, že pro $\tau \in \mathcal{T}_q^p$ je skutečně $g{\downarrow}_\beta^\alpha\, \tau \in \mathcal{T}_{q+1}^{p-1}$ a že platí

$$g{\downarrow}_\beta^\alpha\, \tau = g_{\gamma j_\beta} \tau^{i_1 \ldots i_{\alpha-1} \gamma i_{\alpha+1} \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_{\beta-1} j_{\beta+1} \ldots j_{q+1}}\, e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\alpha-1}} \otimes e_{i_{\alpha+1}} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{q+1}}.$$

Analogický důkaz proveďte pro zvednutí indexu.

Kapitola 3

Tenzory na varietách

Cílem této kapitoly je zavedení diferencovatelné struktury na množinách všech tenzorů obecného typu (p,q), operujících v prostorech tečných vektorů v jednotlivých bodech variety *(tenzorová rozvrstvení)*.

3.1 Tečný prostor k varietě a směrové derivace

Vektor tečný k varietě v jejím libovolně ale pevně zvoleném bodě definujeme, řečeno názorně, jako tečný vektor křivek, které tímto bodem procházejí a mají v něm společnou tečnu. Derivace funkcí definovaných na diferencovatelné varietě ve směrech tečných vektorů k varietě pak zavedeme v důsledné analogii s definicí tohoto pojmu v $\mathcal{R}^n$.

Křivka v $\mathcal{R}^n$:

Dvojice (x,ζ), kde ζ je diferencovatelné zobrazení $\zeta : \mathcal{R} \supset (-\varepsilon,\varepsilon) \ni t \to \zeta(t) = (\zeta^1(t),\dots,\zeta^n(t)) \in \mathcal{R}^n$ a $x = \zeta(0) \in \mathcal{R}^n$.

Tečný vektor k $\mathcal{R}^n$ v bodě $x = \zeta(0) \in \mathcal{R}^n$: $\xi = (x, (\xi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}})$, $\xi^i = \frac{\mathrm{d}\zeta^i(0)}{\mathrm{d}t}$

Dokažte: Dvě křivky ζ a χ v $\mathcal{R}^n$ mají v bodě $x = \zeta(0) = \chi(0)$ stejný tečný vektor právě tehdy, platí-li $(\mathrm{d}\zeta^i(0)/\mathrm{d}t) = (\mathrm{d}\chi^i(0)/\mathrm{d}t)$, $\forall i \in \{1,\dots,n\}$.

Křivka na varietě:

Dvojice (x,ζ), kde ζ je diferencovatelné zobrazení $\zeta : \mathcal{R} \supset (-\varepsilon,\varepsilon) \to \mathcal{X}$ a $x = \zeta(0) \in \mathcal{X}$. Reprezentace křivky v souřadnicovém systému $(\mathcal{U},\varphi)$, pro který je $\zeta(-\varepsilon,\varepsilon) \in \mathcal{U}$: $\mathcal{R} \supset (-\varepsilon,\varepsilon) \ni t \to \varphi\zeta(t) = (x^1\varphi\zeta(t),\dots,x^n\varphi\zeta(t)) \in \mathcal{R}^n$, zkráceně $(x^1\zeta(t),\dots,x^n\zeta(t))$.

Ekvivalence křivek:

$(x_1, \zeta) \sim (x_2, \chi) \Leftrightarrow x_1 = x_2,\ \left(\frac{\mathrm{d}x^i\zeta(0)}{\mathrm{d}t}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}x^i\chi(0)}{\mathrm{d}t}\right)\ \forall i \in \{1, \dots, n\}$

Přesvědčte se, že ekvivalence křivek je relací ekvivalence a dokažte její nezávislost na volbě souřadnicového systému.

Tečný vektor k varietě $\mathcal{X}$ v bodě x:

Třída ekvivalence $\xi = \{(x, \zeta)\}$; $\mathcal{T}_x\mathcal{X} = \{\xi \mid \xi \text{ je tečný vektor v bodě } x\}$

Souřadnicové vyjádření tečného vektoru:

Nechť $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT}_{\mathcal{X}}$ a nechť $\chi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$. Zobrazení $T_x\varphi : \mathcal{T}_x\mathcal{X} \ni \xi \to T_x\varphi \cdot \xi = \left(x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x); \frac{\mathrm{d}x^1\zeta(0)}{\mathrm{d}t}, \dots \frac{\mathrm{d}x^n\zeta^n(0)}{\mathrm{d}t}\right) \in \mathcal{R}^{2n}$ je definováno *korektně*, neboť $T_x\varphi \cdot \xi = T_x\varphi \cdot \lambda \Leftrightarrow \xi, \lambda \in \{(x, \zeta)\}$. Dokažte korektnost a vzájemnou jednoznačnost $T_x\varphi$.

Příklad 1. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi) \in \mathcal{AT}_{\mathcal{X}}$, $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $\varphi = (x^i)$, $\psi = (y^i)$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Nechť $\xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$. Platí

$$T_x\psi \cdot \xi = \frac{\mathrm{d}y^k\zeta(0)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} \frac{\mathrm{d}x^i\zeta(0)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} T_x\varphi \cdot \xi$$

Struktura vektorového prostoru na $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$:

- Operace: $a\xi + b\lambda = (T_x\varphi)^{-1}(a\,T_x\varphi \cdot \xi + b\,T_x\varphi \cdot \lambda)$, $\forall \xi, \lambda \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$, $\forall a, b \in \mathcal{R}$
- Báze indukovaná souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$: $((e_1)_x, \dots, (e_n)_x)$, $(e_i)_x = \{(x, \zeta^i)\}$, kde $\zeta^i = \varphi^{-1}(0, \dots, t, \dots, 0)$, ($t$ na $i-$té pozici) je *$i-$tá souřadnicová křivka* systému $(\mathcal{U}, \varphi)$.

Příklad 2. Dokažte, že uvedeným způsobem je na $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$ zavedena struktura vektorového prostoru a že vektory $(e_i)_x$, $i \in \{1, \dots, n\}$ tvoří v $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$ bázi. Dále ukažte, že $T_x\varphi \cdot (e_i)_x = (x, (\delta_i^k))$.

Příklad 3. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$, $(\mathcal{V}, \psi)$, $x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$, $\xi = \{(x, \zeta)\} \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$. Označme $((e_1)_x, \dots, (e_n)_x)$ resp. $((\overline{e}_1)_x, \dots, (\overline{e}_n)_x)$ bázi v $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$ indukovanou souřadnicovým systémem $(\mathcal{U}, \varphi)$, resp. $(\mathcal{V}, \psi)$. Zřejmě $\xi = \xi^i(e_i)_x = \overline{\xi}^i(\overline{e}_i)_x$. Platí

$$\overline{\xi}^i = \frac{\mathrm{d}y^i\zeta(0)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x^j\zeta(0)}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(x)} = \xi^j \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(x)}$$

Odvoďte převodní vztahy mezi složkami tečných vektorů pro souřadnicové systémy na $\mathcal{S}^2$ definované v příkladu 8 odstavce 1.2.

Derivace funkce ve směru:

$\xi(f) = \xi^i \left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} = \xi^i \left(\frac{\partial f\varphi^{-1}(x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x))}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)}$, $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ je funkce, $x \in \mathcal{X}$ bod a $\xi = (x, (\xi^i)_{i \in \{1, \dots, n\}}) \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$ vektor v souřadnicích $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$.

Příklad 4. Dokažte, že hodnota derivace funkce f v daném bodě $x \in \mathcal{X}$ ve směru daného vektoru $\xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$ nezávisí na volbě souřadnic, tj. pro $(\mathcal{U},\varphi)$, $(\overline{\mathcal{U}},\overline{\varphi})$, $x \in \mathcal{U}\cap\overline{\mathcal{U}}$, $\xi = \xi^i(e_i)_x = \overline{\xi}^i(\overline{e}_i)_x$ platí

$$\xi^i\left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} = \overline{\xi}^i\left(\frac{\partial f\overline{\varphi}^{-1}}{\partial \overline{x}^i}\right)_{\overline{\varphi}(x)}. \text{ Dále pak je } (e_k)(f) = \delta^i_k\left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\varphi(x)} = \frac{\partial}{\partial x^k}(f\varphi^{-1})_{\varphi(x)}.$$

Posledním zápisem je dáno následující vyjádření vektoru $(e_k)_x$ v souřadnicovém systému $(\mathcal{U},\varphi)$:

Souřadnicové vyjádření indukované báze:

$$((e_1)_x,\ldots,(e_n)_x) = ((\tfrac{\partial}{\partial x^1})_x,\ldots,(\tfrac{\partial}{\partial x^n})_x) \Rightarrow \xi = \xi^i(\tfrac{\partial}{\partial x^i})_x,\ (\tfrac{\partial}{\partial \overline{x}^i})_x = \left(\tfrac{\partial x^j}{\partial \overline{x}^i}\right)_{\overline{\varphi}(x)}(\tfrac{\partial}{\partial x^j})_x$$

3.2 Tenzory na varietě

Duální operace ke směrové derivaci, *vnější derivace funkce*, umožní vhodně označit indukované báze prostoru $\mathcal{T}^*_x\mathcal{X}$, duálního k $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$ a poté i indukované báze v prostorech tenzorů na varietě $\mathcal{X}$.

Vnější derivace funkce:

Zobrazení $\mathrm{d}f(x) : \mathcal{T}_x\mathcal{X} \ni \xi \to \mathrm{d}f(x)(\xi) = \xi(f) \in \mathcal{R}$, kde $f : \mathcal{X} \to \mathcal{R}$ je funkce, $x \in \mathcal{X}$ bod a $\xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$ vektor.

Příklad 5. Dokažte, že $\mathrm{d}f(x) \in \mathcal{T}^*_x\mathcal{X}$, tj. $\mathrm{d}f(x)(\xi) =\,<\mathrm{d}f(x) \mid \xi>$. Nechť $(\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}$. Prověřte, že pro souřadnicovou funkci $x^i : \mathcal{X} \ni x \to x^i\varphi(x) \in \mathcal{R}$ platí $\mathrm{d}x^i(x)(\xi) = \xi^i$, $\forall\xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$, a tedy $\mathrm{d}x^i(x)((e_j)_x) = \delta^i_j \Rightarrow \mathrm{d}x^i(x) = (e^i)_x$. Tento výsledek motivuje následující označení duální báze:

Souřadnicové vyjádření duální báze:

$$((e^1)_x,\ldots,(e^n)_x) = (\mathrm{d}x^1_x,\ldots,\mathrm{d}x^n_x) \Rightarrow \omega = \omega_i\,\mathrm{d}x^i_x,\ \mathrm{d}\overline{x}^i_x = \left(\tfrac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\varphi(x)}\mathrm{d}x^j_x$$

Prostor tenzorů typu (p,q) na varietě:

$$(\mathcal{T}^p_q)_x\mathcal{X} = \underbrace{\mathcal{T}_x\mathcal{X}\otimes\cdots\otimes\mathcal{T}_x\mathcal{X}}_{p}\otimes\underbrace{\mathcal{T}^*_x\mathcal{X}\otimes\cdots\otimes\mathcal{T}^*_x\mathcal{X}}_{q}.$$

Souřadnicové vyjádření tenzoru typu (p,q):

$$\tau = \tau^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_x\otimes\cdots\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right)_x\otimes\mathrm{d}x^{j_1}_x\otimes\cdots\otimes\mathrm{d}x^{j_q}_x,\ (\mathcal{U},\varphi)\in\mathcal{AT}_\mathcal{X},\ x\in\mathcal{U}$$

3.3 Tečné rozvrstvení

Sjednocení $\mathcal{TX}$ všech tečných prostorů k varietě $\mathcal{X}$ opatříme diferencovatelnou strukturou, odvozenou od diferencovatelné struktury dané atlasem $\mathcal{AT}_\mathcal{X}$.

