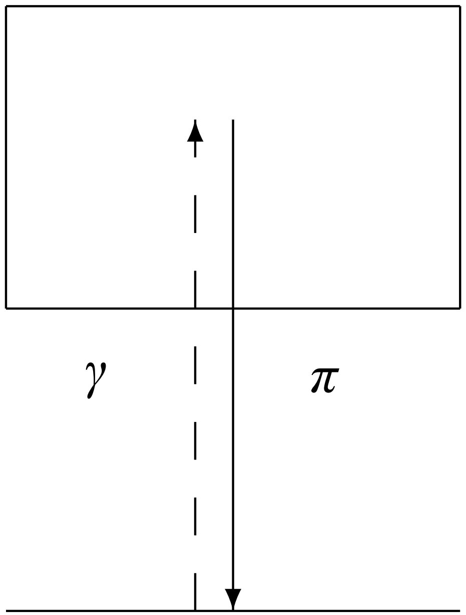
Reprezentace variační posloupnosti formami

1. Fibrované variety

Y, $\dim Y = m + n$



X, $\dim X = n$

π – projekce, surjektivní submerze

lokální popis–

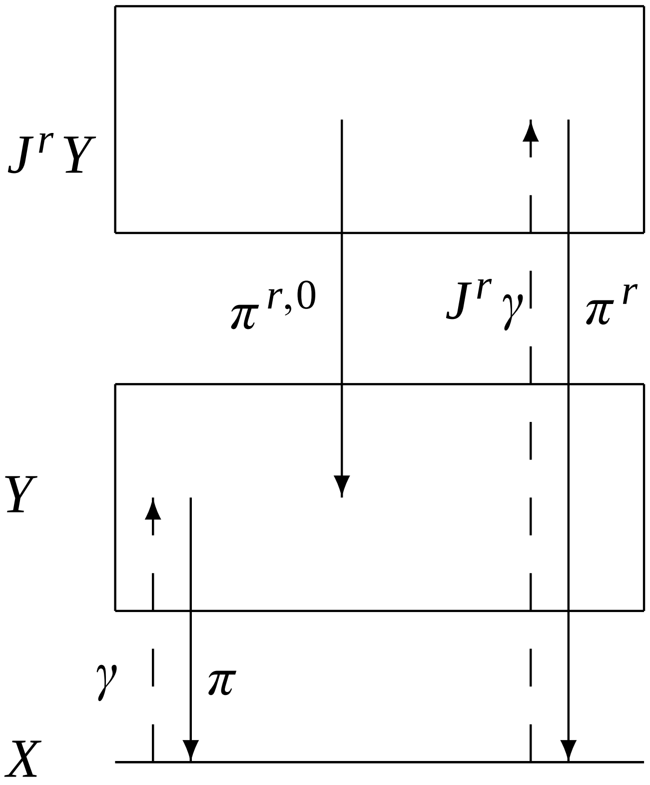
$\mathrm{pr}_1 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

adaptované souřadnice – x^i, y^σ, $1 \le i \le n$, $1 \le \sigma \le m$

lokální řezy – zobrazení $X \supset U \to Y$, $\pi \circ \gamma = \mathrm{id}_U$

příklady – mechanika, hydrodynamika, teorie pružnosti, teorie polí

2. Jetová prodloužení



varieta $J^r Y$ – r-té jetové prodloužení Y,
body $J^r_x \gamma$ – třídy ekvivalence řezů γ
s počátkem v x a s prvními $(r+1)$
shodnými členy Taylorových řad,
projekce – $\pi^r : J^r Y \to X$,
$\pi^{r,s} : J^r Y \to J^s Y, r > s$
lokální popis – $J^r Y \sim$
$\sim \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{mn} \times \mathbb{R}^{m\binom{n+1}{2}} \times \ldots$
indukované souřadnice – x^i, y^σ_I,
$0 \leq |I| \leq r$, kde $I = i_1 \ldots i_s$ je
multiindex, $|I| = s$ jeho délka.

