$$\left(-\frac{d}{dX}+X\right)^n = (-1)^n \exp(X^2/2)\left(\frac{d}{dX}\right)^n \exp(-X^2/2)$$

a definiční vztah (28) pro Hermitovy polynomy, dostaneme již snadno vyjádření $\varphi_n(X)$, které po přechodu od X k proměnné x souhlasí s (30).

Závěrem jen zbývá upozornit na skutečnost, že všechny vlastnosti operátorů $\hat{a}$, $\hat{a}^+$,zavedených v tomto odstavci, jsou shodné s vlastnostmi bosonových kreačních a anihilačních operátorů z odstavce VI.4. Že této, na první pohled formální, shodě lze přiřadit velice efektivní fyzikální představu, ukážeme dále v odst.3.2.

3. Soubor nezávislých harmonických oscilátorů

3.1) Hamiltonián, jeho vlastní vektory a vlastní hodnoty

Uvažujme nyní o souboru N nezávislých (tj.vzájemně neinteragujících) harmonických oscilátorů s vlastními frekvencemi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$. Celková energie tohoto souboru je prostě součtem energií jednotlivých oscilátorů, takže klasický hamiltonián souboru je součtem hamiltoniánů tvaru (7)

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{p_i^2}{2\,m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 x_i^2\right] \tag{52}$$

kde x_i, $p_i = m_i \dot{x}_i$ je souřadnice a hybnost i-tého oscilátoru s vlastní frekvencí ω_i .

Kvantověmechanický hamiltonián souboru $\hat{H}$ dostaneme opět náhradou p_i operátorem $\hat{p}_i$ a x_i operátorem $\hat{x}_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$:

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{\hat{p}_i^2}{2\,m_i} + \frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \hat{x}_i^2\right] \tag{53}$$

Protože oscilátory jsou zcela nezávislé, nemůže měření na jednom z nich nijak ovlivnit stavy zbývajících N-1 oscilátorů; to však znamená (srov.odst.IV.3.3), že operátory vztahující se ke dvěma různým oscilátorům musí komutovat a jediné nenulové komutátory pak budou vždy (8b). Platí tedy

$$[\hat{x}_i\,,\,\hat{x}_j] = 0 \tag{54a}$$

$$(i,j=1,2,\ldots,N)$$

$$[\hat{p}_i\,,\,\hat{p}_j] = 0 \tag{54b}$$

$$[\hat{x}_i\,,\,\hat{p}_j] = i\hbar\,\delta_{ij} \tag{54c}$$

($\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$).

Pro každý z oscilátorů můžeme nyní provést transformace od operátorů $\hat{x}_i$, $\hat{p}_i$ k $\mathcal{X}_i$, $\mathcal{P}_i$ a potom k $\hat{a}_i$, $\hat{a}_i^+$ podle vztahů (9) a (31) (doplníme v nich pouze index $i=1,2,\ldots,N$). Hamiltonián (53) tak přejde na tvar

$$\boxed{\hat{H} = \sum_{i=1}^{N} \hbar\,\omega_i\,(\hat{a}_i^+\hat{a}_i + \tfrac{1}{2}) = \sum_{i=1}^{N} \hbar\,\omega_i\,(\hat{n}_i + \tfrac{1}{2})} \tag{55}$$

kde

$$\hat{n}_i = \hat{a}_i^+\,\hat{a}_i \tag{56}$$

a z komutačních relací (54) dostaneme

$$\boxed{[\hat{a}_i\,,\,\hat{a}_j] = 0\quad,\quad[\hat{a}_i^+\,,\,\hat{a}_j^+] = 0\quad,\quad[\hat{a}_i\,,\,\hat{a}_j^+] = \delta_{ij}} \tag{57}$$

Vlastní funkce (vektory) a vlastní hodnoty hamiltoniánu (53) (resp.(55)), tj. řešení stacionární Schrödingerovy rovnice

$$\hat{H}\,\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_N) = E\,\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_N) \tag{58a}$$

resp. k (55)

$$\hat{H}\,|n_1,n_2,\ldots,n_N\rangle = E\,|n_1,n_2,\ldots,n_N\rangle\;, \tag{58b}$$

snadno vytvoříme z již získaného řešení pro jeden oscilátor. Hamiltonián neinteragujících oscilátorů (částic) je totiž součtem hamiltoniánů pro jednotlivé oscilátory a jak víme (srov.např odst.VI.2), je v takovém případě mnohačásticová vlnová funkce $\Psi(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ ($|n_1,n_2,\ldots,n_N\rangle$) součinem jednočásticových vlnových funkcí

$$\Psi_{n_1,n_2,\ldots,n_N}(x_1,x_2,\ldots,x_N) = \varphi_{n_1}(x_1)\,\varphi_{n_2}(x_2)\ldots\varphi_{n_N}(x_N) \tag{59a}$$

resp.