Věta 3.1

Nechť $\mathcal{X}$ je varieta s diferencovatelnou strukturou zadanou $\mathcal{R}^n-$atlasem $\mathcal{AT_X}$. Označme

- $\mathcal{TX} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}_x\mathcal{X}$, $\xi \in \mathcal{TX}$ $\forall \xi = \{(x, (\xi^i)_{i\in\{1,\dots,n\}})\}$, $(\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT_X}$
- $\pi : \mathcal{TX} \supset \mathcal{T}_x\mathcal{X} \ni \xi \to \pi(\xi) = x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$
- $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\xi \in \mathcal{TX} \mid \xi \in \mathcal{T}_x\mathcal{X},\ x \in \mathcal{U}\}$
- $T\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \ni \xi \to T\varphi(\xi) = (\varphi(\pi(\xi)), T_{\pi(\xi)}\varphi \cdot \xi)$, kde $T_{\pi(\xi)}\varphi \cdot \xi = T_x\varphi \cdot \xi =$ $= (x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x)\,;\,\xi^1, \dots, \xi^n) \in \varphi(\mathcal{U}) \times \mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}^{2n}$.

Pak systém $\mathcal{AT}_{(\mathcal{TX})} = \{(\pi^{-1}(\mathcal{U}), T\varphi) \mid (\mathcal{U}, \varphi) \in \mathcal{AT_X}\}$, splňuje předpoklady věty (1.6), určuje tedy jednoznačně topologickou a diferencovatelvou strukturu na $\mathcal{TX}$ a $\mathcal{AT_{TX}}$ je atlas na $\mathcal{TX}$.

Důkaz:

Prověření podmínek **DIF 1** – **DIF 4** přenecháváme čtenáři.

Tečné rozvrstvení variety $\mathcal{X}$:

$\mathcal{TX}$ spolu s diferencovatelnou strukturou definovanou atlasem $\mathcal{AT_{TX}} = \{(\pi^{-1}(\mathcal{U}), T\varphi)\}$.

Vrstva nad bodem $x \in \mathcal{X}$: $\mathcal{T}_x\mathcal{X}$

Vektorové pole na varietě $\mathcal{X}$:

Diferencovatelné zobrazení $\xi : \mathcal{X} \to \mathcal{TX}$, pro které $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ resp. $\xi : \mathcal{U} \to \mathcal{TX}$, $\pi \circ \xi = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ (vektorové pole definované *globálně* resp. *lokálně*)

Příklad 6. Souřadnicová vektorová pole: $\frac{\partial}{\partial x} : \mathcal{U} \ni x \to \frac{\partial}{\partial x}(x) = (\frac{\partial}{\partial x})_x \in \mathcal{T}_x\mathcal{X} \subset \mathcal{TX}$.

3.4 Tenzorová rozvrstvení

Analogicky jako v případě tečného rozvrstvení opatříme diferencovatelnou strukturou sjednocení všech tenzorových prostorů typu (p, q) nad tečnými prostory k varietě $\mathcal{X}$.

Věta 3.2

Nechť $\mathcal{X}$ je varieta s diferencovatelnou strukturou zadanou $\mathcal{R}^n-$atlasem $\mathcal{AT_X}$. Označme

- $\mathcal{T}^*\mathcal{X} = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}_x^*\mathcal{X}$, $\omega \in \mathcal{T}^*\mathcal{X}$ $\forall\omega = \{(x, (\omega_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}})\}$, $(\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}$
- $\pi : \mathcal{T}^*\mathcal{X} \supset \mathcal{T}_x^*\mathcal{X} \ni \omega \to \pi(\omega) = x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{T}_x^*\mathcal{X}$
- $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\omega \in \mathcal{T}^*\mathcal{X} \mid \omega \in \mathcal{T}_x^*\mathcal{X},\, x \in \mathcal{U}\}$
- $T^*\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \ni \omega \to T^*\varphi(\omega) = (\varphi(\pi(\omega)), T^*_{\pi(\omega)}\varphi\cdot\omega)$, kde $T^*_{\pi(\omega)}\varphi\cdot\omega =$ $= T^*_x\varphi\cdot\omega = (x^1\varphi(x),\ldots,x^n\varphi(x)\,;\,\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \varphi(\mathcal{U})\times\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}^{2n}$.

Pak systém Pak systém $\mathcal{AT}_{(\mathcal{T}^*\mathcal{X})} = \{(\pi^{-1}(\mathcal{U}), T^*\varphi) \mid (\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}\}$, splňuje předpoklady věty (1.6), určuje tedy jednoznačně topologickou a diferencovatelvou strukturu na $\mathcal{T}^*\mathcal{X}$ a $\mathcal{AT}_{\mathcal{T}^*\mathcal{X}}$ je atlas na $\mathcal{T}^*\mathcal{X}$.

Důkaz: Analogický jako v případě věty 3.1. $\diamondsuit$

Kotečné rozvrstvení variety $\mathcal{X}$:

$\mathcal{T}^*\mathcal{X}$ spolu s diferencovatelnou strukturou definovanou atlasem $\mathcal{AT}_{\mathcal{T}^*\mathcal{X}}$

Vrstva nad bodem $x \in \mathcal{X}$: $\mathcal{T}^*\mathcal{X}$

Věta 3.3

Nechť $\mathcal{X}$ je varieta s diferencovatelnou strukturou zadanou $\mathcal{R}^n$−atlasem $\mathcal{AT}_\mathcal{X}$. Označme

- $\mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X}) = \bigcup_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X})$, $\eta \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X})$ $\forall\eta = \{(x, (\eta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})_{i\in\{1,\ldots,n\}})\}$, $(\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}$
- $\pi : \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X}) \supset \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X}) \ni \eta \to \pi(\eta) = x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow \eta \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X})$
- $\pi^{-1}(\mathcal{U}) = \{\eta \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X}) \mid \eta \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X}),\, x \in \mathcal{U}\}$
- $T^p_q\varphi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \ni \eta \to T^p_q\varphi(\eta) = (\varphi(\pi(\eta)), (T^p_q)_{\pi(\eta)}\varphi\cdot\eta)$, kde $(T^p_q)_{\pi(\eta)}\varphi\cdot\eta =$ $= (T^p_q)_x\varphi\cdot\eta = (x^1\varphi(x),\ldots,x^n\varphi(x)\,;\,(\eta^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q})_{i\in\{1,\ldots,n\}}) \in \varphi(\mathcal{U})\times\mathcal{R}^n \subset \mathcal{R}^{2n}$.

Pak systém Pak systém $\mathcal{AT}_{(\mathcal{T}^p_q\mathcal{X})} = \{(\pi^{-1}(\mathcal{U}), T^p_q\varphi) \mid (\mathcal{U},\varphi) \in \mathcal{AT}_\mathcal{X}\}$, splňuje předpoklady věty (1.6), určuje tedy jednoznačně topologickou a diferencovatelvou strukturu na $\mathcal{T}^p_q\mathcal{X}$ a $\mathcal{AT}_{\mathcal{T}^p_q\mathcal{X}}$ je atlas na $\mathcal{T}^p_q\mathcal{X}$.

Důkaz: Analogický jako v případě věty 3.1. $\diamondsuit$

Tenzorové rozvrstvení typu (p,q):

$\mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X})$ spolu s diferencovatelnou strukturou definovanou atlasem $\mathcal{AT}_{\mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X})}$

Vrstva nad bodem $x \in \mathcal{X}$: $\mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X})$

Tenzorové pole na varietě $\mathcal{X}$:

Diferencovatelné zobrazení $\eta : \mathcal{X} \to \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X})$, pro které je $\pi \circ \eta = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ (tenzorové pole definované *globálně*), resp. $\eta_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{U})$, $\pi \circ \eta_{\mathcal{U}} = \mathrm{id}_{\mathcal{U}}$ (tenzorové pole definované *lokálně*)

Příklad 7. Zobrazení

$$\eta_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \ni x \to \eta_{\mathcal{U}}(x) = \eta^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x)(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}})_x \otimes \cdots \otimes (\frac{\partial}{\partial x^{i_p}})_x \otimes dx^{j_1}_x \otimes \cdots \otimes dx^{j_q}_x \in \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}_x\mathcal{X}) \subset \mathcal{T}^p_q(\mathcal{T}\mathcal{X})$$

kde $\eta^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots q}(x)$ jsou diferencovatelné funkce, je tenzorovým polem na varietě $\mathcal{X}$.

Kapitola 4

Lieovy derivace

Lieovy derivace vystihují změny tenzorových polí podél zadaných polí vektorových analogickým způsobem, jako směrová derivace $\xi(f)$ měří rychlost změny funkční hodnoty funkce f podél vektorového pole ξ.

4.1 Indukované difeomorfismy rozvrstvení tenzorů.

Každý difeomorfismus diferencovatelných variet přirozeným způsobem indukuje difeomorfismus jejich tečných i kotečných rozvrstvení i difeomorfismy tenzorových rozvrstvení všech typů definovaných na daných varietách.

