CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

1845 — Arthur Cayley

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

1845 — Arthur Cayley

1878 — William Kingdon Clifford

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

1845 — Arthur Cayley

1878 — William Kingdon Clifford

1925 — Hermann Klaus Hugo Weyl

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

1845 — Arthur Cayley

1878 — William Kingdon Clifford

1925 — Hermann Klaus Hugo Weyl

1926 — Elie Joseph Cartan

CLIFFORDOVA ALGEBRA

1843 — William Rowan Hamilton

1844 — Hermann Günther Grassmann

1845 — Arthur Cayley

1878 — William Kingdon Clifford

1925 — Hermann Klaus Hugo Weyl

1926 — Elie Joseph Cartan

1954 — Claude Chevalley

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles —

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{O}$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{O}$

kvaterniony — nekomutativní, $h = a + be$, $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{O}$

kvaterniony — nekomutativní, $h = a + be$, $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$

vnitřní součin — $(g, h) = \frac{1}{2}(\bar{g}h + \bar{h}g)$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{O}$

kvaterniony — nekomutativní, $h = a + be$, $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$

vnitřní součin — $(g, h) = \frac{1}{2}(\bar{g}h + \bar{h}g)$

inverzní prvek — $h^{-1} = \bar{h}/(h, h)$

1. Komplexní čísla, kvaterniony, oktoniony

A — algebra s jedničkou 1 nad polem $\mathbb{R}$

sdružení— operace $a \to \bar{a}$ tj. $\bar{\bar{a}} = a$, $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$

zdvojení— $A \oplus A = \{(a, b) \mid a, b \in A\}$

násobení — $(a, b)(c, d) = (ac - \bar{d}b, b\bar{c} + da)$, jednička $(1, 0)$

identifikace — označme $e = (0, 1)$, pak $(a, b) = a + be$

sdružení — $\overline{(a, b)} = (\bar{a}, -b)$, platí $ea = \bar{a}e$, $a(be) = (ba)e$

konstrukce těles — $\mathbb{R} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{C} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{H} \xrightarrow{\text{zdvojení}} \mathbb{O}$

kvaterniony — nekomutativní, $h = a + be$, $a = \alpha + \beta i$, $b = \gamma + \delta i$

vnitřní součin — $(g, h) = \frac{1}{2}(\bar{g}h + \bar{h}g)$

inverzní prvek — $h^{-1} = \bar{h}/(h, h)$

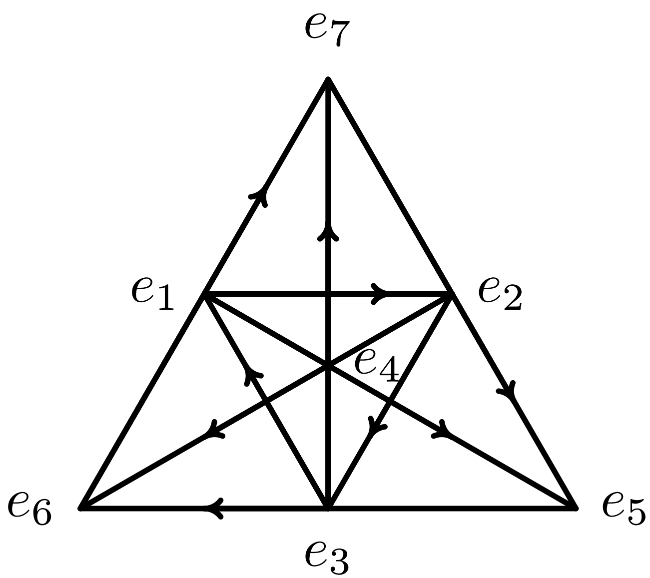
oktoniony — nekomutativní, neasociativní zdvojení $\mathbb{H}$

2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.

