Cartanova-Dieudonného věta

Michael Krbek

Věta 1. *Nechť* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\Bbbk$ *s charakteristikou* $\operatorname{Char}\Bbbk \neq 2$ *a* $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *je nedegenerovaná symetrická bilineární forma. Potom každá izometrie* $\alpha\colon V \to V$ *je složením nejvýše* n *zrcadlení.*

Důkaz. Věta je zřejmá v případě $\alpha = \mathrm{id}$ a rovněž v případě $\dim V = 1$. Důkaz provedeme matematickou indukcí vzhledem k $n = \dim V$. Je třeba rozlišit čtyři případy.

(i) Existuje nenulový neizotropní vektor a, který je izometrií α zachován, tj. $\langle a, a\rangle \neq 0$, $\alpha a = a$. Označme $H = [a]^{\perp}$ nadrovinu kolmou na a, pak platí $\alpha H = H$. Dále označme β zúžení izometrie α na H; s využitím indukční hypotézy lze zapsat $\beta = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, $r \leq n-1$ a σ_i jsou zrcadlení vzhledem k nadrovinám H_i v H. Označme dále $A = [a]$ lineární obal a a položme $\bar\sigma_i = \mathrm{id}_A \oplus \sigma_i$. Každé $\bar\sigma_i$ zachovává nadrovinu $A \oplus H_i$ a je zrcadlením ve V. Potom složení $\bar\sigma_1 \cdots \bar\sigma_r = \mathrm{id}_A \oplus \beta = \alpha$ a víme, že v tomto případě lze α vyjádřit složením nejvýše $n-1$ zrcadlení.

(ii) Existuje nenulový neizotropní vektor a takový, že vektor $\alpha a - a$ je neizotropní. Buď $H = [\alpha a - a]^{\perp}$ a η zrcadlení vzhledem k H. Platí

$$\langle \alpha a + a, \alpha a - a\rangle = \langle \alpha a, \alpha a\rangle - \langle a, a\rangle = 0,$$

a tedy $\alpha a + a \in H$. Z toho dále plyne

$$\eta(\alpha a + a) = \alpha a + a, \quad \eta(\alpha a - a) = -\alpha a + a$$

a sečtením obou rovnic a vydělením dvěma dostáváme $\eta\alpha a = a$. Můžeme tedy využít (i), dostáváme $\eta\alpha = \sigma_1 \cdots \sigma_r$, $r \leq n-1$ a vzhledem k $\eta^2 = \mathrm{id}$ posléze $\alpha = \eta\sigma_1 \cdots \sigma_r$, složení n zrcadlení.

(iii) $n = 2$. Případy (i) a (ii) nám umožňují předpokládat, že existují nenulové izotropní vektory u, v tak, že $V = [u, v]$.

(a) $\alpha u = kv$, $\alpha v = k^{-1}u$, $k \in \Bbbk$. Potom $\alpha(u + kv) = u + kv$ a lze použít (i).

(b) $\alpha u = ku$, $\alpha v = k^{-1}v$, $k \in \Bbbk$. Můžeme předpokládat $k \neq 1$, pro $k = 1$ dostáváme $\alpha = \mathrm{id}$. Potom $a = u + v$ a $\alpha a - a = (k-1)u + (k^{-1} - 1)v$ nejsou izotropní a lze využít (ii).

(iv) Nyní můžeme předpokládat, že $n \geq 3$, neexistuje žádný neizotropní vektor a, který je zachován α a konečně $\alpha a - a$ je izotropní pro a neizotropní.

