Divergentní řady v poruchové teorii

Jan Fischer
Fyzikální ústav Akademie věd ČR, Praha

Je všeobecně přijímáno, byť ne rigorózně dokázáno, že poruchové řady pro fyzikální veličiny jsou v řadě teorií divergentní v celé komplexní rovině rozvojového parametru z, přičemž při vysokých řádech n se koeficienty chovají jako $n!$. Otázka, jak nakládat s takovými řadami, je aktuální především tehdy, když je parametr rozvoje velký.

Pro výpočet součtu není divergentní charakter řady nepřekonatelnou překážkou. Chápeme-li ji jako asymptotickou k hledané funkci (což je dnes obecně přijímáno), konečný součet existuje, ale není určen jednoznačně, i kdyby byly známy všechny koeficienty. K jednoznačnému určení je třeba využít nějaké dodatečné informace.

V našem příspěvku využíváme [1] informací o poloze a povaze singularit Laplaceovy transformanty rozvíjené funkce. Podle nich (zčásti dokázaných, zčásti předpokládaných) mají tyto singularity tvar nekonečně mnoha ekvidistantních větvicích bodů na kladné (IR) a na záporné (UV) reálné poloose Borelovy roviny u, přičemž řezy jsou vedeny po reálné ose směrem od počátku, takže funkce je v okolí počátku holomorfní a její mocninný rozvoj (odvozený z poruchové řady) konverguje v nenulovém kruhu roviny u. Jsou-li přítomny IR singularity, nelze k definici součtu využít Borelův integrál (neboť je veden po kladné poloose), ale volba jiných integračních křivek je možná. Volíme hlavní hodnotu.

K definici součtu poruchové řady využíváme analytického pokračování v rovině u. V ní IR a UV singularity omezují kruh konvergence rozvoje v mocninách u. Oblast konvergence lze podstatně rozšířit nahrazením mocninné řady v u řadou v mocninách $w(u)$, kde funkce $w(u)$ představuje konformní zobrazení roviny u (s výjimkou obou řezů) na jednotkový kruh v rovině $w(u)$. Jak bylo dokázáno [2], rozvoj v mocninách $w(u)$ zaručuje jednak analytické pokračování až k řezům, jednak nejrychlejší asymptotickou konvergenci řady. (Toto zobrazení je nazýváno optimální.) Tak lze asymptotický rozvoj funkce $F(z)$ v mocninách z nahradit řadou $\sum_{n=0}^{\infty} c_n W_n(z)$, kde koeficienty c_n lze vypočítat z původní mocninné řady. Nové rozvojové funkce $W_n(z)$ (které nahrazují mocniny z^n) jsou rovny $\frac{1}{z}\mathrm{PV}\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-u/z}[w(u)]^n \mathrm{d}u$; PV označuje hlavní hodnotu. Je-li nadto známa nějaká informace o povaze singularit $F(z)$, lze funkce $W_n(z)$ modifikovat tak, aby ji obsahovaly.

Předností funkcí $W_n(z)$ je, že obsahují singularity téhož typu jako $F(z)$, a vykazují i závislost na integrační cestě.

Zjistili jsme [1], že rozvoje ve funkcích $W_n(z)$ konvergují za dosti liberálních podmínek. Pracujeme na fenomenologických aplikacích této metody [3,4,5].

[1] I. Caprini, J. Fischer, Phys.Rev. D60 (1999) 054014; Phys.Rev. D62 (2000) 054007; Eur.Phys.J. C24 (2002) 127.

[2] S. Ciulli, J. Fischer, Nucl.Phys. 24 (1961) 465.

[3] J. Fischer, J. Chýla, I. Caprini, Acta Phys. Slovaca 52 (2002) 483.

[4] M. Rainiš, Diplomová práce, MFF UK 2004.

[5] M. Gajdoš, Diplomová práce, FJFI ČVUT 2006.