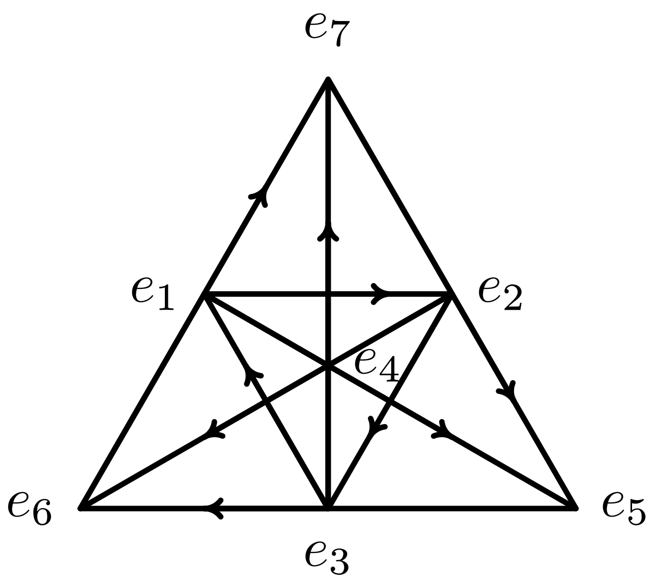
2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.



2. Více o oktonionech

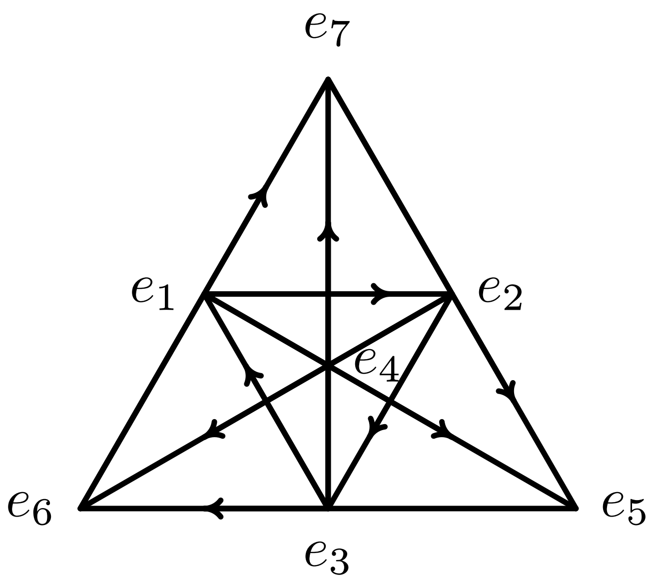
Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.



Čistě imaginární kvaterniony resp. oktoniony lze využít k definici vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^7$.

2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.

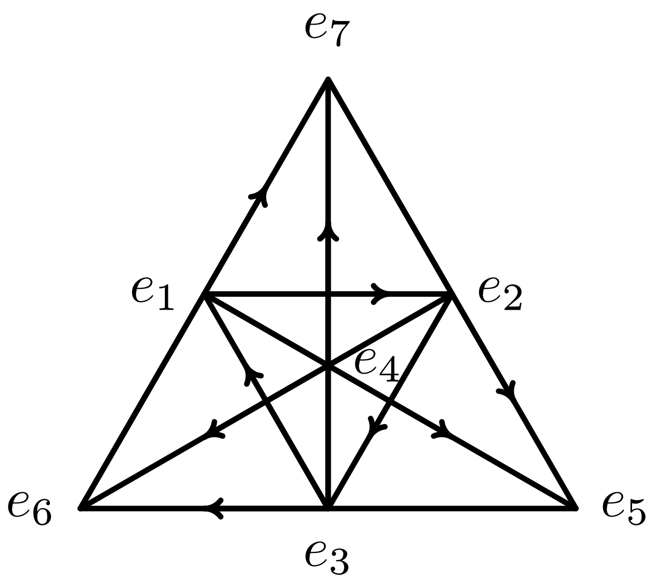


Čistě imaginární kvaterniony resp. oktoniony lze využít k definici vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^7$.

$$a \times b = \frac{1}{2}(ab - ba),$$

2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \dots, e_7$.