Buď n izotropní vektor, podprostor $[n]^\perp$ má dimenzi nejméně 2 a platí $[n]^{\perp\perp} \cap [n]^\perp = [n]$. $[n]^\perp$ tedy musí obsahovat neizotropní vektor a, tj. $\langle a, a \rangle \neq 0$. Potom i $\langle a + kn, a + kn \rangle = \langle a, a \rangle \neq 0$ pro $k \in \Bbbk$. Vektor $\alpha a - a$ je izotropní, ale i vektory

$$\alpha(a + kn) - a - kn = \alpha a - a + k(\alpha n - n)$$

jsou z předpokladu izotropní. Platí tedy

$$\begin{aligned}\langle \alpha a - a + k(\alpha n - n), \alpha a - a + k(\alpha n - n) \rangle &= \\ = 2k\langle \alpha a - a, \alpha n - n \rangle + k^2 \langle \alpha n - n, \alpha n - n \rangle &= 0.\end{aligned}$$

Poslední rovnost napišme pro $k = 1$ a $k = -1$ a sečtěme. Dostáváme $\langle \alpha n - n, \alpha n - n \rangle = 0$. Víme tedy, že $\alpha w - w$ je izotropní vektor, ať už je w izotropní nebo ne a pro podprostor W všech takových vektorů w platí $W = (\alpha - \mathrm{id})(V)$. W je izotropní podprostor ve V.

Buď nyní $v \in V$ a $x \in W^\perp$. Potom

$$\begin{aligned}0 = \langle \alpha v - v, \alpha x - x \rangle = \langle \alpha v, \alpha x \rangle - \langle v, \alpha x \rangle - \langle \alpha v - v, x \rangle &= \\ = \langle v, x \rangle - \langle v, \alpha x \rangle = \langle v, x - \alpha x \rangle&,\end{aligned}$$

pro všechna $v \in V$. To znamená, že $x - \alpha x \in V \cap V^\perp = 0$ a tedy $x = \alpha x$. Každý vektor $x \in W^\perp$ je α zachován, předpokládali jsme ovšem, že α nezachovává žádné neizotropní vektory, je tedy $W^\perp$ izotropní podprostor. Dále je zřejmě $\dim W \leq n/2$ a $\dim W^\perp \leq n/2$, musí ovšem platit, že $\dim W + \dim W^\perp = n$ a tedy jsou v nerovnostech ve skutečnosti rovnosti. V je tedy hyperbolický prostor H_{2r}, tj. bilineární forma má signaturu (r, r), $n = 2r$.

Lemma 2. *Nechť* $V = [u_1, w_1] \oplus \cdots \oplus [u_r, w_r]$ *je hyperbolický prostor a* α *je izometrie, která zachovává každý vektor* u_i. *Pak* α *je otočení.*

Důkaz. Máme
$$\alpha u_i = u_i, \quad \alpha v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_j + \sum_{j=1}^{r} b_{ij} v_j.$$
Po dasazení získáme $\langle \alpha u_i, \alpha v_j \rangle = b_{ij} = \langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$ a je tedy
$$\alpha v_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} u_j + v_i.$$

Dále musí platit
$$0 = \langle \alpha v_i, \alpha v_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{r} a_{ik} u_k + v_i, \sum_{\ell=1}^{r} a_{j\ell} u_\ell + v_j \rangle = a_{ij} + a_{ji}$$
a a_{ij} jsou tedy antisymetrické. V bázi $\{u_i, v_i\}$ je zobrazení α dáno blokovou maticí
$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} & 0 \\ a & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \quad a = -a^T$$
a zřejmě platí $\det \alpha = +1$, tedy se jedná o otočení. ■

Pokračování v důkazu věty; případ (iv) Zobrazení α je podle lemmatu otočení. Z toho vyplývá, že věta platí pro hyperbolický prostor $V = H_{2r}$ alespoň pro reverze. Buď nyní τ libovolné zrcadlení, potom $\tau\alpha$ je reverze v H_{2r} a tedy $\tau\alpha = \sigma_1 \ldots \sigma_s$, $s \leq 2r$, ale protože $\tau\alpha$ je reverze musí s být liché, tedy ve skutečnosti $s \leq 2r - 1$. $\alpha = \tau\sigma_1 \ldots \sigma_s$, složení $s + 1 \leq 2r = n$ zrcadlení. ■

Reference

[1] Emil Artin, *Geometric Algebra*, Interscience Publishers, New York, London, 1957