3. Prodloužení lokálních izomorfizmů

$$
\begin{tikzcd}
J^r Y \arrow[r, "J^r\alpha"] \arrow[d, "\pi^{r,0}"] & J^r Y' \arrow[d, "\pi'^{r,0}"] \\
Y \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & Y' \arrow[d, "\pi'"] \\
X \arrow[r, "\alpha_0"] \arrow[u, bend left, "\gamma"] \arrow[uu, bend left=60, "J^r\gamma"] & X' \arrow[l, bend left, "\alpha_0^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

projektabilní zobrazení – $\alpha : Y \to Y'$ takové, že existuje $\alpha_0 : X \to X'$ a $\pi' \circ \alpha = \alpha_0 \circ \pi$

lokální izomorfizmy – Je-li α_0 lokálně difeomorfizmem, nazveme α lokálním izomorfizmem

prodloužení lokálních izomorfizmů –

$$J^r_x Y \ni J^r_x \gamma \to J^r\alpha(J^r_x\gamma) = J^r_{\alpha_0(x)} \alpha \circ \gamma \circ \alpha_0^{-1} \in J^r_{\alpha_0(x)} Y'$$

4. Prodloužení vektorových polí

projektabilní vektorové pole ξ – projektabilní jako zobrazení

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\xi"] \arrow[d, "\pi"'] & TY \arrow[d, "T\pi"] \\ X \arrow[r, "\xi_0"'] & TX \end{tikzcd}$$

prodloužení vektorového pole ξ – pomocí jednoparametrické grupy transformací α_t spojené s ξ

$$J^r\xi(J^r_x\gamma) = \left[\frac{\mathrm{d}\, J^r\alpha_t(J^r_x\gamma)}{\mathrm{d}\, t}\right]_{t=0}$$

5. Horizontalizace tečných vektorů

Tečnému vektoru $\Xi \in TJ^{r+1}Y$ v bodě $J_x^{r+1}\gamma \in J^{r+1}Y$ přiřadíme tečný vektor

$$\mathrm{h}\,\Xi = T_x J^r\gamma \cdot T\pi^{r+1} \cdot \Xi \in TJ^rY$$

v bodě $J_x^r\gamma = \pi^{r+1,r}(J_x^{r+1}\gamma) \in J^rY$. Komlementárně zkonstruujeme

$$\mathrm{p}\,\Xi = T\pi^{r+1,r} \cdot \Xi - \mathrm{h}\,\Xi.$$

Vektory $\mathrm{h}\,\Xi$ a $\mathrm{p}\,\Xi$ nazýváme horizontální a kontaktní komponentou vektoru Ξ, zobrazení h horizontalizací.

Uvažujme, co se přiřadí horizontalizací hodnotám vektorového pole ξ na $J^{r+1}Y$. Nevzniká vektorové pole, nýbrž obecnější objekt, tzv. vektorové pole podél zobrazení $\pi^{r+1,r}$.

6. Vektorová pole podél zobrazení

Nechť M a N jsou hladké variety, $f\colon M \to N$ jejich zobrazení. Vektorové pole a podél zobrazení f je zobrazení $a\colon M \to TN$ takové, že $p_N \circ a = f$, kde $p_N\colon TN \to N$ je přirozená projekce.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "a"'] & N \\ & TN \arrow[u, "p_N"'] \end{tikzcd}$$

S vektorovým polem a podél zobrazení f je spojena jednoparametrická rodina deformací f_t zobrazení f, $f_0 = f$.

Buď $F\colon N \to \mathbb{R}$ libovolná funkce

$$\left.\frac{\mathrm{d}\, F \circ f_t}{\mathrm{d}\, t}\right|_{t=0} = aF$$

Operace s vektorovým polem podél zobrazení

kontrakce– Nechť ρ je diferenciální q-formou na N, t.j. řezem $\Lambda^q T^* N \to N$, ξ_1, ξ_{q-1} (obyčejná) vektorová pole na M. Kontrakcí q-formy ρ vektorovým polem a podél f rozumíme

$$(f^* a \lrcorner \rho)(x)(\xi_1(x), \ldots, \xi_{q-1}(x)) =$$
$$= \rho(f(x))(a(x), T_x f \cdot \xi_1(x), \ldots, T_x f \cdot \xi_{q-1}(x)),$$

$(q-1)$ formu $f^* a \lrcorner \rho$ na M.

