DODATKY

F) Fundamentální konstanty

Konstanta	Symbol (definiční vztah)	Hodnota v soustavě SI
Rychlost světla	c	$2{,}997925 \cdot 10^{8}$ m s^{-1}
Planckova konstanta	h	$6{,}626176 \cdot 10^{-34}$ J s
	$\hbar = h/2\pi$	$1{,}054589 \cdot 10^{-34}$ J s
Elementární náboj	e	$1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ C
Hmotnost elektronu	m_e	$9{,}10953 \cdot 10^{-31}$ kg
Hmotnost protonu	m_p	$1{,}67265 \cdot 10^{-27}$ kg
Hmotnost neutronu	m_n	$1{,}67495 \cdot 10^{-27}$ kg
Permeabilita vakua	μ_0	$4\pi \cdot 10^{-7}$ H m^{-1}
Permitivita vakua	$\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8{,}854188 \cdot 10^{-12} C^2 J^{-1} m^{-1}$
Konstanta jemné struktury	$\alpha = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \hbar c}$	0,00729735
	α^{-1}	137,03604
Comptonova vlnová délka elektronu	$\lambda\!\!\!^{-}_c = \hbar/m_e c$	$3{,}86159 \cdot 10^{-13}$ m
Bohrův poloměr	$a_0 = \lambda\!\!\!^{-}_c/\alpha$	$0{,}529177 \cdot 10^{-10}$ m
Ionizační energie pro atom H ($m_p \to \infty$)	$E_{I\infty} = \dfrac{\alpha^2 m_e c^2}{2}$	13,60580 eV (= 1 rydberg)
Rydbergova konstanta	$R_\infty = E_{I\infty}/hc$	$1{,}097373 \cdot 10^{5}$ cm^{-1}
Bohrův magneton	$\mu_B = \dfrac{e\hbar}{2m_e}$	$9{,}27408 \cdot 10^{-24}$ J T^{-1}
Boltzmannova konstanta	κ	$1{,}38066 \cdot 10^{-23}$ J K^{-1}

1 eV odpovídá	vyjádřeno ze vztahu
$1{,}602189 \cdot 10^{-19}$ J	
$\nu = 2{,}41797 \cdot 10^{14}$ Hz	$E = h\nu$
$\lambda = 1239{,}852$ nm	$\lambda = c/\nu$
$\lambda^{-1} = 8065{,}48$ cm^{-1}	
$T = 11604{,}5$ K	$E = \kappa T$

G) Tabulky Clebschových-Gordanových koeficientů pro skládání orbitálního momentu hybnosti a spinu elektronu

(V tabulkách je vlastně druhý sloupec zbytečný, neboť $m_j=m_l+m_s$; uveden je jen pro úplnost.)

i) $l = 0$, $s = 1/2$

j	m_j	m_l	m_s	$C^{j,m_j}_{0,0,1/2,m_s}$
1/2	1/2	0	1/2	1
1/2	-1/2	0	-1/2	1

ii) $l = 1$, $s = 1/2$

j	m_j	m_l	m_s	$C^{j,m_j}_{1,m_l,1/2,m_s}$
3/2	3/2	1	1/2	1
3/2	1/2	1	-1/2	$(1/3)^{1/2}$
		0	1/2	$(2/3)^{1/2}$
3/2	-1/2	0	-1/2	$(2/3)^{1/2}$
		-1	1/2	$(1/3)^{1/2}$
3/2	-3/2	-1	-1/2	1
1/2	1/2	1	-1/2	$(2/3)^{1/2}$
		0	1/2	$-(1/3)^{1/2}$
1/2	-1/2	0	-1/2	$(1/3)^{1/2}$
		-1	1/2	$-(2/3)^{1/2}$

iii) obecné l , $s = 1/2$

j	m_j	m_l	m_s	$C^{j,m_j}_{l,(m_j-m_s),1/2,m_s}$
$l+1/2$	m_j	$m_j+1/2$	-1/2	$(l-m_j+1/2)^{1/2}\ (2l+1)^{-1/2}$
		$m_j-1/2$	1/2	$(l+m_j+1/2)^{1/2}\ (2l+1)^{-1/2}$
$l-1/2$	m_j	$m_j+1/2$	-1/2	$(l+m_j+1/2)^{1/2}\ (2l+1)^{-1/2}$
		$m_j-1/2$	1/2	$-(l-m_j+1/2)^{1/2}\ (2l+1)^{-1/2}$

Poznámka:
Nenulové jsou pouze vyznačené koeficienty s odmocninou z kladné hodnoty.

