VIII. MOMENT HYBNOSTI

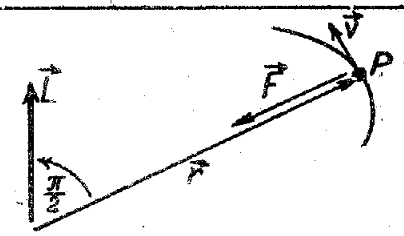
1. Základní vztahy

Výsledky kvantověmechanického řešení problému momentu hybnosti jsou potřebné v nejrůznějších oblastech fyziky: při klasifikaci atomových, molekulových a jaderných spekter, při studiu spinu elementárních částic, v teorii magnetismu atd.

Významná role momentu hybnosti v klasické mechanice je známa: výsledný moment hybnosti izolované fyzikální soustavy je konstantní (je to tzv. integrál pohybu). Tento závěr dokonce platí i pro některé neizolované soustavy. Tak např. pohybuje-li se hmotný bod P s hmotností m v centrálním potenciálovém poli (obr.18), míří síla, která působí na P, stále do bodu O, takže moment síly $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ je roven nule. Pro derivaci momentu hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ pak platí

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F} = 0 ,$$

neboť vektory $\vec{v}$, $\vec{p}=m\vec{v}$ jsou rovnoběžné a $\vec{M}=\vec{r} \times \vec{F} = 0$.



Obr.18
Hmotný bod P v centrálním potenciálovém poli se středem v O. Síla působící na P závisí pouze na velikosti polohového vektoru $\vec{r}$ a míří stále do bodu O.

V centrálním potenciálovém poli je tedy $\vec{L}$ konstantní a částice se tudíž musí pohybovat v rovině kolmé k $\vec{L}$ (důsledkem jsou známé Keplerovy zákony).

Uvedené závěry mají svůj ekvivalent i v kvantové mechanice. Už v odst. V.1.2 jsme momentu hybnosti $\vec{L}$ přiřadili operátor $\vec{\mathcal{L}} = \hat{\vec{r}} \times \hat{\vec{p}}$ a pro jeho složky $\mathcal{L}_x, \mathcal{L}_y, \mathcal{L}_z$ jsme dokázali komutační relace (V.14a); vzhledem k jejich významu si je zde napišme znovu:

$$\boxed{[\mathcal{L}_x , \mathcal{L}_y] = i\hbar \mathcal{L}_z \quad , [\mathcal{L}_y , \mathcal{L}_z] = i\hbar \mathcal{L}_x \quad , [\mathcal{L}_z , \mathcal{L}_x] = i\hbar \mathcal{L}_y} \qquad (1)$$

K nim jsme ještě pro operátor kvadrátu velikosti momentu hybnosti $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2$ získali komutátory (V.16)

$$\boxed{[\mathcal{L}^2 , \mathcal{L}_j] = 0} \qquad (j=x,y,z) \qquad (2)$$

Celá kvantové teorie momentu hybnosti stojí na těchto komutačních relacích. Na první pohled je z nich zřejmé (srov.IV.3.3), že není možné současně přesně určit všechny složky vektoru $\vec{L}$, tj. přesně stanovit velikost i směr $\vec{L}$. Jak plyne z (2), současně měřitelná je pouze velikost $\vec{L}$ a jedna z jeho složek.

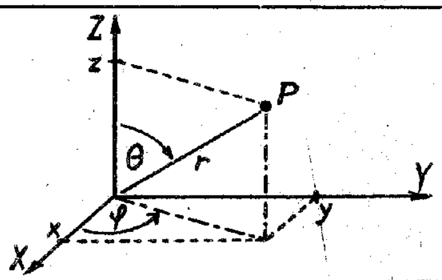
V souřadnicové reprezentaci jsou složky $\mathcal{L}$ (srov. (IV.95),(IV.96) a (V.12b))

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= y\hat{p}_z - z\hat{p}_y = \frac{\hbar}{i}\left(y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \mathcal{L}_y &= z\hat{p}_x - x\hat{p}_z = \frac{\hbar}{i}\left(z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \mathcal{L}_z &= x\hat{p}_y - y\hat{p}_x = \frac{\hbar}{i}\left(x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Mnohem výhodnější je však pracovat ve sférických souřadnicích neboť, jak uvidíme, operátory vztahující se k momentu hybnosti působí pouze na úhlové proměnné θ, φ a nikoliv na r. Místo kartézských souřadnic x,y,z budeme tedy určovat polohu bodu v prostoru sférickými souřadnicemi r, θ, φ (obr.19), které souvisí s x,y,z vztahy:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\varphi \end{aligned} \tag{4}$$

kde $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ a $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.



