

## F0010 Přípravný kurz ke studiu, Cvičení 5

### 1. Logaritmus čísla

- (a) vypočítejte:  
 $\log_8 \sqrt{2}$
- (b) najděte všechna  $x \in (0; \infty)$ , pro něž platí:  
 $\log_{\frac{1}{4}} x = \frac{3}{2}$
- (c) najděte všechna  $a \in (0; \infty)$ , aby platilo:  
 $\log_a 5 = -1$

### 2. Počítání s logaritmy

- (a) upravte a potom rozhodněte, zda je číslo  $x$  kladné nebo záporné:  
 $x = 2 \log_{0.2} 4 + \log_{0.2} 3 - \log_{0.2} 6$
- (b) vypočítejte:  
 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 4) + 3^{\log_3 5} - \log 1$
- (c) vypočítejte  $x$  – odlogaritmujte ( $a$  a  $b$  jsou kladná reálná čísla):  
 $\log_2 x = 3 \log_2 a - \frac{1}{4} \log_2 b - 4$
- (d) vyjádřete pomocí  $\log a$ ,  $\log b$  a  $\log c$  ( $a$ ,  $b$  a  $c$  jsou kladná reálná čísla):  
 $\log \frac{a^2 b^3}{100 \sqrt{c}}$

### 3. Logaritmická a exponenciální funkce

- (a) určete takové celé číslo  $m$ , pro které platí nerovnost:  
 $m < \log_{\frac{1}{2}} 5 < m + 1$
- (b) který ze vztahů  $0 < a < 1$ ,  $a > 1$  platí, víte-li, že je splněno:  
 $\frac{1}{a^3} > \frac{1}{a^2}$
- (c) určete definiční obor, obor hodnot, průsečíky funkcí s osou  $x$  a  $y$  a načrtněte graf funkcí:  
 $y_1 = 3^{x+1} - 3$   
 $y_2 = -\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 4$   
 $y_3 = \log_2(x+4) - 1$

### 4. Exponenciální rovnice – řešte rovnice s neznámou $x \in \mathbb{R}$

- (a)  $2 \cdot 0.5^{x^2 + \frac{8}{3}x} = \frac{8}{\sqrt[3]{4}}$
- (b)  $7 \cdot 4^{-x+2} = 3 \cdot 4^{-x+3} - 5$
- (c)  $4^{2x} - 6 \cdot 4^x + 8 = 0$
- (d)  $2 \left(\frac{1}{4}\right)^x - 3 \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^x\right] \left(\frac{1}{4}\right)^{-1}$
- (e)  $3^x + 3^{x+1} = 7 \cdot 4^x - 4^{x+1}$

(f)  $2^x \cdot 3^{x-1} = 6$

(g)  $7 \cdot 6^x - 2 \cdot 4^x = 6 \cdot 9^x$

5. Řešte soustavu rovnic s neznámými  $x$  a  $y$ :

$$x^{y+1} = 27$$

$$x^{-y+1} = 3^{-1}$$

6. Logaritmické rovnice – řešte rovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$

(a)  $\log_2 \left[ \log_3 \left( \log_{\frac{1}{2}} x \right) \right] = 0$

(b)  $\log_2 (x^2 - x) = \log_2 x$

(c)  $\log_4 (3x + 2) - 2 \log_4 x = 2 - \log_4 8$

(d)  $\frac{2 \log 3x}{\log(2-7x)} = 1$

(e)  $4 \log_3 (2x + 1) + \log_3 \sqrt{2x + 1} = \frac{3}{2} \log_3^2 (2x + 1) - 6$

(f)  $\log 100x^2 + \log^2 10x^2 = 7$

(g)  $27x^2 = x^{\log_3 x}$

(h)  $\log_x 2 + \log_{4x} 8 = 2 \log_{4x} 16$

(i)  $2^{\log x} + 3^{\log x-1} = 2^{\log x+1} - 3^{\log x-2}$

7. Řešte soustavu rovnic s neznámými  $x$  a  $y$ :