Označení:

- $\alpha : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ difeomorfismus variet
- $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$, resp. $(\mathcal{V}, \psi = (y^1, \dots, y^n))$ souřadnicové systémy na $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{Y}$
- $\psi\alpha\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \ni (x^1, \dots, x^n) \to (y^1, \dots, y^n) \in \psi(\mathcal{V}), y^i = y^i(x^1, \dots, x^n)$, $1 \leq i \leq n$, přesněji $y^i = y^i\psi\alpha\varphi^{-1}(x^1\varphi(x), \dots, x^n\varphi(x))$
- $\varphi\alpha^{-1}\psi^{-1} : \psi(\mathcal{V}) \ni (y^1, \dots, y^n) \to (x^1, \dots, x^n) \in \varphi(\mathcal{U})$, $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, $1 \leq i \leq n$, přesněji $x^i = x^i\varphi\alpha^{-1}\psi^{-1}(y^1\psi(x), \dots, y^n\psi(x))$
- $\xi \in \mathcal{T}\mathcal{X}$, $\xi = \{(x, \zeta)\}$, $x \in \mathcal{X}$, ζ je křivka v $\mathcal{X}$

Indukovaný difeomorfismus tečných rozvrstvení:

Zobrazení $\alpha_0^1 : \mathcal{T}\mathcal{X} \ni \xi = \{(x, \zeta)\} \to \eta = \alpha_0^1\xi = \{(\alpha(x), \alpha \circ \zeta)\} \in \mathcal{T}\mathcal{Y}$ (značíme také $\alpha_0^1 = T\alpha$)

V souřadnicích

$$\eta = \eta^i \frac{\partial}{\partial y^i} = \left(\frac{\mathrm{d} y^i \alpha \circ \zeta}{\mathrm{d}t} \right)_0 \frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \left(\frac{\mathrm{d} x^k \zeta}{\mathrm{d}t} \right)_0 \frac{\partial}{\partial y^i} = \xi^k \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial y^i} \Rightarrow \eta^i = \frac{\partial y^i}{\partial x^k} \xi^k$$

$$\alpha_0^1 \xi(x) = \xi^k(x) \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^k} \right)_{\varphi(x)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\alpha(x)} \Rightarrow \alpha_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x^k} \right)_x = \left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right)_{\varphi(x)} \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\alpha(x)}$$

Poznámka: Podrobný souřadnicový výpočet s nezkráceným vyznačením všech zobrazení:

$$\eta = \eta^i(\alpha(x)) \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\alpha(x)} = \left(\frac{\mathrm{d} y^i \psi \alpha \circ \zeta(t)}{\mathrm{d}t} \right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_{\alpha(x)}$$

$$\eta^i(\alpha(x)) = \left(\frac{\mathrm{d} y^i (\psi \alpha \varphi^{-1})(x^1 \varphi \zeta(t), \ldots, x^n \varphi \zeta(t))}{\mathrm{d}t} \right)_0 =$$

$$= \left(\frac{\partial y^i (\psi \alpha \varphi^{-1})(x^1 \varphi \zeta, \ldots, x^n \varphi \zeta)}{\partial x^k} \right)_{\varphi(x)} \left(\frac{\mathrm{d} x^k \varphi \zeta(t)}{\mathrm{d}t} \right)_0 = \left(\frac{\partial y^i (\psi \alpha \varphi^{-1})(x^1, \ldots, x^n)}{\partial x^k} \right)_{\varphi(x)} \xi^k(x)$$

Indukovaný difeomorfismus kotečných rozvrstvení:

Zobrazení $\alpha_1^0 : \mathcal{T}^* \mathcal{X} \ni \omega \to \alpha_1^0 \omega \in \mathcal{T}^* \mathcal{Y} \Leftrightarrow \alpha_1^0 \omega(\alpha(x))(\xi) = \omega(x)[(\alpha^{-1})_0^1 \xi]$
$\forall \omega \in \mathcal{T}_x^* \mathcal{X}$, $\xi \in \mathcal{T}_{\alpha(x)} \mathcal{Y}$ (značíme též $\alpha_1^0 = T^* \alpha$)

Analogickým výpočtem jako pro α_0^1 dostaneme (proveďte):

$$\alpha_1^0 \omega(x) = \omega_i(x) \left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k} \right)_{\psi \alpha(x)} \mathrm{d} y^k_{\alpha(x)} \;\; \forall \omega = \omega_i(x) \, \mathrm{d} x^i_x$$

$$\alpha_1^0 \mathrm{d} x^k_x = \left(\frac{\partial x^k}{\partial y^j} \right)_{\psi \alpha(x)} \mathrm{d} y^j_{\alpha(x)}$$

Indukovaný difeomorfismus rozvrstvení typu (p, q):

Zobrazení $\alpha_q^p : \mathcal{T}_q^p(\mathcal{T} \mathcal{X}) \ni \tau \to \alpha_q^p \tau = (\tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \circ \alpha) \, \alpha_0^1 \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \alpha_0^1 \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \alpha_1^0 \mathrm{d} x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \alpha_1^0 \mathrm{d} x^{j_q}$ pro $\tau = \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes \mathrm{d} x^{j_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d} x^{j_q}$

V souřadnicích $(\mathcal{V}, \psi)$ při zkráceném zápisu

$$\alpha_q^p \tau = \left((\tau^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \circ \alpha) \frac{\partial y^{k_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{k_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{l_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial y^{l_q}} \right) \frac{\partial}{\partial y^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial y^{k_p}} \otimes \mathrm{d}y^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}y^{l_q}$$

Pullback:

Zobrazení $\alpha^* : \mathcal{T}_q^p(\mathcal{T}\mathcal{Y}) \ni \tau \to \alpha^*\tau \in \mathcal{T}_q^p(\mathcal{T}\mathcal{X})$ definované pro libovolné tenzorové pole τ typu (p, q) vztahem

$$\alpha^*\tau(x) = (\alpha^{-1})_q^p \tau(\alpha(x)), \text{ tj.}$$

$$\alpha^*\tau(x)((\omega_1, \dots, \omega_p; \xi_1, \dots, \xi_q)) = \tau(\alpha(x))(\alpha_1^0\omega_1, \dots, \alpha_1^0\omega_p; \alpha_0^1\xi_1, \dots, \alpha_0^1\xi_q)$$

Pro funkci $\alpha^* f(x) = f \circ \alpha(x)$

V souřadnicích $(\mathcal{U}, \varphi)$ při zkráceném zápisu

$$\alpha^* \tau = \left((\tau^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \circ \alpha) \frac{\partial x^{k_1}}{\partial y^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{k_p}}{\partial y^{i_p}} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{l_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{l_q}} \right) \frac{\partial}{\partial x^{k_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{k_p}} \otimes \mathrm{d}x^{l_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{l_q}$$

Věta 4.1

Indukované izomorfismy všech typů rozvrstvení a pullback jsou lineární.

Důkaz:

Pro libovolné vektory ξ, $\lambda \in \mathcal{T}_x\mathcal{X}$ a skaláry a, $b \in \mathcal{R}$ platí $\alpha_0^1(a\xi + b\lambda) = \frac{\partial y^i}{\partial x^k}(a\xi^k + b\lambda^k)\frac{\partial}{\partial y^i} = a\alpha_0^1\xi + b\alpha_0^1\lambda$, analogicky pro ω, $\chi \in \mathcal{T}_x^*\mathcal{X}$ je $\alpha_1^0(a\omega + b\chi) = a\alpha_1^0\omega + b\alpha_1^0\chi$ (proveďte). Linearita zobrazení α_q^p a α^* je důsledkem linearity tečných a kotečných rozvrstvení a vlastností tenzorového součinu. $\diamondsuit$

4.2 Vektorová pole a jednoparametrické grupy

Při sledování změn tenzorových polí podél daného vektorového pole ξ je nutné přecházet mezi tenzorovými prostory podél integrálních křivek vektorového pole ξ. Změnu tenzorového pole, ke které dojde při přechodu z bodu x do bodu blízkého na téže integrální křivce, nelze však přímo vyjádřit, neboť rozdíl tenzorů ležících v tenzorových prostorech nad tečnými prostory k varietě v jejích různých bodech není definován. Pomocí vhodného zobrazení je tedy třeba tenzor v bodě $x + \delta x \in \mathcal{X}$ zobrazit do bodu $x \in \mathcal{X}$ tak, aby rozdíl vystihoval změnu tenzorového pole podél integrální křivky. Potřebná zobrazení jsou jednoznačně definována vektorovým polem ξ jako difeomorfismy indukované *jednoparametrickou grupou transformací variety $\mathcal{X}$* tímto vektorovým polem generovanou.

Jednoparametrická grupa transformací variety $\mathcal{X}$:

Systém zobrazení variety $\alpha_t : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ s vlastnostmi

- **G 1:** $\alpha_t : \mathcal{X} \ni x \to \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, jsou difeomorfismy
- **G 2:** $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni (t, x) \to \alpha(t, x) = \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$ je diferencovatelné
- **G 3:** $\alpha_0 = id_{\mathcal{X}}$
- **G 4:** $\alpha_{s+t} = \alpha_s \circ \alpha_t \; \forall t, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

Věta 4.2

Množina zobrazení $\mathcal{G}$ s vlastnostmi **G 1** až **G 4** je grupou vzhledem ke skládání zobrazení.

Důkaz:

Přímým prověřením axiomů grupy s využitím vlastností **G 1** až **G 4**. Proveďte. $\diamondsuit$

Lokální jednoparametrická grupa difeomorfismů variety $\mathcal{X}$:

Pro $\alpha_t : \mathcal{U} \ni x \to \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$, je-li $\alpha_t(x) \in \mathcal{U} \; \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ a jsou-li splněny vlastnosti **G 1** až **G 4**. Značíme $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$.

Vektorové pole generované jednoparametrickou grupou $\mathcal{G}$:

$\xi(x) = \{(x, \alpha_x)\}$, kde $\alpha_x : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to \alpha_x(t) = \alpha(t, x) \in \mathcal{X}$ je křivka jdoucí bodem x.

Vektorové pole tečných vektorů ke křivce $\zeta : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni t \to \zeta(t) \in \mathcal{X}$:

Vektorové pole $\xi : \mathcal{X} \ni x \to \xi(x) \in \mathcal{T}\mathcal{X}$, pro které $\xi(\zeta(t)) = \{(\zeta(t), \zeta_t)\}$, kde křivka ζ_t je definována vztahem $\zeta_t : (-\varepsilon, \varepsilon) \ni s \to \zeta_t(s) = \zeta(t + s) \in \mathcal{X}$. Značíme $\xi = \dot{\zeta}$.

Jednoparametrická grupa generovaná vektorovým polem ξ:

Zatímco ke každé jednoparametrické (lokální jednoparametrické grupě) difeomorfismů variety $\mathcal{X}$ existuje vždy vektorové pole touto grupou generované ($\xi(x) = \dot{\alpha_x} \; \forall x \in \mathcal{X}$), opačné tvrzení platí pouze v poněkud slabší (lokální) formě:

Věta 4.3: Teorém o lokální jednoparametrické grupě

Nechť ξ je vektorové pole na $\mathcal{X}$. Pro každý bod $x_0 \in \mathcal{X}$ existuje souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \varphi)$, $x \in \mathcal{U}$, číslo ε a jednoznačně určená lokální jednoparametrická grupa $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ difeomorfismů $\alpha_t : \mathcal{U} \to \mathcal{X}$ tak, že pro každý bod $x \in \mathcal{U}$ a každou hodnotu $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ platí $\dot{\alpha}_{\alpha_t(x)}(\alpha_t(x)) = \xi(\alpha_t(x))$.