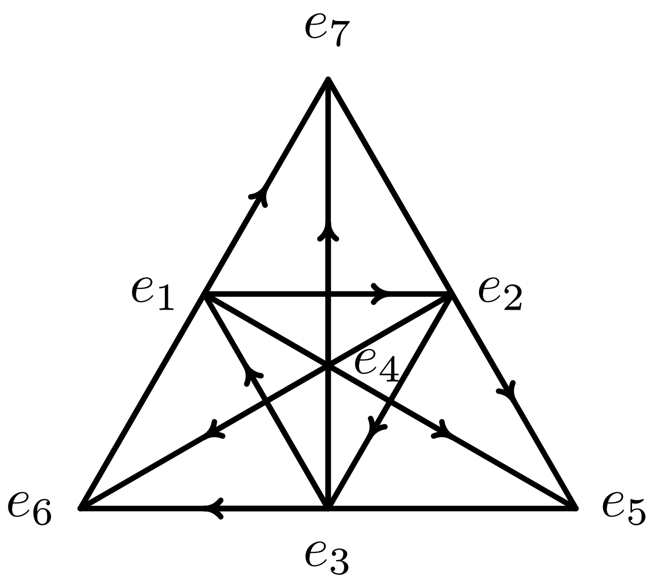


Čistě imaginární kvaterniony resp. oktoniony lze využít k definici vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^7$.

$$a \times b = \frac{1}{2}(ab - ba), \quad a \times b \perp a,$$

2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.

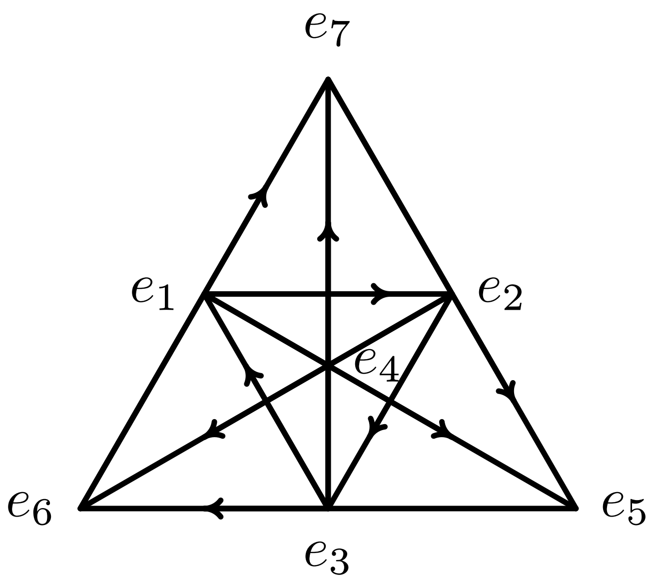


Čistě imaginární kvaterniony resp. oktoniony lze využít k definici vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^7$.

$$a \times b = \frac{1}{2}(ab - ba), \quad a \times b \perp a, \quad a \times b \perp b,$$

2. Více o oktonionech

Bázi oktonionů nad $\mathbb{R}$ označíme $1, e_1, \ldots, e_7$.



Čistě imaginární kvaterniony resp. oktoniony lze využít k definici vektorového součinu v $\mathbb{R}^3$ resp. $\mathbb{R}^7$.

$$a \times b = \frac{1}{2}(ab - ba), \quad a \times b \perp a, \quad a \times b \perp b, \quad |a \times b|^2 = |a|^2|b|^2 - (a,b)^2$$

3. Základní pojmy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{k}$, $g\colon V \to \mathbb{k}$ kvadratická forma. Zkonstruujme $T(V)$ tenzorovou algebru V a I ideál generovaný $v \otimes v + g(v)$ pro $v \in V$. **Cliffordova algebra** $C(V, g)$ je definována jako $T(V)/I$.

3. Základní pojmy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{k}$, $g\colon V \to \mathbb{k}$ kvadratická forma. Zkonstruujme $T(V)$ tenzorovou algebru V a I ideál generovaný $v \otimes v + g(v)$ pro $v \in V$. **Cliffordova algebra** $C(V, g)$ je definována jako $T(V)/I$.

