Příklady z lineární algebry

Michael Krbek

1 Opakování

1.1 Matice, determinanty

1. Je dána matice
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Určete M^2, MM^T, M^TM a vyjádřete M jako součet symetrické a antisymetrické matice!

2. Jsou dány matice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Zjistěte, které ze součinů matic $A^2, AB, AC, CA, BA, B^2, BC, CB, C^2$ existují, a tyto vypočtěte!

3. Zaveďme nové násobení $\bullet$ na množině matic definované vztahem
$$(A \bullet B)_{ij} = \sum_k (A)_{ik}(B)_{jk}.$$
Ukažte, že takto definované násobení není asociativní—tzn. $A \bullet (B \bullet C) \neq (A \bullet B) \bullet C$.

4. $\star$ Definujme novou operaci zvanou stopa $\mathrm{Tr} : A = (A)_{ij} \mapsto \sum_i (A)_{ii}$. Ukažte, že stopa součinu symetrické a antisymetrické matice je nulová.

5. Nechť A je antisymetrická matice, x sloupcový vektor. Ukažte, že
$$x^T A x = 0.$$

6. Následující soustavu rovnic řešte Gaussovou eliminací

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & a\,z & = & 1 \\ 3x & + & 4y & + & (2+3a)\,z & = & 5 \\ -x & + & y & + & z & = & b \end{array}$$

a určete závislost počtu řešení na hodnotách parametrů a, b.

7. Předpokládejme, že počítač pracuje na 4 platné číslice a exponent. Je dána soustava rovnic

$$\begin{array}{rcrcl} 4000 \cdot 10^{-7}\, x & + & 1402 \cdot 10^{-3}\, y & = & 1406 \cdot 10^{-3} \\ 4003 \cdot 10^{-4}\, x & - & 1502 \cdot 10^{-3}\, y & = & 2501 \cdot 10^{-3}. \end{array}$$

Počítač soustavu řeší Gaussovou eliminací pro oba pivotní prvky (výměna řádků). Vysvětlete rozdílné výsledky a určete, který výsledek je správný.

8. Jsou dány matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ a vektor $x = (x_i)$. Zapište následující výrazy maticově:

   (a) $\sum_{j,k} a_{ij} b_{jk} x_k$,

   (b) $\sum_{j} x_j b_{ij}$,

   (c) $\sum_{i,j} a_{ij} a_{kj} x_i$,

   (d) $\sum_{j,k} a_{ij} a_{kj} a_{km}$.

9. Nalezněte příklady

   (a) nenulových matic, jejichž součin je nulový,

   (b) kdy $AB = 0$, ale $BA \neq 0$,

   (c) součin dvou nenulových symetrických matic je antisymetrická matice.

10. Spočtěte $\det A$, $\det B$, $\det(AB)$, $\det A^{-1}$, kde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

11. Spočtěte
$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
pomocí
    (a) Gaussovy eliminace,
    (b) rozvojem podle prvního řádku,
    (c) rozvojem podle prvního sloupce.

12. V teorii supravodivosti řešíme následující rovnici pro energii soustavy E:
$$\begin{vmatrix} a-E & -b & -b & -b & -b \\ -b & a-E & -b & -b & -b \\ -b & -b & a-E & -b & -b \\ -b & -b & -b & a-E & -b \\ -b & -b & -b & -b & a-E \end{vmatrix} = 0.$$
Řešením rovnice dokažte, že existuje stav s energií $E = a - 4b$ a všechny ostatní stavy mají energii $E = a + b$. Dále řešte problém obecněji pro matici $n \times n$ stejného typu.

13. Nechť $A, B \in \mathfrak{M}_n^n$ a $AB = 1$. Řádky matice A jsou tvořeny vektory a_i, sloupce matice B vektory b_j. Co platí pro skalární součin (a_i, b_j)? Ukažte, že pro $n = 3$ platí
$$b_1 = \frac{a_2 \times a_3}{[a_1, a_2, a_3]} \quad b_2 = \frac{a_3 \times a_1}{[a_1, a_2, a_3]} \quad b_3 = \frac{a_1 \times a_2}{[a_1, a_2, a_3]},$$
kde $\times$ značí vektorový součin v $\mathbb{R}^3$ a $[a_1, a_2, a_3] = (a_1, a_2 \times a_3)$ smíšený součin v $\mathbb{R}^3$.

14. K řešení lineárních rovnic se používá Cramerovo pravidlo
$$Ax = b \qquad x_i = \frac{\det A_i}{\det A},$$
kde A_i je matice A, v níž je i-tý sloupec nahrazen sloupcovým vektorem pravé strany b. Dokažte pro případ $A \in \mathfrak{M}_3^3$ užitím tzv. Sarrusova pravidla.