H) Některé základní vztahy z teorie elektromagnetického pole

Maxwellovy rovnice jsou matematickým vyjádřením zákonů elektřiny a magnetismu, jejichž poznání bylo výsledkem usilovné práce řady velkých vědců 1.poloviny minulého století. Maxwellův vlastní příspěvek spočíval v přidání členu do jedné z rovnic, který nemohl být tehdy dostupnými přístroji experimentálně pozorován, ale bez něhož by rovnice nedávaly jako řešení elektromagnetické vlnění.

Ve vakuu bez nábojů a elektrických toků mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad \text{(H.1)}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{(H.2)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(H.3)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{(H.4)}$$

kde $\vec{E}$ je intenzita elektrického pole,
$\vec{B}$ je magnetická indukce,
ε_0 je permitivita vakua a
μ_0 je permeabilita vakua.

Číselná hodnota μ_0 se v soustavě SI definuje

$$\mu_0 = 4\pi \,.\, 10^{-7} \text{ H m}^{-1} \qquad \text{(H.5)}$$

(H je označení pro jednotku indukčnosti nazvanou henry.)
Číselná hodnota ε_0 se pak musí stanovit experimentálně :

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 . 10^{-12} \text{ F m}^{-1} \qquad \text{(H.6)}$$

Součin $\mu_0 \varepsilon_0$ má rozměr (rychlost)$^{-1}$ a jeho hodnota je

$$\mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 \qquad \text{(H.7)}$$

kde

$$c = 2{,}998 . 10^8 \text{ m s}^{-1} \qquad \text{(H.8)}$$

je rychlost světla ve vakuu.
Maxwellovým příspěvkem je dodání členu na pravé straně (H.4).

Je-li v prostoru nějaká látka a případně existují i náboje a toky, mají Maxwellovy rovnice tvar:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho_f \qquad \text{(H.9)}$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \qquad \text{(H.10)}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{(H.11)}$$

$$\operatorname{rot} H = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_f \qquad \text{(H.12)}$$

V rovnicích (H.9)-(H.12) je

ρ_f hustota volného elektrického náboje,

$\vec{j}_f$ hustota toku volných nábojů,

$\vec{D}$ vektor elektrické indukce a

$\vec{H}$ intenzita magnetického pole.

Fyzikální obsah rovnice (H.9) si můžeme ilustrovat na dielektriku tvořeném polarizovatelnými molekulami. Každá z molekul získá nějaký střední dipólový moment $\vec{d}$, úměrný lokálnímu elektrickému poli $\vec{E}^{loc}$. Je-li v jednotkovém objemu N takových molekul, je makroskopická polarizace $\vec{P}$ dána vztahem

$$\vec{P} = N\vec{d} = N\alpha\,\varepsilon_0\vec{E}^{loc} \qquad (H.13)$$

kde α je molekulární polarizibilita.

Lokální elektrické pole působící na molekulu je součtem vnějšího elektrického pole $\vec{E}$ a pole produkovaného okolními polarizovanými molekulami; pro izotropní prostředí je posledně jmenované pole úměrné $\vec{E}$ (pokud není vnější pole příliš silné), takže lze psát

$$\vec{P} = \chi\,\varepsilon_0\,\vec{E} \qquad (H.14)$$

Tato rovnice definuje elektrickou susceptibilitu dielektrika χ.

Elektrická indukce $\vec{D}$ se potom definuje vztahem

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = (1+\chi)\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \qquad (H.15)$$

kde ε_r je relativní permitivita.

Zdrojem vnějšího pole $\vec{E}$ jsou volné náboje rozložené s hustotou ρ_f, zatímco polarizace $\vec{P}$ má původ v polarizačních (vázaných) nábojích rozložených s hustotou ρ_v. Výsledná hustota elektrického náboje je součtem těchto dvou hustot. Divergence $\vec{D}$ je potom určována pouze hustotou volných nábojů ρ_f.

Druhá a třetí rovnice není přítomností látky v prostoru dotčena. Je tomu tak proto, že neexistují volné magnetické póly (monopóly).

Čtvrtá rovnice (H.12) obsahuje intenzitu magnetického pole $\vec{H}$ na místě magnetické indukce $\vec{B}$. Nejsou-li v prostoru magnetické látky, je prostě

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \qquad (H.16)$$

V přítomnosti magnetických materiálů indukuje aplikované pole $\vec{B}$ magnetizační proudy s hustotou $\vec{j}_M$ a tím magnetizaci materiálu $\vec{M}$ (je to analogie vzniku polarizace $\vec{P}$ vlivem elektrického pole). Pro neferomagnetické materiály je vztah mezi $\vec{B},\vec{H},\vec{M}$:

$$\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \vec{M} = \mu_r\,\mu_0\,\vec{H} \qquad (H.17)$$

kde μ_r je relativní permeabilita.