Lokální jednoparametrická grupa transformací variety $\mathcal{X}$ generovaná vektorovým polem ξ: Grupa $\mathcal{G}_{\mathcal{U}}$ z věty 4.3

Integrální křivky vektorového pole ξ:

Křivky α_x o rovnicích $\frac{\mathrm{d}x^i \varphi\alpha_x(t)}{\mathrm{d}t} = \xi^i(\alpha_x(t))$, zkráceně $\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \xi^i(x^1, \dots, x^n)$

Příklad 1. $\mathcal{X} = \mathcal{R}^2$ s diferencovatelnou strukturou danou globálním atlasem $\{(\mathcal{R}^2, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^2}\}$. Snadno lze prověřit, že zobrazení

$$\alpha_t : \mathcal{R}^2 \ni (x^1, x^2) \to (x^1\alpha_t(x), x^2\alpha_t(x)) = (x^1 \cos t + x^2 \sin t, -x^1 \sin t + x^2 \cos t) \in \mathcal{R}^2$$

tvoří jednoparametrickou grupu difeomorfismů euklidovské rovniny $\mathcal{R}^2$, tzv. *grupu rotací* (prověřte). Z rovnic integrálních křivek

$$\frac{\mathrm{d}x^1\varphi\alpha_x(t)}{\mathrm{d}t} = \xi^1(x^1\varphi\alpha_t(x), x^2\varphi\alpha_t(x)) \ , \quad \frac{\mathrm{d}x^2\varphi\alpha_x(t)}{\mathrm{d}t} = \xi^2(x^1\varphi\alpha_t(x), x^2\varphi\alpha_t(x))$$

Určíme vektorové pole generované grupou rotací zvané *generátor jednoparametrické grupy rotací*:

$$\xi^1(x) = -x^1\varphi(x)\sin t + x^2\varphi(x)\cos t \ , \quad \xi^2(x) = -x^1\varphi(x)\cos t - x^2\varphi(x)\sin t \ \Rightarrow$$

$$\xi^1(x) = x^2\varphi\alpha_t(x) \ , \ \xi^2 = -x^1\varphi\alpha_t(x) \ \Rightarrow \ \xi = \left(x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\alpha_t(x)}$$

Obrácená úloha: Pomocí generátoru grupy rotací $\xi = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} - x^1\frac{\partial}{\partial x^2}$ určete difeomorfismy α_t.

Příklad 2. Najděte generátory grup všech možných translací v euklidovské rovině $\mathcal{R}^2$.

Příklad 3. Uvažujme o zobrazeních $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \ni (t, x) \to \alpha(t, x) = \alpha_t(x) \in \mathcal{X}$ generovaných vektorovým polem ξ. V souřadnicích platí

$$x^i\varphi\alpha(t, x) = x^i\varphi(x) + \left(\frac{\mathrm{d}x^i\varphi\alpha(s, x)}{\mathrm{d}t}\right)_0 t + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2x^i\varphi\alpha(s, x)}{\mathrm{d}t^2}\right)_0 t^2 + \cdots =$$

$$= \left[1 + t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s} + \cdots + t^k\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^k + \cdots\right] x^i\varphi\alpha(s, x)|_0 = \exp\left(t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right) x^i\varphi\alpha(s, x)|_0$$

Zobrazení α se nazývá též *exponentou* vektorového pole ξ.

4.3 Lieovy derivace

Lieova derivace tenzorových polí podle vektorového pole:

$$\partial_\xi \tau = \lim_{t\to 0} \frac{\alpha_t^* \tau - \tau}{t} = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_t^* \tau}{\mathrm{d}t}\right)_0$$

ξ je vektorové pole, $\tau \in \mathcal{T}_q^p(\mathcal{TX})$, $p, q \geq 0$, případy $p = 1, q = 0$ resp. $p = 0$, $q = 1$, $p = 0$, $q = 0$ představují postupně vektorové, kovektorové a skalární pole (tj. pole vektorů, pole lineárních forem a funkci). Vzhledem k linearitě pullbacku je zřejmé, že i Lieova derivace je lineární.

Lieova závorka vektorových polí: $[\xi, \zeta] = \partial_\xi \zeta$

Souřadnicová vyjádření

Nechť ξ je vektorové pole na $\mathcal{X}$, $x_0 \in \mathcal{X}$, a $\mathcal{G}_\mathcal{V}$ příslušná lokální jednoparametrická grupa. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ je souřadnicový systém na $\mathcal{X}$ takový, že $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ a $\alpha_t(x) \in \mathcal{U}\ \forall (t, x) \in (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{V}$.

Užijeme, bude-li to potřeba, následujících zkrácených označení:

$$\varphi\alpha_t(x) = (x^1\varphi\alpha_t(x), \ldots, x^n\varphi\alpha_t(x)) \ \text{ zkráceně } \ (x_t^1(x), \ldots, x_t^n(x))$$

$$\varphi\alpha_t\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{V}) \ni (x^1\varphi(x), \ldots, x^n\varphi(x)) \to \varphi\alpha_t\varphi^{-1}(x^1\varphi(x), \ldots, x^n\varphi(x)) =$$

$$= (x^1\varphi\alpha_t(x), \ldots, x^n\varphi\alpha_t(x)) \in \varphi\alpha_t(\mathcal{V})$$

$$\text{zkráceně } \ (x_t^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, x_t^n(x^1, \ldots, x^n))$$

$$(\varphi\alpha_t\varphi^{-1})^{-1} = \varphi\alpha_{-t}\varphi^{-1} : \varphi\alpha_t(\mathcal{V}) \ni (x^1\varphi\alpha_t(x), \ldots, x^n\varphi\alpha_t(x)) \to$$
$$\to \varphi\alpha_{-t}\varphi^{-1}(x^1\varphi\alpha_t(x), \ldots, x^n\varphi\alpha_t(x)) = (x^1\varphi(x), \ldots, x^n\varphi(x)) \in \varphi(\mathcal{V})$$

$$\text{zkráceně } \ (x_{-t}^1(x_t^1, \ldots, x_t^n), \ldots, x_{-t}^n(x_t^1, \ldots, x_t^n))$$

Rovnice souřadnicových reprezentací zobrazení α_t, α_{-t}*:*

$$\varphi\alpha_t\varphi^{-1} : \ \ x_t^j = x_t^j(x^1, \ldots, x^n) \quad \varphi\alpha_{-t}\varphi^{-1} : \ \ x_{-t}^j = x_{-t}^j(x^1, \ldots, x^n)$$

Příklad 4. Nechť $f : \mathcal{U} \to \mathcal{R}$ je diferencovatelná funkce. Platí:

$$\partial_\xi f(x) = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_t^* f}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}f \circ \alpha_t(x)}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left[\left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x_t^j}\right)_{\varphi\alpha_t(x)} \frac{\mathrm{d}x^j\varphi\alpha_t(x)}{\mathrm{d}t}\right]_{t=0} = \xi^j(x)\left(\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^j}\right)_{\varphi(x)}$$

Příklad 5. Nechť $\zeta : \mathcal{U} \to \mathcal{TX}$ je vektorové pole. Platí

$$[\xi,\zeta](x) = \partial_\xi(\zeta)(x) = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_t^*\zeta(x)}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\zeta^i(\alpha_t(x))\left(\frac{\partial x^j_{-t}}{\partial x^i}\right)_{\varphi\alpha_t(x)}\right]\right\}_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x =$$

$$= \left\{\left(\frac{\mathrm{d}\zeta^i(\alpha_t(x))}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\partial x^j_{-t}}{\partial x^i}\right)_{\varphi\alpha_t(x)} + \zeta^i(\alpha_t(x))\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x^j_{-t}}{\partial x^i}\right)_{\varphi\alpha_t(x)}\right]\right\}_{t=0}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x =$$

$$= \left\{\left(\frac{\partial\zeta^i\varphi^{-1}}{\partial x^k}\right)_{\varphi(x)}\left(\frac{\mathrm{d}x^k(\alpha_t(x))}{\mathrm{d}t}\right)_0\delta_i^j + \zeta^i\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\mathrm{d}x^j_{-t}}{\mathrm{d}t}\right)_0\right\}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x = \left(\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^k}\xi^k - \zeta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x$$

Příklad 6. Nechť $\omega : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^*\mathcal{X}$ je kovektorové pole. Platí

$$\partial_\xi\omega(x) = \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_t^*\omega(x)}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_i(\alpha_t(x))\alpha_t^*\mathrm{d}x^i\right)\right]_0 = \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\omega_i(\alpha_t(x))\left(\frac{\partial x^i_t}{\partial x^k}\right)_{\varphi\alpha_t(x)}\right]\right\}_{t=0}\mathrm{d}x^k_x =$$

$$= \left[\frac{\mathrm{d}\omega_i(\alpha_t(x))}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x^i_t}{\partial x^k}\right)_{\varphi\alpha_t(x)} + \omega_i(\alpha_t(x))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial x^i_t}{\partial x^k}\right)_{\varphi\alpha_t(x)}\right]_{t=0}\mathrm{d}x^k_x =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial\omega_i\varphi^{-1}}{\partial x^j}\right)_{\varphi(x)}\left(\frac{\mathrm{d}x^j\varphi\alpha_t(x)}{\mathrm{d}t}\right)_0\delta_k^i + \omega_i(x)\frac{\partial\xi^i}{\partial x^k}\right]\mathrm{d}x^k_x = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}\xi^j + \omega_i\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j_x$$

Shrnutí z příkladů 4, 5, 6: Souřadnicová vyjádření Lieovy derivace skalárního, vektorového a kovektorového pole mají tvar (zkráceně)

$$\partial_\xi f = \xi^j\frac{\partial f\varphi^{-1}}{\partial x^j} = \xi(f)$$

$$\partial_\xi\zeta = \left(\frac{\partial\zeta^j}{\partial x^k}\xi^k - \zeta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \quad \partial_\xi\omega = \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^j}\xi^j + \omega_i\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}\right)\mathrm{d}x^j$$

Věta 4.4: Vlastnosti Lieových derivací

Nechť $\xi,\xi_1,\xi_2,\zeta,\zeta_1,\zeta_2,\lambda : \mathcal{U} \to \mathcal{TX}$ jsou vektorová pole, $\omega,\eta,\eta_1,\eta_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^*\mathcal{X}$ pole lineárních forem, $\tau,\tau_1,\tau_2 : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^p_q(\mathcal{TX})$ resp. $\chi : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^r_s(\mathcal{TX})$ tenzorová pole typu (p,q) resp. (r,s), $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathcal{R}$ skaláry, $f : \mathcal{U} \to \mathcal{R}$ funkce. Nechť jsou dále $\varrho : \mathcal{U} \to \bigwedge_q(\mathcal{TX})$ resp. $\theta : \mathcal{U} \to \bigwedge_s(\mathcal{TX})$ antisymetrická tenzorová pole typu $(0,q)$ resp. $(0,s)$. Platí následující pravidla:

- $\partial_\xi(\alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2) = \alpha_1\partial_\xi\tau_1 + \alpha_2\partial_\xi\tau_2 \Rightarrow$
  $[\xi,\alpha_1\zeta_1 + \alpha_2\zeta_2] = \alpha_1[\xi,\zeta_1] + \alpha_2[\xi,\zeta_2]$, $[\alpha_1\xi_1 + \alpha_2\xi_2,\zeta] = \alpha_1[\xi_1,\zeta] + \alpha_2[\xi_2,\zeta]$