1.2 Geometrické aplikace soustav lineárních rovnic

1. Určete vzájemnou polohu rovin

$$\begin{aligned} \rho: &\quad 5x - 2y + 4 = 0 \\ \sigma: &\quad 3x + z - 5 = 0 \\ \tau: &\quad 8x - 2y + z + 7 = 0. \end{aligned}$$

2. Určete vzájemnou polohu přímek

$$\begin{aligned} p: &\quad x + y - 1 = 0, \quad x - 2y + 3 = 0 \\ q: &\quad 3x + y - z + 13 = 0 \quad y - 2z - 8 = 0. \end{aligned}$$

2 Vektorové prostory

2.1 Báze, dimenze, reprezentace vektoru v bázi, přechod mezi bázemi

1. Pro vektorové prostory konečné dimenze a konečné systémy vektorů určete pravdivost následujících tvrzení a podejte jejich stručná objasnění:

   (a) Prázdná množina je podmnožinou každého vektorového prostoru.

   (b) Buď $V \neq \{0\}$ vektorový prostor různý od nulového vektorového prostoru. Potom V obsahuje vektorový podprostor $W \neq V$.

   (c) Buď S systém lineárně závislých vektorů. Každý prvek S je lineární kombinací ostatních prvků S.

   (d) Podsystém lineárně závislého systému vektorů je lineárně závislý.

   (e) Libovolný podsystém lineárně nezávislého systému vektorů je line-árně nezávislý.

   (f) Každý systém vektorů obsahující nulový vektor je lineárně závislý.

   (g) Průnik dvou podprostorů vektorového prostoru V je rovněž podprostorem V.

2. Buď $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ posloupnost reálných čísel. Pro každé k definujme vektor $v_k = (x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) \in \mathbb{R}^3$. Dokažte, že vektory v_k tvoří 2-rozměrný podprostor v $\mathbb{R}^3$ tehdy a jen tehdy, splňuje-li posloupnost $\{x_k\}$ diferenční rovnici
$$x_{k+2} + \lambda x_{k+1} + \mu x_k = 0.$$

3. Buď V^n n-rozměrný vektorový prostor ($n \geq 3$), $\{e_1, \dots, e_n\}$ jeho báze. Pro která n jsou následující systémy bázemi ve V?

   (a) $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n\}$,

   (b) $\{e_1 + e_2, e_2 + e_3, \dots, e_{n-1} + e_n, e_n + e_1\}$,

   (c) $\{e_1 - e_n, e_2 + e_{n-1}, \dots, e_n + (-1)^n e_1\}$.

4. Buď V^n vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{P}$. Ukažte, že je izomorfní s vektorovým prostorem $\mathbb{P}^n$. Dále ukažte, že každé dva vektorové prostory téže (konečné) dimenze jsou izomorfní.

5. Ve vektorovém prostoru V^3 jsou dány báze (e), (e') a (e'') takto:

$$\begin{aligned} e'_1 &= (1,3,0) & \qquad e''_1 &= (1,0,3) \\ e'_2 &= (0,1,1) & \qquad e''_2 &= (0,1,1) \\ e'_3 &= (0,-3,-1) & \qquad e''_3 &= (1,-1,0) \end{aligned}$$

vzhledem k bázi (e). Vektor a má vzhledem k bázi (e') složky $(3,17,9)$. Určete jeho složky vzhledem k bázi (e''). Vektor b má vzhledem k bázi (e'') složky $(1,1,-1)$. Určete jeho složky vzhledem k bázi (e').

2.2 Podprostory vektorových prostorů, lineární obal

1. Nechť $u, v, w \in V^n$ jsou vektory, pro něž platí rovnost $u + v + w = 0$. Ukažte, že $[u, v] = [v, w]$—tj. vektory u, v generují tentýž podprostor jako vektory v, w.

2. Buďte

$$\begin{aligned} L_1 &= [(0,2,3,1), (-1,-3,3,1), (1,1,1,1), (2,1,-3,5)], \\ L_2 &= [(-4,1,0,2), (2,5,1,0), (-8,13,2,-6)] \end{aligned}$$

vektorové podprostory ve V^4. Určete bázi a dimenzi podprostorů L_1, L_2, $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$.

3. Množina matic $\mathfrak{M}_2^2$ s přirozeně definovaným sčítáním a násobením skalárem tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$.

   (a) Popište lineární obal $\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$.

   (b) Ukažte, že matice typu $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ tvoří vektorový podprostor a najděte jeho bázi.