Lieova derivace – Buď f_t deformace příslušná k vektorovému poli a podél f. Potom Lieova derivace q-formy ρ na N je dána jako

$$\mathscr{L}_a^f \rho = \left. \frac{\mathrm{d}\, f_t^* \rho}{\mathrm{d}t} \right|_{t=0}$$

a jedná se o q-formu na M.

Zřejmě platí

$$\mathscr{L}_a^f \rho = \mathrm{d}\, f^* a \lrcorner \rho + f^* a \lrcorner \mathrm{d}\rho$$

a pro další p-formu η na N

$$\mathscr{L}_a^f (\rho \wedge \eta) = \mathscr{L}_a^f \rho \wedge f^* \eta + f^* \rho \wedge \mathscr{L}_a^f \eta.$$

7. Dekompozice forem na kontaktní komponenty

Diferenciální formu ρ na $J^r Y$ můžeme kanonicky rozložit pomocí horizontálních a kontaktních komponent vektorů, na nichž se vyčísluje. Nechť $\Xi_1, \dots, \Xi_q$ je q-tice vektorů v bodě $j_x^{r+1}\gamma \in J^{r+1}Y$. Pro každé $l \in \{1, \dots, q\}$ rozepíšeme

$$T\pi^{r+1,r}\,\Xi_l = \mathrm{h}\,\Xi_l + \mathrm{p}\,\Xi_l.$$

$$(\pi^{r+1,r})^*\rho(\Xi_1, \dots, \Xi_q)(J_x^{r+1}\gamma) = \rho(T\pi^{r+1,r}\,\Xi_1, \dots, T\pi^{r+1,r}\,\Xi_q)(J_x^r\gamma),$$

můžeme tedy sesbírat členy homogenní řádu $(q-k)$ v horizontálních komponentách $\mathrm{h}\,\Xi_1, \dots, \mathrm{h}\,\Xi_q$ a získáme

$$\mathrm{p}_k\,\rho(\Xi_1, \dots, \Xi_q) = \tfrac{1}{q!(q-k)!}\varepsilon^{l_1 \dots l_k\, l_{k+1} \dots l_q}\rho(\mathrm{p}\,\Xi_{l_1}, \dots, \mathrm{p}\,\Xi_{l_k}, \mathrm{h}\,\Xi_{l_{k+1}}, \mathrm{h}\,\Xi_{l_q}),$$

k-kontaktní komponentu formy ρ.

Kanonický rozklad formy: $\pi^{r+1,r}\rho = \sum_{k=0}^{q} \mathrm{p}_k\,\rho$.

q-forma ρ on J^rY se nazývá

- *kontaktní*, je-li $\mathrm{h}\,\rho = \mathrm{p}_0\,\rho = 0$, ekvivalentně $(J^r\gamma)^*\rho = 0$ pro všechny řezy γ,
- *k-kontaktní*, je-li $\mathrm{p}_l\,\rho = 0$, pro všechna $l \neq k$,
- *silně kontaktní*, je-li $q > n = \dim X$ a $\mathrm{p}_{q-n}\,\rho = 0$.

Kontaktní 1-formy.

$$\omega^\sigma_J = \mathrm{d}\,y^\sigma_J - y^\sigma_{Ji}\,\mathrm{d}\,x^i,$$

pro $0 \le |J| \le r-1$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned}
\omega^\sigma_J(\mathrm{h}\,\Xi) &= 0, & \qquad \omega^\sigma_J(\mathrm{p}\,\Xi) &= \Xi^\sigma_J - y^\sigma_{Ji}\xi^i,\\
\mathrm{d}\,x^i(\mathrm{h}\,\Xi) &= \xi^i, & \qquad \mathrm{d}\,x^i(\mathrm{p}\,\Xi) &= 0.
\end{aligned}$$