Definice′: Asociativní algebra s jedničkou nad polem $\mathbb{k}$ s generátory 1, V a splňující $v^2 = -g(v)$ pro $v \in V$.

3. Základní pojmy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\mathbb{k}$, $g\colon V \to \mathbb{k}$ kvadratická forma. Zkonstruujme $T(V)$ tenzorovou algebru V a I ideál generovaný $v \otimes v + g(v)$ pro $v \in V$. **Cliffordova algebra** $C(V, g)$ je definována jako $T(V)/I$.

Definice′: Asociativní algebra s jedničkou nad polem $\mathbb{k}$ s generátory 1, V a splňující $v^2 = -g(v)$ pro $v \in V$.

Kvadratickou formu g nad poli $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ lze uvést do diagonálního tvaru.

$$\mathbb{R}\colon g \sim \begin{pmatrix} \pm 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pm 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

3. Základní pojmy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\Bbbk$, $g\colon V \to \Bbbk$ kvadratická forma. Zkonstruujme $T(V)$ tenzorovou algebru V a I ideál generovaný $v \otimes v + g(v)$ pro $v \in V$. **Cliffordova algebra** $C(V,g)$ je definována jako $T(V)/I$.

Definice′: Asociativní algebra s jedničkou nad polem $\Bbbk$ s generátory 1, V a splňující $v^2 = -g(v)$ pro $v \in V$.

Kvadratickou formu g nad poli $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ lze uvést do diagonálního tvaru.

$$\mathbb{R}\colon g \sim \begin{pmatrix} \pm1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \pm1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C}\colon g \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Základní pojmy

Definice: Nechť V je vektorový prostor nad $\Bbbk$, $g\colon V \to \Bbbk$ kvadratická forma. Zkonstruujme $T(V)$ tenzorovou algebru V a I ideál generovaný $v \otimes v + g(v)$ pro $v \in V$. **Cliffordova algebra** $C(V, g)$ je definována jako $T(V)/I$.

Definice′: Asociativní algebra s jedničkou nad polem $\Bbbk$ s generátory 1, V a splňující $v^2 = -g(v)$ pro $v \in V$.

Kvadratickou formu g nad poli $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ lze uvést do diagonálního tvaru.

$$\mathbb{R}\colon g \sim \begin{pmatrix} \pm1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \pm1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{C}\colon g \sim \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Z každého zobrazení $f\colon V \to B$, kde B je asociativní algebra s jedničkou a $f(v)f(v) = -g(v)$, lze jednoznačně zkonstruovat $f\colon C(V, g) \to B$.

4. Cliffordova algebra je superalgebra

$\mathbb{Z}_2$-gradace: Specielně vezměme inverzi $^*: v \to -v$. Zřejmě platí $^{*2} = \mathrm{id}$ a

$$C(V,g) = C^0(V,g) \oplus C^1(V,g).$$

Také platí $(AB)^* = A^* B^*$ takže $C^i(V,g) C^j(V,g) \subset C^{i+j}(V,g)$.

4. Cliffordova algebra je superalgebra

$\mathbb{Z}_2$-gradace: Specielně vezměme inverzi $^*: v \rightarrow -v$. Zřejmě platí $^{*2} = \mathrm{id}$ a

$$C(V, g) = C^0(V, g) \oplus C^1(V, g).$$

Také platí $(AB)^* = A^* B^*$ takže $C^i(V, g) C^j(V, g) \subset C^{i+j}(V, g)$.

Tenzorový součin algeber $A \otimes B$.

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

4. Cliffordova algebra je superalgebra

$\mathbb{Z}_2$-gradace: Specielně vezměme inverzi $^*: v \to -v$. Zřejmě platí $^{*2} = \mathrm{id}$ a

$$C(V,g) = C^0(V,g) \oplus C^1(V,g).$$

Také platí $(AB)^* = A^* B^*$ takže $C^i(V,g)C^j(V,g) \subset C^{i+j}(V,g)$.