   (c) Ukažte, že systém matic

   $$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   je lineárně nezávislý. Co je lineárním obalem S? Zapište matici z předchozího bodu jako lineární kombinaci matic z S.

2.3 Vektorové prostory se skalárním součinem

1. Nechť $\mathbb{E}^n$ je vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{R}$. Pro každé dva vektory platí:

   Cauchyova-Bunjakovského nerovnost: $(a,b)^2 \le (a,a)(b,b)$.
   Trojúhelníková nerovnost: $\sqrt{(a+b,a+b)} \le \sqrt{(a,a)} + \sqrt{(b,b)}$.

   Dokažte!

   NÁVOD: Pro důkaz první nerovnosti upravujte $(a+tb, a+tb) \ge 0$, kde $t \in \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{E}^n$ jsou libovolné. Vzniká kvadratická nerovnice v proměnné t.

2. V $\mathbb{R}^2$ ukažte, že geometrická definice skalárního součinu

   $$(a,b) = |a||b| \cos \sphericalangle(a,b)$$

   je v souhlasu s axiomy skalárního součinu.

2.4 Ortonormální báze, ortogonalizační proces

1. Skalární součin v $\mathbb{U}^4$ je v bázi (e) reprezentován maticí

   $$G = \begin{pmatrix} 1 & i/2 & 0 & 0 \\ -i/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -i \\ 0 & 0 & i & 2 \end{pmatrix}.$$

   Prověřte, zda takto zadaná matice G splňuje axiomy skalárního součinu. Najděte bázi (f), která je vzhledem ke zvolenému skalárnímu součinu ortonormální. Najděte transformační matici od báze (e) k bázi (f). Vyjádřete skalární součin vektorů a, b, jejichž složky uvažujte jak k bázi (e), tak i (f).

2. $\star$ Jak je známo, tvoří systém $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ bázi ve vektorovém prostoru polynomů řádu n – $\mathfrak{P}^n$. Určete ortonormální bázi (ℓ), je-li zadán skalární součin předpisem

   $$\mathfrak{P}^n \times \mathfrak{P}^n \ni (a,b) \mapsto \int_0^\infty e^{-x} ab \, dx \in \mathbb{R}.$$

   ŘEŠENÍ: $\ell_j = \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}^2 (j-i)!(-1)^{j-i} x^i$ – až na násobek tzv. *Laguerrovy polynomy*.

2.5 Ortogonální průmět, ortogonální doplněk

1. Nechť (e) je ortonormální báze v $\mathbb{E}^4$ nad $\mathbb{R}$.

$$u = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}, 0), v = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2), L = [u, v]$$

   je vektorový podprostor. Určete matici ortogonální projekce P na podprostor L.

2. $\star$ Nechť $\mathfrak{P}^n$ je vektorový prostor z příkladu 2 předchozího oddílu. Ukažte, že přirozeně definovaná derivace je projekce. Určete matici této projekce vzhledem k bázi $\{1, x, \ldots, x^n\}$ a vzhledem k bázi (ℓ).

3. V $\mathbb{C}^n$ je dána kanonická báze (e) (v e_i je na i-tém místě 1 jinak 0), v níž je skalární součin vyjádřen jednotkovou maticí. Určete matici ortogonální projekce do podprostoru určeného vektory

$$a = \Big(\underbrace{1, \ldots, 1}_{n}\Big) \qquad b = \Big(\underbrace{1, i, -1, -i, \ldots, \overset{\text{j-tá pozice}}{(i)^{j-1}}, \ldots, (i)^{n-1}}_{n}\Big).$$

4. Metoda nejmenších čtverců. Předpokládejme, že měřitelná veličina $\hat{F}$ je určena k měřitelnými veličinami $\hat{X}_i$ lineárně. Platí tedy $\hat{F} = \alpha^i \hat{X}_i$. Provádíme sérii n měření $\hat{F}$, přičemž naměřené hodnoty (zatížené chybou) značíme $f^1, \ldots, f^n$, a zároveň měříme i $\hat{X}_i$, přičemž naměřené hodnoty značíme $x_i^1, \ldots, x_i^n$. Bylo změřeno $x_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $x_2 = (2, 3, 4, 5, 6)$ a $f = (2, 3, 5, 8, 13)$ ($n = 5$, $k = 2$). Určete koeficienty α^i metodou nejmenších čtverců.

3 Lineární transformace (operátory) na vektorových prostorech

3.1 Lineární transformace $\mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$

1. Ukažte, že obor hodnot lineární transformace $\phi : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^m$ je vektorovým podprostorem ve $\mathbb{V}^m$ a jádro ϕ vektorovým podprostorem ve $\mathbb{V}^n$.