- $[\xi, \zeta] = -[\zeta, \xi]$
- $[[\xi, \zeta], \lambda] + [[\zeta, \xi], \lambda] + [[\lambda, \zeta], \xi] = 0$ *Jacobiho identita*
- $\partial_\xi(\tau \otimes \chi) = \partial_\xi \tau \otimes \chi + \tau \otimes \partial_\xi \chi$
- $\partial_{[\xi,\zeta]}\tau = \partial_\xi \partial_\zeta \tau - \partial_\zeta \partial_\xi \tau$
- $\partial_{f\xi}\zeta = [f\xi, \zeta] = f[\xi, \zeta] - (\partial_\zeta f)\xi$
- $\partial_\xi \varrho = \mathrm{d}\mathrm{i}_\xi \varrho + \mathrm{i}_\xi \mathrm{d}\varrho$
- $\mathrm{i}_\xi(\varrho \wedge \theta) = \mathrm{i}_\xi \varrho \wedge \theta + (-1)^q \varrho \wedge \mathrm{i}_\xi \theta$ *antiderivace*
- $\partial_\xi \mathrm{i}_\xi \varrho = \mathrm{i}_\xi \partial_\xi \varrho$
- $\xi\, \omega(\zeta) - \zeta\, \omega(\xi) - \omega([\xi, \zeta]) = \mathrm{d}\omega(\xi, \zeta)$ pro $p = 0$, $q = 1$
- Souřadnicové vyjádření Lieovy derivace tenzorového pole typu (p, q):

$$\partial_\xi \tau = \left(\xi^s \frac{\partial \tau^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}}{\partial x^s} + \sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial \xi^s}{\partial x^{j_\alpha}} \tau^{i_1 \ldots\ldots i_p}_{j_1 \ldots s \ldots j_q} - \sum_{\beta=1}^{q} \frac{\partial \xi^{i_\beta}}{\partial x^s} \tau^{i_1 \ldots s \ldots i_p}_{j_1 \ldots\ldots j_q} \right) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \mathrm{d}x^{j_q}$$

Důkaz:

$$\partial_\xi(\tau \otimes \chi) = \frac{\mathrm{d}\alpha_t^*(\tau \otimes \chi)}{\mathrm{d}t} = \lim_{t=0} \frac{\alpha_t^* \tau \otimes \alpha_t^* \chi - \tau \otimes \chi}{t} =$$

$$= \lim_{t=0} \left(\frac{\alpha_t^* \tau \otimes \alpha_t^* \chi - \alpha_t^* \tau \otimes \chi}{t} + \frac{\alpha_t^* \tau \otimes \chi - \tau \otimes \chi}{t} \right) = (\alpha_t^* \tau)_0 \otimes \partial_\xi \chi + \partial_\xi \tau \otimes \chi = \tau \otimes \partial_\xi \chi + \partial_\xi \tau \otimes \chi$$

Důkaz ostatních vlastností proveďte buď přímo z definice Lieovy derivace nebo použitím linearity a souřadnicových vyjádření Lieových derivací skalárních, vektorových a kovektorových polí. $\diamondsuit$

Příklad 7. Odvoďte vyjádření Lieových derivací souřadnicových vektorových a kovektorových polí:

$$\partial_\xi \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) = -\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \partial_\xi \mathrm{d}x^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}x^j$$

Tenzorové pole invariantní vůči jednoparametrické grupě transformací:

$\alpha_t^* \eta = \eta$, tj. $\partial_\xi \eta = 0$, kde $\alpha_t^* \in \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ je (lokální) jednoparametrická grupa transformací variety $\mathcal{X}$, resp. $\mathcal{U}$ generovaná vektorovým polem ξ.

Invariantní metrika:

Metrika $g = g_{ij}\, \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$ je invariantní vůči lokální jednoparametrické grupě gerenované vektorových polem ξ právě tehdy, platí-li tzv. *Killingovy rovnice*

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \xi^k + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} g_{kj} + \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} g_{ik} = 0$$

Dokažte užitím pravidla pro Lieovu derivaci funkce a tenzorového součinu a pomocí příkladu 7.

Kapitola 5

Lineární konexe

Definice Lieovy derivace tenzorového pole typu (p, q) podél zadaného vektorového pole ξ, předložená v kapitole 4, je založena na užití difeomorfismů tenzorových rozvrstvení, které jsou přirozeným způsobem indukovány výhradně jednoparametrickou grupou difeomorfismů generovanou vektorovým polem ξ a samotnou diferencovatelnou strukturou podkladové variety. Zatímco však Lieova derivace funkce podle vektorového pole ξ splývá s její derivací směrovou, Lieovy derivace vektorových a tenzorových polí za směrové derivace považovat nelze, neboť jsou lineárně závislé nejen na složkách vektorového pole ξ, ale i na jejich derivacích $\frac{\partial \xi}{\partial x^j}$. K zavedení skutečných derivací „směrového" charakteru je třeba mít na podkladové varietě definovanou dodatečnou strukturu, která umožní charakterizovat „přenášení" vektorů a tenzorů podél křivek obecně a tedy i podél integrálních křivek vektorového pole ξ. Touto strukturou je lineární konexe. Pokud je podkladová varieta opatřena i metrikou, může s ní lineární konexe úzce souviset.

5.1 Variety s metrikou

V odstavci 2.5 byla metrika definována jako regulární symetrický tenzor typu $(2, 0)$ nebo $(0, 2)$. Požadavek symetrie není nezbytný, neboť lze pracovat i s tzv. *nesymetrickými metrikami.* V našich úvahách se jej však vzdávat nebudeme. Nechť g je (symetrická) kovariantní metrika definovaná na varietě $\mathcal{X}$.

Riemannova metrika:

$g(\xi, \xi) \geq 0 \ \forall \xi \in \mathcal{T}\mathcal{X}$, rovnost nastane právě pro $\xi = 0_{\mathcal{T}\mathcal{X}}$ (tzv. *pozitivně definitní* metrika).

Pseudoriemannova metrika:

Je-li $g(\xi,\zeta) = 0\ \forall\xi$, pak $\zeta = 0_{\mathcal{T}\mathcal{X}}$.

Příklad 1. Dokažte, že každá metrika (ve smyslu definice v odstavci 2.5) je pseudoriemannova. Využijte regularity a existence kanonického tvaru metriky, vyplývající z její symetrie.

Příklad 2. Definujme zobrazení $\iota : \mathcal{T}_x\mathcal{X} \ni \xi \to \iota(\xi) = \omega_\xi \in \mathcal{T}_x^*\mathcal{X}$, kde $\omega_\xi = g(\xi,\ )$, přičemž $g(\xi,\ ) : \mathcal{T}_x\mathcal{X} \ni \zeta \to g(\xi,\zeta) \in \mathcal{R}$. Dokažte, že ι je izomorfismus. Metrika tedy indukuje izomorfní přechody od vektorů ke kovektorům. Zkonstruujte zobrazení ι^{-1}. Platí

$$g(\xi,\zeta) = <\omega_\xi \mid \zeta> = (\omega_\xi)_i\zeta^i = g_{ik}\xi^k\zeta^i \text{ při označení } \quad (\omega_\xi)_i = g_{ik}\xi^k.$$

Euklidova metrika:

Riemannova metrika v kanonickém tvaru $g = e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^n \otimes e^n$

Lorentzova metrika:

Pseudoriemannova metrika se signaturou $(n-1,1)$, tj. $g = \lambda_1 e^1 \otimes e^1 + \cdots + \lambda_n e^n \otimes e^n$, kde $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1} > 0$, $\lambda_n < 0$.

Minkowského metrika:

Lorentzova metrika v kanonickém tvaru $g = e^1 \otimes e^1 + \cdots + e^{n-1} \otimes e^{n-1} - e^n \otimes e^n$

Riemannova, pseudoriemannova, Lorentzova varieta:

Diferencovatelná varieta opatřená Riemannovou, pseudoriemannovou, Lorentzovou metrikou, značení $(\mathcal{X}, g)$

Prostorupodobný vektor ξ: $g(\xi,\xi) > 0$

Časupodobný vektor ξ: $g(\xi,\xi) < 0$

Světlupodobný vektor ξ: $g(\xi,\xi) = 0$

Indukovaná metrika:

Nechť $\mathcal{Y}$ je $m-$rozměrná podvarieta $n-$rozměrné Riemannovy variety $\mathcal{X}$ opatřené metrikou $g_\mathcal{X}$. Nechť $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ je vložení indukující na $\mathcal{Y}$ strukturu podvariety. Pak $g_\mathcal{Y} = f^* g_\mathcal{X}$ je *indukovaná* metrika na $\mathcal{Y}$.

Příklad 3. Dokažte, že $g_\mathcal{Y}$ je skutečně metrikou na $\mathcal{Y}$ a vyjádřete její složky v souřadnicích $(\mathcal{U},\varphi)$, $\varphi(y) = (y^i\varphi(y))_{i=1,\ldots,m}$, $y \in \mathcal{Y}$ na varietě $\mathcal{Y}$.

Příklad 4. Nechť $\mathcal{X} = \mathcal{R}^3$, $\mathcal{AT}_\mathcal{X} = \{(\mathcal{V}, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^3}|_\mathcal{V})\}$, $\mathcal{V} \in \tau_{\mathcal{R}^3}$, $(x^i(x))_{i=1,2,3}$ jsou kanonické souřadnice bodu $x \in \mathcal{X}$. Nechť $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^2$, $\mathcal{AT}_\mathcal{Y} = \{(\mathcal{V} \cap \mathcal{S}^2, \varphi)\}$, $\varphi(y) = (\theta(y), \phi(y))$ jsou sférické úhly bodu $y \in \mathcal{Y}$. Zobrazení $f : \mathcal{Y} \ni y \longrightarrow f(y) \in \mathcal{X}$ definované souřadnicovým vyjádřením $\mathrm{id}_{\mathcal{R}^3}|_\mathcal{V} \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathcal{R}^2 \ni (\theta,\phi) \longrightarrow (x^1,x^2,x^3) \in \mathcal{R}^3$, $x^1 = \sin\theta\cos\phi$, $x^2 = \sin\theta\sin\phi$, $x^3 = \cos\theta$ je vložením $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^2$ do $\mathcal{R}^3$

definujícím na $\mathcal{S}^2$ strukturu podvariety. Dále je $g_{\mathcal{X}} = \delta_{ij}\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Dokažte, že indukovaná metrika na $\mathcal{Y} = \mathcal{S}^2$ má tvar $g_{\mathcal{Y}} = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi$. Stejnou úlohu řešte pro vložení torusu $\mathcal{T}^2$ do $\mathcal{R}^3$, kde $\mathrm{id}_{\mathcal{R}^3}|_{\mathcal{V}} \circ f \circ \varphi^{-1} : (\theta, \phi) \longrightarrow ((R + r\cos\theta)\cos\phi, (R + r\cos\theta)\sin\phi, r\sin\theta)$.

Poznámka. Je-li varieta $\mathcal{X}$ pseudoriemannovská, pak na podvarietě $f : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{X}$ nemusí být nutně indukována metrika $f^* g_{\mathcal{X}}$.