Tenzorový součin algeber $A \otimes B$.

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

Jiný tenzorový součin pro $\mathbb{Z}_2$ graduované algebry $A \hat{\otimes} B$

$$(a \hat{\otimes} b)(a' \hat{\otimes} b') = (-1)^{|b||a'|}(aa') \hat{\otimes} (bb').$$

4. Cliffordova algebra je superalgebra

$\mathbb{Z}_2$-gradace: Specielně vezměme inverzi $^*: v \to -v$. Zřejmě platí $^{*2} = \mathrm{id}$ a

$$C(V,g) = C^0(V,g) \oplus C^1(V,g).$$

Také platí $(AB)^* = A^* B^*$ takže $C^i(V,g) C^j(V,g) \subset C^{i+j}(V,g)$.

Tenzorový součin algeber $A \otimes B$.

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

Jiný tenzorový součin pro $\mathbb{Z}_2$ graduované algebry $A \hat{\otimes} B$

$$(a \hat{\otimes} b)(a' \hat{\otimes} b') = (-1)^{|b||a'|} (aa') \hat{\otimes} (bb').$$

Věta: Nechť $V = V_1 \oplus V_2$ je ortogonální rozklad. Pak platí

$$C(V,g) \cong C(V_1, g_1) \hat{\otimes} C(V_2, g_2).$$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \dots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \ldots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \ldots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \ldots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \dots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

$C(\mathbb{R}^2, 0, 2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \ldots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

$C(\mathbb{R}^2, 0, 2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$C(\mathbb{R}^2, 1, 1) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \ldots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

$C(\mathbb{R}^2, 0, 2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$C(\mathbb{R}^2, 1, 1) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ a $e_2 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Na první pohled např. vidíme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \dots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

$C(\mathbb{R}^2, 0, 2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$C(\mathbb{R}^2, 1, 1) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
Na první pohled např. vidíme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
Další Cliffordovy algebry můžeme dostat indukcí. Např. platí
$C(\mathbb{R}, k+2, 0) \cong C(\mathbb{R}, 0, k) \otimes C(\mathbb{R}, 2, 0)$ a $C(\mathbb{R}, 0, k+2) \cong C(\mathbb{R}, k, 0) \otimes C(\mathbb{R}, 0, 2)$
konkrétně jsou izomorfizmy v obou případech dány jako $e_i \mapsto 1 \otimes e_i$, $i = 1, 2$
a $e_i \mapsto e_{i-2} \otimes e_1 e_2$, $i \geq 3$.

5. Příklady reálných Cliffordových algeber

$e_1, \dots, e_n$ je báze vektorového prostoru V

$C(\mathbb{R}, 1, 0) \cong \mathbb{C}$: $1 \mapsto 1$ a $e_1 \mapsto i$

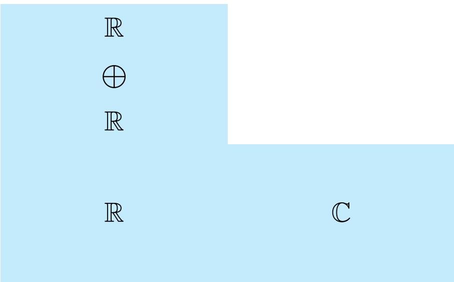
$C(\mathbb{R}, 0, 1) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$: $1 \mapsto (1, 1)$ a $e_1 \mapsto (1, -1)$

$C(\mathbb{R}^2, 2, 0) \cong \mathbb{H}$: $1 \mapsto 1$, $e_1 \mapsto i$ a $e_2 \mapsto j$