8. Rozklad vnější derivace

Rozklad diferenciální formy ρ na kontaktní komponenty indukuje rozklad vnější derivace na horizontální a kontaktní část

$$\mathrm{d_H}\,\rho = \sum_{k=0}^{q} \mathrm{p}_k\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}_k\,\rho, \qquad \mathrm{d_C}\,\rho = \sum_{k=0}^{q} \mathrm{p}_{k+1}\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}_k\,k\rho,$$

tak, že $$(\pi^{r+2,r})^*\,\mathrm{d}\,\rho = \mathrm{d_H}\,\rho + \mathrm{d_C}\,\rho$$

a platí $$\mathrm{d_H}\circ\mathrm{d_H} = \mathrm{d_C}\circ\mathrm{d_C} = 0 \qquad \mathrm{d_H}\circ\mathrm{d_C} = -\,\mathrm{d_C}\circ\mathrm{d_H},$$

a je-li η další t-forma na J^rY

$$\mathrm{d_H}(\rho\wedge\eta) = \mathrm{d_H}\,\rho\wedge\eta + (-1)^q\rho\wedge\mathrm{d_H}\,\eta,$$
$$\mathrm{d_C}(\rho\wedge\eta) = \mathrm{d_C}\,\rho\wedge\eta + (-1)^q\rho\wedge\mathrm{d_C}\,\eta.$$

9. Formální derivace

Vyjádříme vektorové pole $h\xi$ podél $\pi^{r+1,r}$ lokálně

$$\xi = \xi^i(x^j)\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|J|=0}^{r} \Xi_J^\sigma(x^j, y_I^\nu)\frac{\partial}{\partial y_J^\sigma}$$

$$h\xi = \xi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|J|=0}^{r} y_{Ji}^\sigma \frac{\partial}{\partial y_J^\sigma}\right)$$

a určíme Lieovu derivaci q-formy ρ na J^rY vzhledem k vektorovému poli $h\xi$ podél $\pi^{r+1,r}$. Takovou derivaci nazveme formální derivací.

Určíme formální derivace funkcí a bázových 1-forem.

$$\mathscr{L}_{\mathrm{h}\,\Xi}^{\pi^{r+1,r}} f = \xi^i \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{|J|=0}^{r} y^\sigma_{Ji} \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_J} \right),$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{h}\,\Xi}^{\pi^{r+1,r}} \mathrm{d}\, x^i = \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}\, x^j,$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{h}\,\Xi}^{\pi^{r+1,r}} \mathrm{d}\, y^\sigma_J = y^\sigma_{Ji} \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \mathrm{d}\, x^j + \xi^i \, \mathrm{d}\, y^\sigma_{Ji},$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{h}\,\Xi}^{\pi^{r+1,r}} \omega^\sigma_J = \xi^i \omega^\sigma_{Ji}.$$

Specielně pro lokální vektorová pole

$$\mathrm{d}_i = \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{|J|=0}^{r} y^\sigma_{Ji} \frac{\partial}{\partial y^\sigma_J}$$

dostaneme

$$\mathscr{L}_{\mathrm{d}_i}^{\pi^{r+1,r}} f = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{|J|=0}^{r} y^\sigma_{Ji} \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_J} =: \mathrm{d}_i\, f,$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{d}_i}^{\pi^{r+1,r}} \mathrm{d}\,x^j = 0 =: \mathrm{d}_i\, \mathrm{d}\,x^j,$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{d}_i}^{\pi^{r+1,r}} \mathrm{d}\,y^\sigma_J = y^\sigma_{Ji} =: \mathrm{d}_i\, \mathrm{d}\,y^\sigma_J,$$

$$\mathscr{L}_{\mathrm{d}_i}^{\pi^{r+1,r}} \omega^\sigma_J = \omega^\sigma_{Ji} =: \mathrm{d}_i\, \omega^\sigma_J.$$