$$x^2 + y^2 = 20$$

$$\log_2 x + \log_2 y = 3$$

8. Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$

(a)  $2^{3x-4} \geq 1$

(b)  $3^{x-5} < 0$

(c)  $\left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{8}$

(d)  $2^x - 5 \cdot 4^{x-2} < 1 - 2^{x-1}$

9. Řešte nerovnice s neznámou  $x \in \mathbb{R}$

(a)  $\log_3 (x + 4) \leq 4$

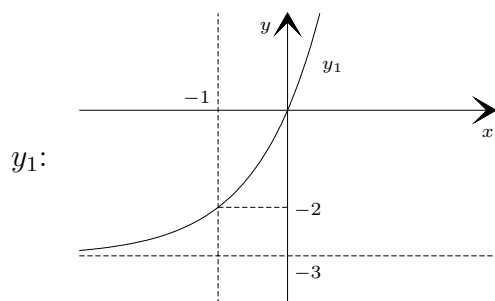
(b)  $\log_x 2 > 1$

(c)  $\log_{0.1} x \cdot \log_7 (4x - 1) > 0$

(d)  $\log \frac{|2x+1|}{3} < 1$

## Řešení

- (a)  $\frac{1}{6}$ , (b)  $\frac{1}{8}$ , (c)  $\frac{1}{5}$
- (a)  $\log_{0.2} 8 < 0$ , (b) 4, (c)  $\frac{a^3}{16\sqrt[4]{b}}$ , (d)  $2 \log a + 3 \log b - \frac{1}{2} \log c - 2$
- (a) -3 (b)  $0 < a < 1$   
(c)

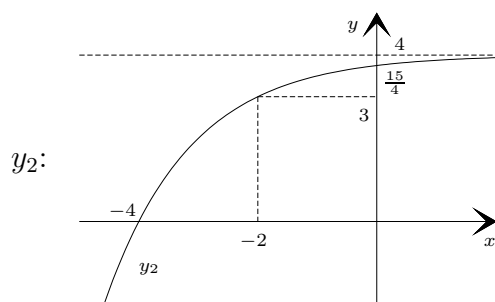


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = (-3; \infty)$$

$$x_0 = 0$$

$$y_0 = 0$$

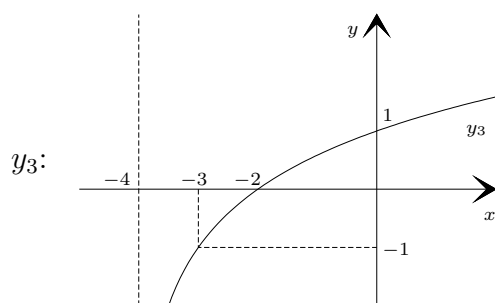


$$D_f = \mathbb{R}$$

$$H_f = (-\infty; 4)$$

$$x_0 = -4$$

$$y_0 = \frac{15}{4}$$



$$D_f = (-\infty; 4)$$

$$H_f = \mathbb{R}$$

$$x_0 = -2$$

$$y_0 = 1$$

- (a)  $-2; -\frac{2}{3}$ , (b) 2, (c)  $\frac{1}{2}; 1$ , (d) -2, (e) 1, (f)  $\frac{\log 18}{\log 6}$ , (g)  $-1; \log_{\frac{2}{3}} 2$
- $[3; 2]$
- (a)  $\frac{1}{8}$ , (b) 2, (c) 2, (d)  $\frac{2}{9}$ , (e)  $\frac{1}{3}; 40$ , (f) 0.01;  $\sqrt{10}$ , (g)  $\frac{1}{3}; 27$ , (h)  $\sqrt{2}$ , (i) 100
- $[4; 2], [2; 4]$

8. (a)  $[\frac{4}{3}; \infty)$ , (b)  $\emptyset$ , (c)  $(2; \infty)$ , (d)  $(-\infty; \log_2 \frac{4}{5}) \cup (2; \infty)$
9. (a)  $(-4; 77]$ , (b)  $(1; 2)$ , (c)  $(\frac{1}{2}; 1)$ , (d)  $(-\frac{31}{2}; \frac{29}{2}) - \{-\frac{1}{2}\}$

## Literatura

- Petáková, J., Matematika pro přípravu k maturitě a přijímacím zkouškám na vysoké školy, Prometheus, Praha, 1998.
- Polák, J., Přehled středoškolské matematiky, Prometheus, Praha, 1991.