$C(\mathbb{R}^2, 0, 2) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$

$C(\mathbb{R}^2, 1, 1) \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$: $1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $e_1 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ a $e_2 \mapsto \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
Na první pohled např. vidíme $\mathbb{C} \otimes \mathbb{H} \cong \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.
Další Cliffordovy algebry můžeme dostat indukcí. Např. platí
$C(\mathbb{R}, k+2, 0) \cong C(\mathbb{R}, 0, k) \otimes C(\mathbb{R}, 2, 0)$ a $C(\mathbb{R}, 0, k+2) \cong C(\mathbb{R}, k, 0) \otimes C(\mathbb{R}, 0, 2)$
konkrétně jsou izomorfizmy v obou případech dány jako $e_i \mapsto 1 \otimes e_i$, $i = 1, 2$
a $e_i \mapsto e_{i-2} \otimes e_1 e_2$, $i \geq 3$.
Obecně platí $C(\mathbb{R}, k+8, \ell) = C(\mathbb{R}, k, \ell+8) = C(\mathbb{R}, k, \ell) \otimes \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$.

$\mathbb{R}$


ℝ
⊕
ℝ
ℝ
ℂ

$M_2(\mathbb{R})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$

$M_2(\mathbb{C})$			
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$

$M_2(\mathbb{H})$				
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$

$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$					
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$				
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$

$M_4(\mathbb{H})$						
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$					
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$				
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$

$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$							
$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$						
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$					
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$				
$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$			
$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$		
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$

$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$						
$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$					
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$				
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$		
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$

$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$					
$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$				
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$		
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$

$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$				
$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$			
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R})$		
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$

$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$			
$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$		
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$

$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{64}(\mathbb{R})$		
$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R}) \oplus M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{R})$	
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H}) \oplus M_{16}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$

$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{R}) \oplus M_{64}(\mathbb{R})$	
$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R}) \oplus M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{R})$	$M_{64}(\mathbb{C})$
$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R}) \oplus M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{R})$	$M_{32}(\mathbb{C})$	$M_{32}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{R})$	$M_{16}(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H}) \oplus M_{16}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R}) \oplus M_4(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H}) \oplus M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{H})$
$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{R}) \oplus M_2(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{R})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H}) \oplus M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{H})$	$M_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$M_2(\mathbb{R})$	$M_2(\mathbb{C})$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_2(\mathbb{H}) \oplus M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{H})$	$M_8(\mathbb{C})$	$M_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$M_2(\mathbb{H})$	$M_4(\mathbb{C})$	$M_8(\mathbb{R})$	$M_8(\mathbb{R}) \oplus M_8(\mathbb{R})$

$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$
$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{C})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{M}_2(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_4(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_8(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_8(\mathbb{R})$

$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{256}(\mathbb{R})$
$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{C})$
$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$

$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{256}(\mathbb{R})$
$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{128}(\mathbb{C})$
$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{64}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{H})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{C})$
$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{32}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$
$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathrm{M}_{2}(\mathbb{H})$	$\mathrm{M}_{4}(\mathbb{C})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{8}(\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}_{8}(\mathbb{R})$	$\mathrm{M}_{16}(\mathbb{R})$

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

$C(\mathbb{C}, 1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

$C(\mathbb{C}, 1) \ \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$C(\mathbb{C}, 2) \ \cong \mathrm{M}_2(C)$

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

$C(\mathbb{C},1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$C(\mathbb{C},2) \cong \mathrm{M}_2(C)$

a pro vyšší dimenze platí $C(\mathbb{C},k+2) \cong C(\mathbb{C},k) \otimes C(\mathbb{C},2) \cong C(\mathbb{C},k) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

$C(\mathbb{C}, 1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$C(\mathbb{C}, 2) \cong \mathrm{M}_2(C)$

a pro vyšší dimenze platí $C(\mathbb{C}, k+2) \cong C(\mathbb{C}, k) \otimes C(\mathbb{C}, 2) \cong C(\mathbb{C}, k) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Komplexní Cliffordovy algebry $C(\mathbb{C}, 2k)$ získáme komplexifikací reálné Cliffordovy algebry $C(\mathbb{R}, k, k)$ a komplexní Cliffordovy algebry $C(\mathbb{C}, 2k+1)$ komplexifikací $C(\mathbb{R}, k, k+1)$.

6. Komplexní Cliffordovy algebry

Zde je situace podstatně jednodušší.