Vlastnosti formálních derivací

– souvislost s horizontální derivací

$$\mathrm{d}_{\mathrm{H}}\,\rho = \mathrm{d}_i\,\rho \wedge \mathrm{d}\,x^i\,,$$

– transformační vlastnosti (adaptované souřadnice (x^i, y^σ), $(\bar{x}^i, \bar{y}^\sigma)$)

$$\mathrm{d}_i\,\rho = \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\bar{\mathrm{d}}_j\,\rho\,,$$

– komutace

$$\mathrm{d}_i\,\mathrm{d}_j\,\rho = \mathrm{d}_j\,\mathrm{d}_i\,\rho\,, \qquad \mathrm{d}_i\,\mathrm{d}\,\rho = \mathrm{d}\,\mathrm{d}_i\,\rho\,,$$

– Leibnizovo pravidlo

$$\mathrm{d}_i\,(\rho \wedge \eta) = \mathrm{d}_i\,\rho \wedge \eta + \rho \wedge \mathrm{d}_i\,\eta.$$

10. Variační počet na fibrovaných varietách

Nechť $\Omega \subset X$ je kouskem X a označme $\Gamma_\Omega(\pi)$ množinu řezů fibrované variety Y. Pull-back $J^r\gamma^*\rho$ n-formy ρ na J^rY je n-formou a tudíž ho lze přes Ω integrovat. Vzniká funkce

$$\Gamma_\Omega(\pi) \ni \gamma \to (\rho)_\Omega(\gamma) \int_\Omega J^r\gamma^*\rho \in \mathbb{R}.$$

Známým postupem získáme variaci indukovanou vektorovým polem Ξ

$$(\mathscr{L}_{J^r\Xi}\rho)_\Omega(\gamma) = \int_\Omega J^r\gamma^*\mathscr{L}_{J^r\Xi}\rho.$$

11. Variační posloupnost

Vzhledem k platnosti vztahu

$$\mathscr{L}_{\Xi}\rho = \Xi \lrcorner \mathrm{d}\,\rho + \mathrm{d}\,\Xi \lrcorner \rho$$

vzniká otázka, zda nejde Eulerovo-Lagrangeovo zobrazení získat faktorizací de Rhamovy posloupnosti diferenciálních forem na (otevřených podmnožinách) $J^r Y$ podle vhodně zvolené podposloupnosti. Ukazuje se, že ano.

Přirozená formulace problému je dána v jazyce teorie svazků.

Faktorizační podposloupnost

Nechť $W \subset Y$ je otevřená množina. Označme $\Omega^r_0 W$ okruh funkcí na otevřené množině $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}(W)$ a $\Omega^r_q W$ modul q-forem na otevřené množině $W^r = (\pi^{r,0})^{-1}(W)$

$$\Theta^r_1 W = \Omega^r_{1,\mathrm{c}} W$$
$$\Theta^r_q W = \mathrm{d}\,\Omega^r_{q-1,\mathrm{c}} W + \Omega^r_{q,\mathrm{c}} W \text{ pro } q \geq 2,$$

kde

$$\Omega^r_{q,\mathrm{c}} W = \begin{cases} \ker p_0 & \text{pro } q \leq n, \\ \ker p_{q-n} & \text{pro } q > n \end{cases}$$

Podmoduly $\Theta^r_q W$, kde $q > P = m\binom{n+r-1}{n} + 2n - 1$ jsou triviální.