5.2 Intuitivní zavedení konexe, paralelní přenos v $\mathcal{R}^n$

Přirozeným kritériem rovnoběžnosti vektorů umístěných v různých bodech $\mathcal{R}^n$ je úměrnost odpovídajících si složek v bázích tečných prostorů k $\mathcal{R}^n$, které jsou indukovány globálním souřadnicovým systémem $\{(\mathcal{R}^n, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^n})\}$. Pro obecnější případy variet je třeba zobecnit i definici rovnoběžnosti. Uvažme například podvarietu $\mathcal{S}^2$ v $\mathcal{R}^3$ s atlasem definovaným v příkladu 3 a vektorové pole $\xi = \frac{\partial}{\partial\theta}$. Nechť $x, y \in \mathcal{S}^2$, kde $\varphi(x) = (\theta(x), \phi(x))$, $\varphi(y) = (\theta(y), \phi(y))$, $\phi(x) = \phi(y)$ jsou dva různé body ležící na téže hlavní kružnici sféry, tj. na souřadnicové křivce $\zeta_\theta : t \to (\theta(x) + t, \phi(x))$. Nechť $\xi(x) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ je vektor v bodě x sféry, tečný k této hlavní kružnici. Vzniká otázka, zda v bodě y je třeba považovat za vektor rovnoběžný s vektorem $\xi(x)$ například vektor $\xi(y)$ tečný v tomto bodě k uvedené hlavní kružnici, nebo spíše vektor $\tilde{}(y)$, který má ve standardní bázi v $\mathcal{R}^3$ číselně shodné složky s vektorem $\xi(x)$. S otázkou rovnoběžnosti souvisí definice derivace vektorových polí. Definici derivací složek vektorových polí ve tvaru

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j} = \lim_{\Delta x^j \to 0} \frac{\xi^i(\ldots, x^j + \Delta x^j, \ldots) - \xi^i(\ldots, x^j, \ldots)}{\Delta x^j},$$

používanou v $\mathcal{R}^n$, nelze pro obecný případ převzít, neboť nelze odečítat složky vektorů $\xi(\ldots, x^j + \Delta x^j, \ldots)$ a $\xi(\ldots, x^j, \ldots)$ umístěných v různých bodech $x + \Delta x = (\ldots, x^j + \Delta x^j, \ldots)$ a $x = (\ldots, x^j, \ldots)$ podkladové variety. V $\mathcal{R}^n$ s globálním souřadnicovým systémem $\{(\mathcal{R}^n, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^n})\}$ se tato „chyba“ na výsledku neprojevila, díky shodnosti odpovídajících si složek rovnoběžných vektorů. Pro formulaci správné definice, použitelné i při obecnější volbě atlasu $\{(\mathcal{V}_\rangle, \varphi_i)\}$, $\varphi_i(x) = (x_i^1(x), \ldots, x_i^n(x))$ na $\mathcal{R}^n$, je třeba, abychom vektor $\xi(x)$ „rovnoběžně přenesli“ do bodu $x + \Delta x$ a vyjádřili jej jako lineární kombinaci vektorů báze v tomto bodě, indukované příslušným souřadnicovým systémem. Nechť ξ je vektorové pole na $\mathcal{R}^n$. Označme $(z^1(x), \ldots, z^n(x)))$ standardní souřadnice bodu $\in \mathcal{R}^n$ a

$$\xi(x) = \xi^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \Xi^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_x$$

vektor $\xi(x)$ vyjádřený jednak v souřadnicích $(\mathcal{V},\varphi)$, jednak ve standardních souřadnicích. Dále označme

$$\xi(x+\Delta x)=\xi^i(x+\Delta x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x+\Delta x}$$

vektor reprezentující vektorové pole ξ v bodě $x+\Delta x=(x^1(x),\ldots,x^j(x)+\Delta x,\ldots,x^n(x))$. Konečně, definujme

$$\tilde{\xi}(x+\Delta x)=(\tilde{\xi}^i(x+\Delta x))\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x+\Delta x}=\Xi^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial z^i}\right)_{x+\Delta x}$$

jako vektorové pole shodné s vektorovým polem ξ paralelně přeneseným o Δx. Správná definice derivace složek vektorového pole ξ má tvar

$$\frac{\partial\xi^i}{\partial x^j}=\lim_{\Delta x^j\to 0}\frac{\xi^i(\ldots,x^j+\Delta x^j,\ldots)-\tilde{\xi}^i(\ldots,x^j+\Delta x^j,\ldots)}{\Delta x^j}.$$

Příklad 5. Vliv křivočarých souřadnic na definici derivace složek vektorových polí názorně vysvětlíme na případu vektorových polí v $\mathcal{R}^2$, kde zvolíme atlas tvořený polárními souřadnicovými systémy $\{(\mathcal{U},\varphi)\}$, $\varphi(x,y)=(r(x,y),\phi(x,y))$, $x=r(x,y)\cos\phi(x,y)$, $y=r(x,y)\sin\phi(x,y)$, (x,y) jsou standardní souřadnice na $\mathcal{R}^2$. Báze v tečných prostorech k $\mathcal{R}^2$ indukované polárními souřadnicovými systémy mají tvar

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial x}+\sin\phi\frac{\partial}{\partial y}\,,\ \frac{\partial}{\partial\phi}=-r\sin\phi\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\phi\frac{\partial}{\partial y}$$

a naopak

$$\frac{\partial}{\partial x}=\cos\phi\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\,,\ \frac{\partial}{\partial y}=\sin\phi\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\cos\phi\frac{\partial}{\partial\phi}\,.$$

Nechť ξ je vektorové pole na $\mathcal{R}^2$. Pro jeho vyjádření ve standardním a polárním souřadnicovém systému platí:

$$\xi=\xi^x\frac{\partial}{\partial x}+\xi^y\frac{\partial}{\partial y}=\xi^r\frac{\partial}{\partial r}+\xi^\phi\frac{\partial}{\partial\phi},$$

$$(\xi^r,\xi^\phi)=(\xi^x\cos\phi+\xi^y\sin\phi\,,\ -r^{-1}\xi^x\sin\phi+r^{-1}\xi^y\cos\phi).$$

Při paralelním přenosu vektorového pole ξ v $\mathcal{R}^2$ jsou složky ξ^x a ξ^y přenášeného vektoru stále stejné a rovny hodnotám ve výchozím bodě. Uvažme přenos podél souřadnicové křivky polárního souřadnicového systému $\phi=$ konst. z bodu o polárních souřadnicích (r,ϕ) do bodu $x+\Delta x=(r+\Delta r,\phi)$. Definujme *paralelně přenesené* vektorové pole $\tilde{\xi}$ vztahem

$$\tilde{\xi}(r+\Delta r,\phi)=\tilde{\xi}^r\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}+\tilde{\xi}^\phi\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}\equiv\xi^x(r,\phi)\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}+\xi^y(r,\phi)\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}.$$

Platí

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}=\cos\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{(r+\Delta r)}-\frac{1}{r+\Delta r}\sin\phi\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r+\Delta r,\phi)},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_{(r+\Delta r,\phi)} = \sin\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)_{(r+\Delta r,\phi)} + \frac{1}{r+\Delta r}\cos\phi\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r+\Delta r,\phi)} .$$

Z definičního vztahu dostáváme pro složky $\tilde{\xi}^r$ a $\tilde{\xi}^\phi$ vektorového pole $\tilde{\xi}$ v bodě $(r+\Delta r,\phi)$ vztahy

$$\tilde{\xi}^r(r+\Delta r,\phi) = \xi^r(r,\phi) \;\;,\;\; \tilde{\xi}^\phi(r+\Delta r,\phi) = \xi^\phi(r,\phi)\frac{r}{r+\Delta r} \approx \xi^\phi(r,\phi)\left(1-\frac{\Delta r}{r}\right).$$

Předpokládejme, že vektorové pole ξ má ve válcových souřadnicích konstantní složky, tj. $\xi^r(x) = \xi^r(x+\Delta x)$, $\xi^\phi(x) = \xi^\phi(x+\Delta x)$ pro libovolné x, $x+\Delta x$. Kdybychom pro výpočet derivací složek tohoto vektorového pole podle souřadnic r a ϕ použili definice užívané ve standardních souřadnicích, dostali bychom nulové hodnoty. Použití této definice by však bylo chybné vzhledem k tomu, že bázové vektory $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r,\phi)}$ a $\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r+\Delta r,\phi)}$ jsou různě „dlouhé“. Správně je třeba psát

$$\xi(r+\Delta r,\phi) - \tilde{\xi}(r+\Delta r,\phi) = \xi^\phi(r,\phi)\frac{\Delta r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\phi}\right)_{(r+\Delta r,\phi)} ,$$

a tedy

$$\frac{\partial\xi^r}{\partial r} = 0\,,\quad \frac{\partial\xi^\phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\xi^\phi\,.$$

Úvahy z příkladu 5 nyní zobecníme. Nechť $\{(\mathcal{R}^n, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^n})\}$ je atlas určený globálním souřadnicovým systémem na $\mathcal{R}^n$ a nechť $(z^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$ jsou standardní souřadnice. Obecné (křivočaré) souřadnice označme $(x^i)_{i\in\{1,\dots,n\}}$. Matice přechodu od (z^j) k (x^i) je $(\alpha^i_j(x))$, $i,j=1,\dots n$. Pak

$$\xi(x) = \xi^i(x)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \xi^i(x)\,\alpha^j_i(x)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_x ,$$

$$\xi(x+\Delta x) = \xi^i(x+\Delta x)\,\alpha^j_i(x+\Delta x)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_{x+\Delta x} ,$$

Vektorové pole $\tilde{\xi}$ představující paralelně přenesené vektorové pole ξ je definováno vztahem

$$\tilde{\xi}(x+\Delta x) = \tilde{\xi}^i(x+\Delta x)\,\alpha^j_i(x+\Delta x)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_{x+\Delta x} = \xi^i(x)\,\alpha^j_i(x)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_{x+\Delta x} .$$

Označme $x = (x^1,\dots,x^k,\dots,x^n)$. Nechť $x+\Delta x = (x^1,\dots,x^k+\Delta x^k,\dots,x^n)$. Pak

$$\Delta\xi = \xi(\dots,x^k+\Delta x^k,\dots) - \tilde{\xi}(\dots,x^k+\Delta x^k,\dots) =$$

$$\Big(\xi^i(\dots,x^k+\Delta x^k,\dots)\,\alpha^j_i(\dots,x^k+\Delta x^k,\dots) - \xi^i(\dots,x^k,\dots)\,\alpha^j_i(\dots,x^k,\dots)\Big)\left(\frac{\partial}{\partial z^j}\right)_{x+\Delta x} =$$

$$= \Big(\xi^i(..., x^k+\Delta x^k, ...)\,\alpha_i^j(..., x^k+\Delta x^k, ...) - \xi^i(..., x^k, ...)\,\alpha_i^j(..., x^k, ...)\Big) \times$$
$$\times \beta_j^l(..., x^k+\Delta x^k, ...)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_{x+\Delta x},$$

kde $\beta = \alpha^{-1}$. Rozvojem funkcí v okolí bodu x a s uvážením lineární aproximace dostaneme po úpravě

$$\Delta\xi = \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} - \xi^i \alpha_i^j \frac{\partial \beta^l}{\partial x^k}\right)_x \Delta x^k \left(\frac{\partial}{\partial x,}\right)_{x+\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x^k \to 0} \frac{\xi^l(\ldots, x^k+\Delta x^k, \ldots) - \tilde{\xi}^l(\ldots, x^k-\Delta x^k, \ldots)}{\Delta x^k} = \frac{\partial \xi^k}{\partial x^k} + \xi^i \left(-\alpha_i^j \frac{\partial \beta_j^l}{\partial x^k}\right).$$