2. Nechť $\mathfrak{P}^n(x)$ je vektorový prostor polynomů v proměnné x stupně nejvýše n. Definujeme zobrazení D takto:

$$\mathfrak{P}^n(x) \ni p(x) \to D(p(x)) = \frac{dp(x)}{dx} \in \mathfrak{P}^n.$$

   Ukažte, že takto definované zobrazení D je lineární transformace, určete jeho obor hodnot, jádro, hodnost a defekt.

3. Nechť $L \subseteq \mathbb{V}^n$ je vektorový podprostor, L' jeho libovolný, pevně zvolený doplněk. Nechť $\pi_{L,L'} : \mathbb{V}^n \to \mathbb{V}^n$ je projekce, definovaná vztahem $\pi_{L,L'}(a) = a_L$. Určete její obor hodnot, jádro, hodnost a defekt.

3.2 Reprezentace lineární transformace v bázi

1. Buď D lineární transformace z příkladu 2 předchozí části.

(a) Dokažte, že D není regulární.

(b) Zapište matici D v bázi $(1, x, \ldots, x^n)$ a $(1, x, x^2/2, \ldots, x^n/n)$. Přesvědčte se, že platí $\Delta' = T\Delta T^{-1}$, kde T je matice přechodu mezi bázemi a Δ, Δ' jsou vyjádření D v těchto bázích.

(c) Pro $n = 4$ zapište matici D v libovolné ortonormální bázi; skalární součin je definován vztahem

$$\mathfrak{P}^n \times \mathfrak{P}^n \ni (a, b) \mapsto \int_0^1 ab \; dx \in \mathbb{R}.$$

Dále najděte matici přechodu ke zkonstruované ortonormální bázi a jako v předchozím bodě prověřte transformační vztahy.

2. Nechť $\mathfrak{M}^n_n$ je prostor reálných matic $n \times n$. Víme již, že se jedná o vektorový prostor. Ukažte, že zobrazení

$$\text{antisym} : \mathfrak{M}^n_n \mapsto \mathfrak{M}^n_n,$$

které přiřazuje matici její antisymetrickou část, je lineární. Určete obor hodnot, jádro, hodnost a defekt. Pro $n = 3$ nalezněte reprezentaci tohoto zobrazení ve vhodně zvolené bázi.

3.3 Struktura prostoru lineárních zobrazení

1. Nalezněte izomorfismus vektorových prostorů $L(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m)$ a $\mathfrak{M}^n_m$. Tak ukažte, že $\dim L(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^m) = nm$.

3.4 Projekce

1. Nechť $\pi \in L(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^n)$ je projekce. Zjistěte, jakých hodnot může nabývat determinant matice reprezentující projekci π v libovolné bázi.

4 Problém vlastních hodnot

4.1 Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace z $\mathrm{L}(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^n)$

1. Určete spektrum a vlastní vektory lineární transformace φ, zadané v bázi (e) vektorového prostoru $\mathbb{V}^n$ maticí

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} -7 & 2 & -1 & 0 \\ -23 & 3 & -8 & 1 \\ 10 & -2 & 3 & 0 \\ -24 & 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Dokažte, že stopa (tj. součet všech diagonálních prvků) všech matic reprezentujících danou lineární transformaci $\varphi \in \mathrm{L}(\mathbb{V}^n, \mathbb{V}^n)$ v různých bázích je stejná a je rovna součtu všech charakteristických kořenů dané lineární transformace včetně násobnosti.

4.2 Podobnost matic, Jordanův normální tvar

1. Zjistěte, zda dvojice matic jsou si podobné.

   (a)
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   (b)
   $$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} -9 & 18 & -5 & -1 \\ -8 & 16 & -4 & -1 \\ -10 & 20 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Dále zjistěte podobnostní transformace převádějící jednu z matic na druhou.

2. Převeďte matice do Jordanova normálního tvaru a zjistěte příslušné podobnostní transformace.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} -16 & -17 & 87 & -108 \\ 8 & 9 & -42 & 54 \\ -3 & -3 & 16 & -18 \\ -1 & -1 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

4.3 Samoadjungovaná lineární zobrazení, spetrální reprezentace

1. Určete spektrální reprezentaci lineárních transformací zadaných v ortonormální bázi (e) v $\mathbb{U}^n$ následovně:

   (a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Uveďte příklady (aspoň 2) samoadjungovaných lineárních transformací v prostoru $\mathfrak{P}^n(x)$ (prostoru polynomů v proměnné x řádu nejvýše n), kde skalární součin definujeme

$$(a(x), b(x)) \mapsto \int_{-1}^{1} a(x)b(x)\,dx \quad .$$