Obr.19
Poloha bodu P je určena buď kartézskými souřadnicemi x,y,z nebo sférickými souřadnicemi r, θ, φ ; svázány jsou transformačními vztahy (4).

Při přechodu ke sférickým souřadnicím (při výpočtu integrálů, při interpretaci vlnových funkcí ve sférických proměnných apod.) nesmíme zapomínat, že infinitesimální objemový element $d\tau = dxdydz$ se transformuje v

$$d\tau = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = r^2\, dr\, d\Omega \tag{5}$$

kde $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$ je infinitesimální element prostorového úhlu ve směru určeném úhly θ, φ .

Provedeme-li transformaci proměnných v operátorech (3) (což vyžaduje především pozornost a čas), dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_x &= i\hbar\left(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \mathcal{L}_y &= i\hbar\left(-\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \\ \mathcal{L}_z &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \end{aligned} \tag{6}$$

Odtud pak pro operátor $\mathcal{L}^2 = \mathcal{L}_x^2 + \mathcal{L}_y^2 + \mathcal{L}_z^2$ dostaneme

$$\mathcal{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$

nebo po úpravě (7)

$$\mathcal{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\operatorname{tg}\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right)$$

2. Vlastní funkce a vlastní hodnoty operátorů $\mathcal{L}_z$, $\mathcal{L}^2$

2.1) Řešení

Zjistili jsme, že spolu s velikostí momentu hybnosti můžeme přesně určit pouze jednu z jeho složek. Protože při naší volbě souřadné soustavy je nejjednodušší operátor $\mathcal{L}_z$, budeme se zabývat z-ovou složkou (osa z má zatím v prostoru libovolný směr).

Protože operátory $\mathcal{L}_z$, $\mathcal{L}^2$ komutují, je možné najít pro ně společný soubor ortonormálních vlnových funkcí (viz odst.IV.3.3), které budou řešením rovnic

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \psi(r,\theta,\varphi) = \alpha\, \psi(r,\theta,\varphi) \tag{8a}$$

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right) \psi(r,\theta,\varphi) = \beta\, \psi(r,\theta,\varphi) \tag{8b}$$

kde jsme označili vlastní hodnoty $\mathcal{L}_z$ jako α a pro $\mathcal{L}^2$ jako β.
Protože operátory $\mathcal{L}_z$, $\mathcal{L}^2$ nepůsobí na proměnnou r, můžeme ji ve funkcích $\psi(r,\theta,\varphi)$ považovat za parametr, který nebudeme dále vypisovat.

Vlastní hodnoty a funkce $\mathcal{L}_z$ - rovnice (8a)

Řešení rovnice (8a) je

$$\psi(\theta,\varphi) = f(\theta)\, e^{i\alpha\varphi/\hbar} \tag{9}$$

kde $f(\theta)$ je libovolná funkce θ (a ovšem i r).
V odst. II.3.4 jsme stanovili podmínky, kterým musí vyhovovat každá vlnová funkce; připomeňme si, že musí být: i) spojitá i s 1.derivací, ii) jednoznačná, iii) konečná, iv) kvadraticky integrovatelná. U funkce (9) je třeba zajistit jednoznačnost; při zvětšení úhlu o 2π musí platit (okrajová podmínka pro (8a))

$$\psi(\theta,\varphi+2\pi) = \psi(\theta,\varphi) \tag{10}$$

Aplikace podmínky (10) na řešení (9) vede k požadavku $\exp(i2\pi\alpha/\hbar) = 1$; odtud dostáváme vlastní hodnoty $\mathcal{L}_z$

$$\boxed{\alpha = m_l\,\hbar} \qquad m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{11}$$