Složky takto definovaného vektorového pole nazýváme *kovariantní derivací* vektorového pole ξ a značíme

$$\nabla_k \xi = \nabla_k \xi^l \frac{\partial}{\partial x^l} = \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \xi^i \Gamma_{ik}^l\right) \frac{partial}{\partial x^l} = \left[\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \xi^i \left(-\alpha_i^j \frac{\partial \beta_j^l}{\partial x^k}\right)\right] \frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Soubor veličin $(\Gamma_{ik}^l)_{i,j,k \in \{1,\ldots,n\}}$ je příkladem tzv. *Levi-Civitovy konexe.*

Příklad 6.: Souřadnicím v příkladu 5. odpovídá označení $x = z^1$, $y = z^2$, $r = x^1$, $\phi = x^2$. Dosazením do obecného vztahu pro $(\Gamma)_{ik}^l$ dostaneme:

$$\Gamma_{rr}^r = 0,\ \Gamma_{rr}^\phi = 0,\ \Gamma_{\phi r}^r = 0,\ \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r},\ \Gamma_{r\phi}^r = 0,\ \Gamma_{r\phi}^\phi = \frac{1}{r},\ \Gamma_{\phi\phi}^r = -r,\ \Gamma_{\phi\phi}^\phi = 0.$$

Výpočet proveďte a vyjádřete kovariantní derivace $\nabla_r \xi^r$, $\nabla_r \xi^\phi$, $\nabla_\phi \xi^r$, $\nabla_\phi \xi^\phi$.

5.3 Lineární konexe

V tomto odstavci definujeme lineární konexi axiomaticky. Nechť $\mathcal{VX}$ je množina všech vektorových polí na varietě $\mathcal{X}$.

Lineární (afinní) konexe na $\mathcal{X}$:

Zobrazení $\nabla : \mathcal{VX} \times \mathcal{VX} \ni (\xi, \zeta) \longrightarrow \nabla_\xi \zeta \in \mathcal{VX}$ s vlastnostmi

- **KON 1:** $\nabla_\xi(\zeta + \lambda) = \nabla_\xi \zeta + \nabla_\xi \lambda$
- **KON 2:** $\nabla_{\xi+\zeta}(\lambda) = \nabla_\xi \lambda + \nabla_\zeta \lambda$
- **KON 3:** $\nabla_{(f\xi)} \zeta = f \nabla_\xi \zeta$
- **KON 4:** $\nabla_\xi(f\zeta) = \partial_\xi f \cdot \zeta + f \nabla_\xi \zeta$

∇_ξ je *operátor kovariantní derivace* ve směru ξ.

Nechť $(\mathcal{U},\varphi)$ je souřadnicový systém na $\mathcal{X}$ a $(e_1,\ldots,e_n)$ indukované báze tečných prostorů v bodech $x\in\mathcal{U}$. Každý z vektorů $\nabla_{e_j}e_i$ je lineární kombinací báze v daném bodě, tj.

$$\nabla_{e_j}e_i=\Gamma^k_{ji}e_k\ \Rightarrow\ \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

kde $(\Gamma^k_{ji})_{i,j,k\in\{1,\ldots,n\}}$ jsou koeficienty této lineární kombinace. Užitím **KON3** dostáváme

$$\nabla_{e_k}\xi=\nabla_{e_k}(\xi^l e_l)=(\partial_{e_k}\xi^l)e_l+\xi^l\nabla_{e_k}e_l=\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}e_l+\xi^i\Gamma^s_{kl}e_s,$$

a tedy, při označení $\nabla_{e_k}=\nabla_k$,

$$\nabla_k\xi=\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}+\xi^i\Gamma^l_{ki}\right)e_l=\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x^k}+\xi^i\Gamma^l_{ki}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Pomocí **KON 1** a **KON 3** pak

$$\nabla_\zeta=\nabla_{\zeta^j e_j}(\xi^l e_l)=\zeta^j\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}+\xi^i\Gamma^l_{ji}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Poznámka: Všimněmě si, že kovariantní derivace vektorových polí není závislá va derivacích složek vektorového pole, v jehož směru derivujeme, na rozdíl od derivace Lieovy, kde

$$\partial_\zeta\xi=\left(\zeta^j\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}-\xi^j\frac{\partial\zeta^l}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}.$$

Paralelní přenos: Označení

- $\mathcal{C}$ křivka v $\mathcal{X}$, $\mathcal{C}:\ (a,b)\ni t\longrightarrow\mathcal{C}(t)\in\mathcal{X}$,
- $(\mathcal{U},\varphi)$ souřadnicový systém, pro který $\mathcal{C}(a,b)\subset\mathcal{U}$,
- $\xi\mid_{\mathcal{C}(t)}=\xi^j(\mathcal{C}(t))\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\mathcal{C}(t)}$ vektorové pole podél $\mathcal{C}$,
- $\zeta=\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\mathrm{d}x^j\mathcal{C}(t)}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\mathcal{C}(t)}$ tečný vektor ke křivce $\mathcal{C}$.

Řekneme, že vektor ξ se *paralelně přenáší* podél $\mathcal{C}$, je-li $\nabla_\zeta\xi=0$ pro každou hodnotu $t\in(a,b)$.

Z podmínky

$$\zeta^j\left(\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}+\xi^i\Gamma^l_{ji}\right)_{\mathcal{C}}=0\ ,\quad \zeta^j=\frac{\mathrm{d}x^j\mathcal{C}(t)}{\mathrm{d}t}$$

plyne, s uvážením vztahu $\frac{\mathrm{d}x^j\mathcal{C}(t)}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi^l}{\partial x^j}=\frac{\mathrm{d}\xi^l}{\mathrm{d}t}$,

$$\frac{\mathrm{d}\xi^l}{\mathrm{d}t} + \Gamma^l_{ji} \frac{\mathrm{d}x^j \mathcal{C}(t)}{\mathrm{d}t} \xi^i = 0.$$

Geodetiky:

Nechť vektorové pole ξ je paralelně přenášeno podél křivky $\mathcal{C}$, k níž je vektor $\xi(\mathcal{C}(t))$ každém jejím bodě tečný, tj. $\nabla_\xi \xi = 0$. Křivka $\mathcal{C}$ se nazývá *geodetika*. Pak

$$\frac{\mathrm{d}\xi^l}{\mathrm{d}t} + \Gamma^l_{ji}\xi^j\xi^i = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 x^l}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^l_{ji} \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Předchozí rovnice jsou *rovnicemi geodetiky.*

Příklad 7. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$, $\varphi(x) = (\phi(x), \theta(x))$ je sférický souřadnicový systém na sféře $\mathcal{S}^2$ a $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial\theta}$ a $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial\phi}$ jsou souřadnicová vektorová pole. Ukažte, že křivky $\mathcal{C}_1 : \theta\mathcal{C}_1(t) = \theta_0 + t$, $\phi\mathcal{C}_1(t) = \phi_0$ a $\mathcal{C}_2 : \theta\mathcal{C}_2(t) = \theta_0$, $\phi\mathcal{C}_2(t) = \phi_0 + t$ jsou geodetiky. Použijte konexi odvozenou z indukované metriky na sféře. (Nyní již lze zodpovědět otázku z úvodu odstavce 5.2, týkající se paralelního přenosu souřadnicových vektorových polí spjatých se sférickými souřadnicemi podél poledníků a rovnoběžek na sféře.)

Příklad 8. Nechť $(\mathcal{U}, \varphi)$ je polární souřadnicový systém na $\mathcal{R}^2$ (viz příklad 5.). S využitím lineární konexe (Γ^l_{ji}) z příkladu 5 vyjádříme složky $(\nabla_\zeta\xi)^r$ a $(\nabla_\zeta\xi)^\phi$ kovariantní derivace vektorového pole ξ podél vektorového pole ζ.

$$\nabla_\zeta \xi = \zeta^j \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^j} + \xi^i \Gamma^l_{ji} \right) \frac{\partial}{\partial x^l}\ , \text{ kde } i,j,l \in \{r,\phi\},\ x^r = r,\ x^\phi = \phi$$

.

$$(\nabla_\zeta\xi)^r = \zeta^r \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial r} + \xi^r \Gamma^r_{rr} + \xi^\phi \Gamma^r_{r\phi} \right) + \zeta^\phi \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial \phi} + \xi^r \Gamma^r_{\phi r} + \xi^\phi \Gamma^r_{\phi\phi} \right),$$

$$(\nabla_\zeta\xi)^\phi = \zeta^r \left(\frac{\partial \xi^\phi}{\partial r} + \xi^r \Gamma^\phi_{rr} + \xi^\phi \Gamma^\phi_{r\phi} \right) + \zeta^\phi \left(\frac{\partial \xi^\phi}{\partial \phi} + \xi^r \Gamma^\phi_{\phi r} + \xi^\phi \Gamma^\phi_{\phi\phi} \right).$$

Podle příkladu 5 je $\Gamma^r_{\phi\phi} = -r$, $\Gamma^\phi_{\phi r} = \Gamma^\phi_{r\phi} = r^{-1}$, ostatní složky lineární konexe jsou nulové. Dostáváme tedy

$$(\nabla_\zeta\xi)^r = \zeta^r \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial r} \right) + \zeta^\phi \left(\frac{\partial \xi^r}{\partial \phi} - r\xi^\phi \right),\ (\nabla_\zeta\xi)^\phi = \zeta^r \left(\frac{\partial \xi^\phi}{\partial r} + \frac{1}{r}\xi^\phi \right) + \zeta^\phi \left(\frac{\partial \xi^\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r}\xi^r \right).$$

Rovnice pro geodetiky mají, s ohledem na složky lineární konexe z příkladu 5, tvar

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r \left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \right)^2 = 0\ ,\ \frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Přímo prověřte, že například souřadnicové křivky tvaru $\mathcal{C}_r : \mathcal{R}^+ \ni t \longrightarrow (r\mathcal{C}_r(t), \phi\mathcal{C}_r(t)) = (r_0 + t, \phi_0)$ jsou geodetikami. Vektorové pole generující tyto křivky je $\zeta_r = \frac{\partial}{\partial r}$. Prověřte, že se vektorové pole ζ_r skutečně paralelně přenáší podél křivky $\mathcal{C}_r$. Jak se přenáší souřadnicová vektorová pole $\zeta_x = \frac{\partial}{\partial x}$ a $\zeta_y = \frac{\partial}{\partial y}$ indukovaná globálním souřadnicovým systémem $(\mathcal{R}^2, \mathrm{id}_{\mathcal{R}^2})$ podél křivek generovaných souřadnicovými vektorovými poli ζ_r a ζ_ϕ, indukovanými polárními souřadnicovými systémy a naopak? Ukažte, že každá přímka v $\mathcal{R}^2$ je rovněž geodetikou.