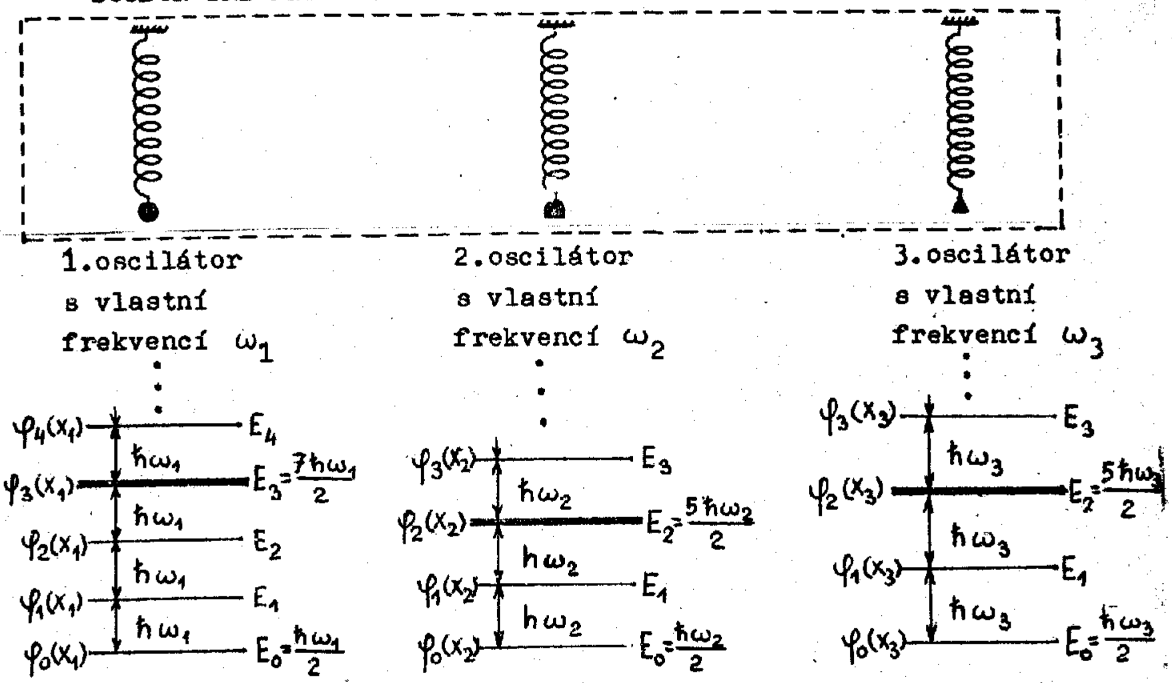
$$|n_1,n_2,\ldots,n_N\rangle = |n_1\rangle\cdot|n_2\rangle\ldots|n_N\rangle \tag{59b}$$

Vlastní hodnota energie příslušná ke stavu (59) je

$$E_{n_1,n_2,\ldots,n_N} = \hbar\,\omega_1(n_1+\tfrac{1}{2}) + \hbar\,\omega_2(n_2+\tfrac{1}{2}) + \ldots + \hbar\,\omega_N(n_N+\tfrac{1}{2}) \tag{60}$$

Vlnová funkce (stavový vektor) (59) odpovídá stavu souboru v němž 1.oscilátor (s frekvencí ω_1) je ve stavu $\varphi_{n_1}(x_1)$, 2.oscilátor (s frekvencí ω_2) je ve stavu $\varphi_{n_2}(x_2),\ldots$, N-tý oscilátor (s frekvencí ω_N) je ve stavu $\varphi_{n_N}(x_N)$. Schematické znázornění pro tři oscilátory je v obr.4.