Energie elektromagnetického pole ve vakuu se vyjadřuje integrálem

$$U = \frac{1}{2}\int (\vec{E}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{H})\, d\tau \tag{H.18}$$

S tím je konsistentní a obecně užitečná představa, že energie je rozložena v poli s hustotou

$$u = \frac{1}{2}(\vec{E}.\vec{D} + \vec{B}.\vec{H}) \tag{H.19}$$

Tok elektromagnetické energie (energie prošlá jednotkovou plochou kolmou ke směru šíření za jednotku času) je dán Poyntingovým vektorem

$$\vec{G} = \vec{E} \times \vec{H} \tag{H.20}$$

Skalární a vektorový potenciál

Začneme s rovnicí (H.10): div $\vec{B}$= 0. Z vektorové analýzy (viz též dod.E) je známo, že div rot $\vec{A}$ = 0 pro libovolný vektor $\vec{A}$. Rovnice (H.10) tedy ukazuje, že $\vec{B}$ je rotací nějakého vektoru, tj. je možné psát

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \tag{H.21}$$

Protože ale také platí rot grad ψ = 0 pro libovolné skalární pole ψ, budou dávat týž vektor magnetické indukce vektory

$$\vec{A}\ ,\quad \vec{A}' = \vec{A} + \nabla\psi \tag{H.22}$$

Vezměme nyní rovnici (H.11): rot$\vec{E}$ = $-\partial\vec{B}/\partial t$. Dosadíme-li do ní $\vec{B}$ ve tvaru (H.21) a zaměníme pořadí derivací podle souřadnic a času, dostaneme

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

Výraz v závorce je vektor a jeho rotace má být rovna nule; to však znamená, že tento vektor musí být gradientem nějakého pole φ:

$$E + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{H.23}$$

(znaménko - je konvence výhodná v dalším).
V případě, že jde o statické pole kde nic nezávisí na čase, dává (H.23) vztah známý z elektrostatiky

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi \tag{H.24}$$

Obecně pak

$$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{H.25}$$

Rovnice (H.21), (H.25) představují jistou formu řešení dvou Maxwellových rovnic. Je z nich patrné, že k popisu elektromagnetického pole stačí jeden vektor $\vec{A}$ a skalární veličina φ ; $\vec{A}$ se nazývá vektorový potenciál a φ je skalární elektrostatický potenciál.

Co se však stane, zaměníme-li $\vec{A}$ na $\vec{A}'$ podle (H.22)? Obecně by se mělo změnit $\vec{E}$. Jestliže však budeme vždy měnit současně $\vec{A}$ na $\vec{A}'$ a φ na φ' takto

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\psi \quad , \quad \varphi' = \varphi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad , \tag{H.26}$$

potom se nebude ani $\vec{E}$, ani $\vec{B}$, měnit.

Relace (H.26) se nazývají kalibrační transformace. V teorii elektromagnetického pole se zpravidla užívá jedna z těchto kalibrací (ve vakuu; $\varepsilon_r = \mu_r = 1$):

i) Lorentzova kalibrace

$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{H.27}$$

ii) coulombovská kalibrace

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0 \tag{H.28}$$

K určení potenciálů $\vec{A}, \varphi$ se užijí dvě zbývající Maxwellovy rovnice; pro $\vec{A}$ a φ dají s Lorentzovou kalibrací rovnice (stále je $\varepsilon_r = \mu_r = 1$!)

$$\nabla^2\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{\vec{j}_f}{\varepsilon_0 c^2} \tag{H.29}$$

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{t^2} = \frac{\varrho_f}{\varepsilon_0} \tag{H.30}$$

Rovnice (H.29) je vlastně vektorovým zápisem tří rovnic téhož tvaru pro složky A_x, A_y, A_z . Rovnice (H.29),(H.30) představují jiné vyjádření elektromagnetických zákonů, ekvivalentní Maxwellovým rovnicím. Práce s nimi je většinou pohodlnější než s rovnicemi pro $\vec{E},\vec{B}$.

Ve vakuu, když $\varrho_f = 0$, má rovnice pro φ nulové řešení. Potom je možné zvolit v druhé rovnici (H.26) $\psi = \int \varphi \, dt$, takže $\varphi' = 0$. K popisu elektromagnetického pole v tomto případě tak stačí vektorový potenciál $\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad}\psi$.