Variační posloupnost

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \{0\} \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & & \{0\} \arrow[d] & & \{0\} \arrow[d] & & \\
 & & \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & \Theta^r_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d] & \Theta^r_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_{q-1}"] & \Theta^r_q \arrow[r, "\mathrm{d}_q"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_{P-1}"] & \Theta^r_P \arrow[r, "\mathrm{d}_P"] \arrow[d] & \{0\} \arrow[d] & \\
\{0\} \arrow[r] & \mathbb{R} \arrow[r] & \Omega^r_0 \arrow[r, "\mathrm{d}_0"] \arrow[dr, "E_0"'] & \Omega^r_1 \arrow[r, "\mathrm{d}_1"] \arrow[d] & \Omega^r_2 \arrow[r, "\mathrm{d}_2"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_{q-1}"] & \Omega^r_q \arrow[r, "\mathrm{d}_q"] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_{P-1}"] & \Omega^r_P \arrow[r, "\mathrm{d}_P"] \arrow[d] & \Omega^r_{P+1} \arrow[r, "\mathrm{d}_{P+1}", "E_{P+1}"'] & \cdots \\
 & & & \Omega^r_1/\Theta^r_1 \arrow[r, "E_1"'] \arrow[d] & \Omega^r_2/\Theta^r_2 \arrow[r, "E_2"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "E_{q-1}"'] & \Omega^r_q/\Theta^r_q \arrow[r, "E_q"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[r, "E_{P-1}"'] & \Omega^r_P/\Theta^r_P \arrow[ur, "E_P"'] \arrow[d] & & \\
 & & & \{0\} & \{0\} & & \{0\} & & \{0\} & &
\end{tikzcd}
$$

12. Formální diferenciální operátory

Diferenciální operátory

$$
\begin{tikzcd}
& J^r Z \arrow[d] \arrow[dr, "D^r"] & \\
& Z \arrow[d, shift left, "\tau"] & W \arrow[dl, shift right, "\rho"'] \\
& X \arrow[u, shift left, "\gamma"] \arrow[uu, bend left=60, "J^r \gamma"] \arrow[ur, shift right, "D(\gamma)"'] &
\end{tikzcd}
$$

přiřazují řezům $\tau : Z \to X$ řezy $\rho : W \to X$, tak že

$$D(\gamma) = D^r \circ J^r \gamma,$$

kde D^r je morfizmus fibrovaných variet nad X.

Formální diferenciální operátory

$$
\begin{tikzcd}
J^r VY \cong V J^r Y \arrow[d] \arrow[drr, "D^r"] & & \\
VY \arrow[d, shift left, "\pi \circ p"] & & \Lambda^q T^* J^r Y \arrow[dll, shift right, "\pi^r \circ P"'] \\
X \arrow[u, shift left, "\Xi"] \arrow[uu, bend left, "J^r \Xi"] \arrow[urr, shift right, "D(\Xi)"'] & &
\end{tikzcd}
$$

VY – vertikální vektory na Y, $VY = \ker T\pi$

$J^r VY \cong V J^r Y$ – existuje izomorfizmus nad Y

D^r – morfizmus vektorových bandlů

Lokální vyjádření

– vertikální vektorové pole $\Xi = \Xi^\sigma \partial/\partial y^\sigma$

– jeho prodloužení $J^r \Xi = \mathrm{d}_J \, \Xi^\sigma \partial/\partial y^\sigma_J$

– souřadnicové vyjádření formálního diferenciálního operátoru D

$$D(\Xi) = \sum_{|J|=0}^{r} (\mathrm{d}_J \, \Xi^\sigma) D_\sigma^J ,$$

– přepis pomocí ”per partes”

$$D(\Xi) = \sum_{|I|=0}^{r} \mathrm{d}_I \left(\Xi^\sigma \, \Delta_\sigma^I \right) ,$$

$$\Delta_\sigma^I = \sum_{|J|=0}^{r-|I|} \binom{|I|+|J|}{|I|} (-1)^{|J|} \, \mathrm{d}_J \, D_\sigma^{IJ} .$$

13. Eulerovy operátory

Pokud jsou oborem hodnot formálního diferenciálního operátoru D $(k-1)$-kontaktní $(n+k-1)$-formy $(k > 0)$, existuje globálně operátor nultého řádu O tak, že

$$D = O + \mathrm{d_H}\, R,$$

kde R je lokálně definovaný diferenciální operátor.

Diferenciální operátor podstatný pro naše úvahy je spojen s kontrakcemi.

$$D(\Xi) = J^r\,\Xi \lrcorner\, \mathrm{p}_k\, \rho\,,$$

kde ρ je libovolná $(n+k)$-forma na $J^r Y$.