Příklad 9. Na dvojrozměrné sféře $\mathcal{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathcal{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ zvolte atlas $\mathcal{AT}_{\mathcal{S}^2} = \{(\mathcal{U}_i,\varphi_i),\, i \in I\}$ se souřadnicovými systémy spjatými se sférickými souřadnicemi, tj. $\varphi_i(x,y,z) = (\theta\varphi_i(x,y,z), \phi\varphi_i(x,y,z))$, $\theta\varphi_i(x,y,z) = \arccos z$, $\phi\varphi_i(x,y,z) = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $x \geq 0$, $\phi\varphi_i(x,y,z) = \pi + \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ pro $x < 0$ pro $(x,y,z) \in \mathcal{U}_i$. Vyjádřete složky lineární konexe $(\Gamma)^l_{jl}$, $j,k,l \in \{\theta,\phi\}$, a ukažte, že všechny hlavní kružnice na sféře jsou geodetikami.

5.4 Kovariantní derivace tenzorových polí

Kovariantní derivace tenzorových polí libovolného typu je definována na základě požadavku přenesení pravidla **KON4**, platného pro kovariantní derivaci součinu funkce a vektorového pole, i na ostatní typy součinů. Nechť $\mathcal{FX}$ je množina funkcí a $\mathcal{VT}^p_q\mathcal{X}$ je množina tenzorových polí typu (p,q) na varietě $\mathcal{X}$.

Kovariantní derivace funkce:

zobrazení $\qquad \nabla : \mathcal{VX} \times \mathcal{FX} \ni (\xi, f) \longrightarrow \nabla_\xi f = \partial_\xi f \in \mathcal{FX}\,.$

Kovariantní derivace tenzorového pole typu $(0,1)$*:*

zobrazení $\qquad \nabla : \mathcal{VX} \times \mathcal{VT}^0_1\mathcal{X} \ni (\xi, \omega) \longrightarrow \nabla_\xi \omega \in \mathcal{VT}^0_1\mathcal{X}$

s vlastností

$$\nabla_\xi < \omega \mid \zeta >= \partial_\xi < \omega \mid \zeta >=< \nabla_\xi\omega \mid \zeta > + < \omega \mid \nabla_\xi\zeta > \;\; \forall \zeta \in \mathcal{VX}\,.$$

Kovariantní derivace tenzorového pole typu (p,q)*:*

zobrazení $\qquad \nabla : \mathcal{VX} \times \mathcal{VT}^p_q\mathcal{X} \ni (\xi, \tau) \longrightarrow \nabla_\xi \tau \in \mathcal{VT}^p_q\mathcal{X}$

s vlastností

$$\nabla_\xi(\tau_1 \otimes \tau_2)\nabla_\xi\tau_1 \otimes \tau_2 + \tau_1 \otimes (\nabla\xi\tau_2)\,.$$

Určíme složky kovariantní derivace tenzorového pole daného 1−formou $\omega \in \mathcal{VT}^*\mathcal{X}$ podle vektorového pole $\zeta \in \mathcal{VX}$:

Pro $f =< \omega \mid \zeta >$ platí

$$\nabla_\xi f = \partial_\xi f = \partial_\xi < \omega \mid \zeta >=< \nabla_\xi\omega \mid \zeta > + < \omega \mid \nabla_\xi\zeta > \;.$$

Ve složkách

$$\frac{\partial}{\partial x^i}(\omega_j\zeta^j)\xi^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}\xi^i = (\nabla_\xi\omega)_i\zeta^i + \omega_i(\nabla_\xi\zeta)^i = (\nabla_\xi\omega)_i\zeta^i + \omega_i\xi^j\left(\frac{\partial\zeta^i}{\partial x^j} + \zeta^j\Gamma^i_{jk}\right)\,.$$

Odtud po úpravě

$$(\nabla_\xi \omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^k}\xi^k - \omega_j \xi^k \Gamma^j_{ki}\,.$$

Příklad 10. Dosazením do předchozího vztahu dokažte, že pro $\xi = \frac{\partial}{\partial x^l}$ platí

$$(\nabla_l \omega)_i = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^l} - \omega_j \Gamma^j_{li}\,, \quad \text{pro } \omega = \mathrm{d}x^i \text{ pak } \quad \nabla_l\, \mathrm{d}x^i = -\Gamma^i_{lk}\, \mathrm{d}x^k\,.$$

Nechť na varietě $\mathcal{X}$ je dána metrika $g = g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$. Pomocí vlastnosti kovariantní derivace tenzorového součinu a s využitím výsledku příkladu 10 vyjádříme kovariantní derivaci metriky g:

$$\nabla_k g = (\nabla_k g_{ij})\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\,\nabla_k \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes \nabla_k \mathrm{d}x^j =$$

$$= \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}(-\Gamma^i_{kl}\mathrm{d}x^l) \otimes \mathrm{d}x^j + g_{ij}\,\mathrm{d}x^i \otimes (-\Gamma^j_{kl}\,\mathrm{d}x^l \Rightarrow$$

$$\nabla_k g = \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ki} - g_{il}\Gamma^l_{kj}\right)\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j\,.$$

Je-li na varietě zadána metrika, vzniká přirozený požadavek její *kovariantní konstantnosti*:

$$\nabla_\lambda g(\xi, \zeta) = 0$$

pro libovolné dva vektory ξ a ζ, které se paralelně přenášejí podél křivky, k níž je vektor λ tečným vektorem.

Příklad 11. Dokažte, že z požadavku kovariantní konstantnosti metriky plyne vztah $(\nabla_k g)_{ij} = 0$ pro $1 \le i, j \le n$.

Metrická či *metricky kompatibilní konexe:*

Konexe Γ, definovaná na varietě s metrikou, zajišťující kovariantní konstantnost metriky. Cyklickou záměnou indexů ve vztahu

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - g_{lj}\Gamma^l_{ki} - g_{il}\Gamma^l_{kj} = 0$$

a s využitím symetrie metriky dostáváme

$$-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + T^l_{ki} g_{lj} + T^l_{kj} g_{li} - 2\Gamma^l_{\{ji\}} g_{lk} = 0$$

kde

$$T^l_{ki} = \Gamma^l_{ki} - \Gamma^l_{ik} = \Gamma^l_{[ki]}\,, \quad \Gamma^l_{\{ji\}} = \frac{1}{2}(\Gamma^l_{ji} + \Gamma^l_{ij})\,.$$

Tenzor (T^l_{ki}), $1 \le i,k,l \le n$, symetrický v obou dolních indexech, je tzv. *tenzor torze*, výrazy

$$\left\{ {l \atop ij} \right\} = \frac{1}{2} g^{lk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right) = \Gamma^l_{\{ji\}} - \frac{1}{2}(T^l_{ji} + T^l_{ij})$$

představují tzv. *Christoffelovy symboly.* Dále platí (dokažte)

$$\Gamma^l_{ji} = \Gamma^l_{[ji]} + \Gamma^k_{\{ji\}} = \left\{ {l \atop ji} \right\} + \frac{1}{2}(T^l_{ij} + T^l_{ji} + T^l_{ij}) \,.$$

Torze: $\quad T(\xi,\zeta) = \nabla_\xi \zeta - \nabla_\zeta \xi - [\xi,\zeta].$

Pro $T = 0$ představuje Γ tzv. *konexi bez torze.*

Příklad 12. Uvažme metriku na dvojrozměrné sféře ve tvaru

$$g = \mathrm{d}\theta \otimes \mathrm{d}\theta + \sin^2\theta \, \mathrm{d}\phi \otimes \mathrm{d}\phi \,.$$

Příklad 13. Tento příklad názorně dokumentuje odlišnost mezi Lieovou a kovariantní derivací.

$$\nabla_\zeta \xi = \zeta^k \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^k}} = \zeta^k \left(\frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \xi^i \Gamma^l_{ik} \right) \frac{\partial}{\partial x^l} = \left(\zeta^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} + \zeta^i \zeta^l \Gamma^l_{ki} \right) \frac{\partial}{\partial x^l}$$

$$\partial \zeta \, \xi = \left(\zeta^k \frac{\partial \xi^l}{\partial x^k} - \xi^k \frac{\partial \zeta^l}{\partial x^k} \right) \frac{\partial}{\partial x^l} \,.$$

Složky těchto operací se liší výrazy $\zeta^i \xi^l \Gamma^l_{ki}$ a $-\xi^l \frac{\partial \zeta^l}{\partial x^k}$ a splývají tehdy, je-li

$$\xi^k \left(\zeta^i \Gamma^l_{ki} + \frac{\partial \zeta^l}{\partial x^k} \right) = 0 \quad \text{pro libovolné } (\xi^k) \,.$$

Tuto podmínku lze splnit pro zadanou konexi (Γ^l_{ik} a vhodně vybraná vektorové pole ζ. Ve speciálním případě *plochých* prostorů, kdy $\Gamma^l_{ik} = 0$, $1 \le i,k,l \le n$, je podmínka splněna pro konstantní vektorová pole ζ. Uvažme případ plochého prostoru $\mathcal{R}^2$ se standardními souřadnicemi (x^1, x^2). Označme (r, ϕ) válcové souřadnice a

$$\zeta = \frac{\partial}{\partial \phi} = \frac{\partial x^1}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial x^2}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x^2} = -x^2 \frac{\partial}{\partial x^1} + x^1 \frac{\partial}{\partial x^2}.$$

Platí například

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = 0.$$

Výraz na levé straně rovnosti charakterizuje změnu vektoru $\frac{\partial}{\partial x^1}$ při paralelním přenášení podél vektorového pole $\zeta = \frac{\partial}{\partial \phi}$ a je nulový, i když se vektor ζ mění. Tento výsledkem dokumentuje skutečnost, že pojem „paralelní přenášení“ je definován vůči „okolnímu prostoru“ a jeho souvislost s vektorovým polem ζ je dána zakřivováním prostoru podél tohoto vektorového pole. V našem případě nezakřiveného prostoru je výsledek na vektorovém poli ζ nezávislý. Při paralelním přenosu tedy vlastně „hlídáme“ zachování určité konfigurace přenášeného vektorového pole ξ vůči okolnímu prostoru (varietě). Pro Lieovu derivaci vychází

$$\partial_{\frac{\partial}{\partial \phi}} \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right) = -\frac{\partial}{\partial x^2}.$$

V případě výpočtu Lieovy derivace sledujeme vývoj určité konfigurace vektorových polí ξ a ζ, v našem příkladu konkrétně úhel mezi nimi.

5.5 Křivost a torze

5.6 Levi–Civitova konexe