I) Funkce operátorů

Nechť $\mathcal{A}$ je libovolný lineární operátor. Není obtížné definovat operátor $\mathcal{A}^n$; je to prostě operátor, jehož působení je ekvivalentní n-násobné aplikaci operátoru $\mathcal{A}$. Inversní operátor $\mathcal{A}^{-1}$, pokud existuje, se definuje tak, že musí splňovat relace

$$\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathbb{1} \tag{I.1}$$

Nechť dále je F funkce proměnné z, kterou lze v okolí nějakého bodu rozvinout v mocninnou řadu

$$F(z) = \sum_{n=0} f_n z^n \tag{I.2}$$

K ní můžeme definovat funkci operátoru $\mathcal{A}$ - $F(\mathcal{A})$ - takto

$$F(\mathcal{A}) = \sum_{n=0} f_n \mathcal{A}^n \qquad (I.3)$$

Např. operátor $e^{\mathcal{A}}$ je definován řadou (ponecháváme zde stranou otázku konvergence řady (I.3), která závisí na vlastních hodnotách operátoru $\mathcal{A}$ a na poloměru konvergence řady (I.2))

$$e^{\mathcal{A}} = \mathbb{1} + \mathcal{A} + \frac{1}{2!}\mathcal{A}^2 + \frac{1}{3!}\mathcal{A}^3 + \dots = \sum_{n=0} \frac{1}{n!}\mathcal{A}^n \qquad (I.4)$$

Je-li funkce $F(z)$ reálná, potom jsou i koeficienty f_n reálné. Dále, je-li operátor $\mathcal{A}$ hermitovský, je z (I.3) vidět, že operátor $F(\mathcal{A})$ je též hermitovský.

Nechť $|\varphi_a\rangle$ je vlastní vektor $\mathcal{A}$, příslušející k vlastní hodnotě a, takže platí

$$\mathcal{A}\,|\varphi_a\rangle = a\,|\varphi_a\rangle \qquad (I.5)$$

Postupným, n-násobným, působením operátoru $\mathcal{A}$ na obě strany (I.5) dostaneme

$$\mathcal{A}^n\,|\varphi_a\rangle = a^n\,|\varphi_a\rangle \qquad (I.6)$$

Nyní již je zřejmé, že působením operátoru $F(\mathcal{A})$ (je definován řadou (I.3)) na $|\varphi_a\rangle$ obdržíme

$$F(\mathcal{A})\,|\varphi_a\rangle = \sum_{n=0} f_n a^n\,|\varphi_a\rangle = F(a)\,|\varphi_a\rangle \qquad (I.7)$$

Platí tedy:

je-li $|\varphi_a\rangle$ vlastním vektorem operátoru $\mathcal{A}$, příslušejícím vlastní hodnotě a, potom $|\varphi_a\rangle$ je též vlastním vektorem operátoru $F(\mathcal{A})$ a odpovídající vlastní hodnota je $F(a)$.

Všimněme si ještě komutátorů v nichž vystupují funkce operátorů. Z definice (I.3) je zřejmé, že operátor $\mathcal{A}$ komutuje se všemi funkcemi $F(\mathcal{A})$, tj.

$$[\mathcal{A}, F(\mathcal{A})] = 0 \qquad (I.8)$$

Podobně, jestliže $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ komutují, potom také

$$[\mathcal{B}, F(\mathcal{A})] = 0 \qquad (I.9)$$

Situaci, kdy operátor $\mathcal{A}$ nekomutuje s $\mathcal{B}$ si předvedeme na konkrétním příkladu dvojice operátorů pro souřadnici a impuls. Postulovaný komutátor pro tyto operátory je

$$[\mathcal{X}, \mathcal{P}] = i\hbar$$

Pro libovolné tři operátory $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ platí

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}] = [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\,\mathcal{C} + \mathcal{B}\,[\mathcal{A}, \mathcal{C}] \qquad (I.10)$$

Užijeme-li vztah (I.10) na komutátor $[\mathcal{X}, \mathcal{P}^2]$, dostaneme

$$[\mathcal{X}, \mathcal{P}^2] = [\mathcal{X}, \mathcal{P}]\mathcal{P} + \mathcal{P}[\mathcal{X}, \mathcal{P}] = 2i\hbar\mathcal{P}$$

Indukcí je nyní možné dokázat, že

$$[\mathcal{X}, \mathcal{P}^n] = i\hbar n\mathcal{P}^{n-1} \tag{I.11}$$

Potom ale platí

$$[\mathcal{X}, F(\mathcal{P})] = \sum_n [\mathcal{X}, f_n\mathcal{P}^n] = \sum_n i\hbar n\, f_n\mathcal{P}^{n-1} = i\hbar\, F'(\mathcal{P})$$

kde $F'(z)=dF/dz$. (I.12)

Naprosto stejně dokážeme, že

$$[\mathcal{P}, G(\mathcal{X})] = -i\hbar\, G'(\mathcal{X}) \tag{I.13}$$