Za výše uvedených předpokladů existuje Eulerův operátor O příslušný k D

$$O(\Xi) = \Xi^\sigma \sum_{|J|=0}^{r} (-1)^{|J|}\, \mathrm{d}_J \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma_J} \lrcorner\, \mathrm{p}_k\, \rho \right).$$

14. Reprezentace variační posloupnosti

Vzhledem k dualitě mezi vertikálními vektory a kontaktními 1-formami ω^σ lze invariantně zkonstruovat zobrazení

$$I^r_{n+k}(\rho) = \tfrac{1}{k}\omega^\sigma \wedge \sum_{|J|=0}^{r} (-1)^{|J|}\,\mathrm{d}_J \left(\frac{\partial}{\partial y^\sigma_J} \lrcorner\, \mathrm{p}_k\, \rho \right).$$

Toto zobrazení (společně se zobrazením $I^r_q = \mathrm{p}_0$ pro řády forem $q \leq n$) je reprezentací variační posloupnosti pomocí diferenciálních forem, tedy že podmoduly Θ^r_q jsou jádry zobrazení I^r_q.

Pro každou $(n+k-1)$-formu η na J^rY platí $I^r_{n+k}\,\mathrm{p}_k\,\mathrm{d}\,\mathrm{p}_k\,\eta = 0$.

15. Vlastnosti reprezentace

Zobrazení I_q^r mají následující vlastnosti

– platí

$$(\pi^{2r+1})^* \rho - I_{n+k}^r \rho \in \Theta_{n+k}^{2r+1},$$

a protože platí pokud $(\pi^{s,r})^* \rho \in \Theta_q^s$, pak $\rho \in \Theta_q^r$, dostaneme

$$I_{n+k}^r \rho = 0 \Rightarrow \rho \in \Theta_{n+k}^r$$

– projekční vlastnosti

$$I_{n+k}^{2r+1} I_{n+k}^r = I_{n+k}^{2r+1} (\pi^{2r+1,r})^* = (\pi^{4r+3,2r+1})^* I_{n+k}^r$$

– pro $(n + k - 1)$-formu η na $J^r Y$ také

$$I_{n+k+1}^{2r+1} \, \mathrm{d} \, I_{n+k}^r \, \mathrm{d} \, \eta.$$

Reprezentanti a zobrazení pro část posloupnosti relevantní ve variačním počtu

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^r_{n-1}/\Theta^r_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "I^r_{n-1}=\mathrm{p}_0"] & \Omega^r_n/\Theta^r_n \arrow[r] \arrow[d, "I^r_n=\mathrm{p}_0"] & \Omega^r_{n+1}/\Theta^r_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "I^r_{n+1}"] & \Omega^r_{n+2}/\Theta^r_{n+2} \arrow[d, "I^r_{n+2}"] \\
\Omega^{r+1}_{n-1} \arrow[r] & \Omega^{r+1}_n \arrow[r, "\text{Euler-Lagrange}"'] & \Omega^{2r+1}_{n+1} \arrow[r, "\text{Helmholtz-Sonin}"'] & \Omega^{2r+1}_{n+2}
\end{tikzcd}
$$

Forma	Řád reprezentanta	Popisuje
$n-1$	$r+1$	triviální Lagrangiány
n	$r+1$	Lagrangiány
$n+1$	$2r+1$	pohybové rovnice
$n+2$	$2r+1$	variačnost pohybových rovnic

Překážky, které určují, zda z lokálních triviálních Lagrangiánů vznikají globální, leží v $H^n(Y)$, u lokální versus globální variačnosti v $H^{n+1}(Y)$.

Navíc můžeme tvrdit, že globální triviální Lagrangiány daného řádu $(r+1)$ jsou tvaru $\mathrm{p}_0\,\mathrm{d}\,\eta$, kde $\eta \in \Omega^r_{n-1}$ a globální variační rovnice daného řádu $(2r+1)$ tvaru $I^r_{n+1}\,\mathrm{d}\,\zeta$, kde $\zeta \in \Omega^r_n$.