SOUBOR TŘÍ NEZÁVISLÝCH HARMONICKÝCH OSCILÁTORU



Obr.4
Energiová spektra tří nezávislých harmonických oscilátorů.
Je-li 1.oscilátor ve stavu $\varphi_3(x_1)$, 2.oscilátor ve stavu $\varphi_2(x_2)$ a 3.oscilátor ve stavu $\varphi_2(x_3)$ $(n_1=3, n_2=2, n_3=2)$, je vlnová funkce souboru těchto tří oscilátorů rovna ($\varphi_{n_i}(x_i)$ jsou funkce (30))

$$\Psi_{3,2,2}(x_1,x_2,x_3) = \varphi_3(x_1)\,\varphi_2(x_2)\,\varphi_2(x_3)$$

nebo vlastní vektor ($|n_i\rangle$ jsou dány (49))

$$|3,2,2\rangle = |3\rangle|2\rangle|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3!}\sqrt{2!}\sqrt{2!}}\,\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_1^+\hat{a}_2^+\hat{a}_2^+\hat{a}_3^+\hat{a}_3^+|0\rangle =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\,(\hat{a}_1^+)^3(\hat{a}_2^+)^2(\hat{a}_3^+)^2\,|0\rangle$$

Energie souboru v tomto stavu je

$$E_{3,2,2} = \hbar\,\omega_1(3+\tfrac{1}{2}) + \hbar\omega_2(2+\tfrac{1}{2}) + \hbar\,\omega_3(2+\tfrac{1}{2})$$

3.2) Kvazičásticové pojetí

Předchozí výsledky dovolují interpretaci, která se v posledních dvou až tří desetiletích ukázala velice plodnou např. v teorii pevných látek. Její kořeny jsou však v kvantové teorii pole. Zde se pokusíme nastínit jen základní ideu.

Rozhodneme-li se odečítat energii oscilátoru od jeho základního stavu $E_0 = \hbar\omega/2$, bude jeho energie v n-tém excitovaném stavu $|n\rangle$ rovna $n\hbar\omega$. Hamiltonián, který dává tyto vlastní hodnoty (vlastní vektory se přitom nemění), je $\hat{H}' = \hat{H} - \hbar\omega/2$, tj

$$\hat{H}' = \hbar\omega\,\hat{a}^+\hat{a} = \hbar\omega\,\hat{n} \tag{61}$$

Pro tento hamiltonián tudíž platí (srov. (45),(46))

$$\hat{H}'|n\rangle = E_n'|n\rangle \tag{62a}$$

kde

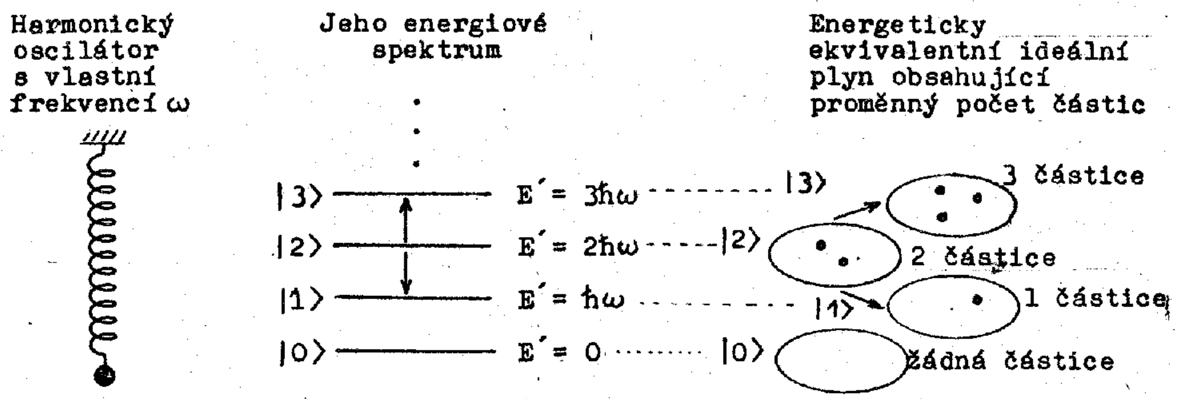
$$E_n' = n\hbar\omega \tag{62b}$$

Energie oscilátoru v excitovaném stavu $|n\rangle$ (tj. E_n') je tedy součtem n kvant energie velikosti $\hbar\omega$. Působením operátoru $\hat{a}^+$ na stav $|n\rangle$ dostáváme (viz (48)) stav $|n+1\rangle$, kterému přísluší energie $(n+1)\hbar\omega$; energie oscilátoru je tedy o jedno kvantum $\hbar\omega$ bohatší a protože ke vzniku (zrodu, kreaci) stavu s tímto dodatečným kvantem došlo působením operátoru $\hat{a}^+$ na stavový vektor $|n\rangle$, nazveme operátor $\hat{a}^+$ kreačním operátorem. Podobně působením operátoru $\hat{a}$ na $|n\rangle$ dostaneme stav $|n-1\rangle$ s energií $(n-1)\hbar\omega$, tj. stav o jedno kvantum $\hbar\omega$ chudší. Působením $\hat{a}$ na $|n\rangle$ tedy dojde k zániku (anihilaci) kvanta $\hbar\omega$ a proto nazveme $\hat{a}$ anihilačním operátorem.

Ještě názornější je působení operátorů $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ v souboru, který je z energetického hlediska právě studovanému ekvivalentní. Mějme ideální plyn (tj. bez interakce mezi částicemi) obsahující n stejných částic, každá s energií $\hbar\omega$. Celková energie tohoto souboru je součtem energií jednotlivých částic, tj. $n\hbar\omega$. Klasický hamiltonián tudíž je $H=n\hbar\omega$ a kvantověmechanický z něho dostaneme náhradou počtu částic v souboru n operátorem počtu částic $\hat{n}$. Vlastní hodnotou tohoto operátoru ve stavu s n částicemi - označíme ho $|n\rangle$ - musí být číslo n. Je zřejmé, že operátor $\hat{n} = \hat{a}^+\hat{a}$ definovaný vztahem (32) těmto požadavkům vyhovuje. Názorný smysl mají i operátory $\hat{a}$, $\hat{a}^+$ pomocí nichž je vyjádřen: relace (48) ukazují, že působením operátoru $\hat{a}^+$ na stav $|n\rangle$ s n částicemi dostaneme stav $|n+1\rangle$ odpovídající souboru (ideálnímu plynu) s n+1 částicemi; působením $\hat{a}^+$ na $|n\rangle$ došlo ke kreaci (vzniku) jedné částice. Podobně působením $\hat{a}$ na $|n\rangle$ dostaneme stav $|n-1\rangle$ s n-1 částicemi; působením $\hat{a}$ na $|n\rangle$ dojde k anihilaci (zániku) jedné částice (obr.5).

Zobecnění na soubor N nezávislých harmonických oscilátorů s vlastními frekvencemi $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$ je již snadné. Z energetického hlediska je soubor N oscilátorů ve stavu (59) (energii všech oscilátorů odečítáme od základního stavu)

$$|n_1, n_2, \ldots, n_N\rangle \tag{63}$$



Obr.5
Energeticky ekvivalentní soustavy: harmonický oscilátor ve stavu $|n\rangle$ a ideální plyn s n částicemi, každá s energií $\hbar\omega$. Přechodu oscilátoru do stavu $|n+1\rangle$ musí odpovídat v ekvivalentním plynu kreace částice, přechod oscilátoru do stavu $|n-1\rangle$ se naopak musí v plynu projevit anihilací částice.

ekvivalentní ideálnímu plynu v němž je

n_1 částic, každá s energií $\hbar\omega_1$
n_2 částic, každá s energií $\hbar\omega_2$
$\vdots$
n_N částic, každá s energií $\hbar\omega_N$

přičemž $n_i = 0,1,2,3,\ldots$ a $i = 1,2,3,\ldots,N$.

Působením operátoru $\hat{a}_i^+$ na stav (63) dostaneme vlastní vektor stavu v němž je o jednu částici s energií $\hbar\omega_i$ více (kreace částice); působení $\hat{a}_i$ dá naopak stav v němž je o jednu částici s energií $\hbar\omega_i$ méně (anihilace částice). Touto problematikou jsme se ostatně již zabývali v kapitole VI, odst.4.

Na první pohled se může zdát zbytečné zavádět navíc jakýsi ideální plyn složený z nějakých fiktivních částic. Skutečností ovšem je (uvidíme to hned v odst.5), že zpravidla ani soubor nezávislých harmonických oscilátorů nelze přímo ztotožňovat s jednotlivými kmitajícími částicemi studované soustavy (např. s kmitajícími atomy v molekule nebo krystalu). Přechod k další, energeticky ekvivalentní soustavě - kvazičásticovému ideálnímu plynu- poskytuje daleko jdoucí možnosti názorné interpretace řady fyzikálních dějů, především v pevných látkách. To je však problematika ležící již mimo rámec skripta; úvod k ní najdete např. v [15].