$C(\mathbb{C},1) \cong \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$C(\mathbb{C},2) \cong \mathrm{M}_2(C)$

a pro vyšší dimenze platí $C(\mathbb{C},k+2) \cong C(\mathbb{C},k) \otimes C(\mathbb{C},2) \cong C(\mathbb{C},k) \otimes \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$.

Komplexní Cliffordovy algebry $C(\mathbb{C},2k)$ získáme komplexifikací reálné Cliffordovy algebry $C(\mathbb{R},k,k)$ a komplexní Cliffordovy algebry $C(\mathbb{C},2k+1)$ komplexifikací $C(\mathbb{R},k,k+1)$.

Komplexní Cliffordovu algebru $C(\mathbb{C},4)$ získáme komplexifikací libovolné reálné Cliffordovy algebry $C(\mathbb{R},k,\ell)$ pro $k+\ell=4$.

7. Reprezentace Cliffordových algeber

Definice: Nechť $W^0 \oplus W^1$ je $\mathbb{Z}_2$-graduovaný modul nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Zobrazení $f : C(V,g)W \to W$ nazveme **Cliffordovou akcí**, jestliže je sudé, tj.

$$f(C^0(V,g), W^{0,1}) \subset W^{0,1}, \qquad f(C^1(V,g), W^{0,1}) \subset W^{1,0}.$$

7. Reprezentace Cliffordových algeber

Definice: Nechť $W^0 \oplus W^1$ je $\mathbb{Z}_2$-graduovaný modul nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Zobrazení $f: C(V,g)W \to W$ nazveme **Cliffordovou akcí**, jestliže je sudé, tj.

$$f(C^0(V,g), W^{0,1}) \subset W^{0,1}, \qquad f(C^1(V,g), W^{0,1}) \subset W^{1,0}.$$

Ekvivalentně můžeme mluvit o **reprezentaci** $C(V,g) \to \mathrm{End}(W)$.

7. Reprezentace Cliffordových algeber

Definice: Nechť $W^0 \oplus W^1$ je $\mathbb{Z}_2$-graduovaný modul nad $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$. Zobrazení $f : C(V,g)W \to W$ nazveme **Cliffordovou akcí**, jestliže je sudé, tj.

$$f(C^0(V,g), W^{0,1}) \subset W^{0,1}, \qquad f(C^1(V,g), W^{0,1}) \subset W^{1,0}.$$

Ekvivalentně můžeme mluvit o **reprezentaci** $C(V,g) \to \mathrm{End}(W)$.

Zavedeme ještě operaci **reverze** v Cliffordově algebře. Tenzorová algebra $T(V)$ má involuci danou a homogenních prvcích obrácením pořadí $v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \to v_k \otimes \cdots \otimes v_1$. Protože zachovává ideál I, přenese se i na Cliffordovu algebru

$$(\quad)^T : C(V,g) \to C(V,g).$$

8. Jedna zajímavá reprezentace

Uvažujme $W = \Lambda V$, pro $v \in V$ definujeme **vnější součin**

$$v\wedge\colon \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k+1} V$$

8. Jedna zajímavá reprezentace

Uvažujme $W = \Lambda V$, pro $v \in V$ definujeme **vnější součin**

$$v\wedge\colon \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k+1} V$$

a **vnitřní součin**

$$v \lrcorner\colon \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} G(v, v_i) v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k-1} V$$

8. Jedna zajímavá reprezentace

Uvažujme $W = \Lambda V$, pro $v \in V$ definujeme **vnější součin**

$$v\wedge : \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k+1} V$$

a **vnitřní součin**

$$v \lrcorner : \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} G(v, v_i) v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k-1} V$$

Pro $v \in V$ a $\rho \in \Lambda V$ je dáno zobrazení f jako

$$f(v, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v \wedge \rho - v \lrcorner \rho), \quad \text{přičemž} (v \wedge - v \lrcorner)^2 \rho = -2g(v)\rho,$$

8. Jedna zajímavá reprezentace

Uvažujme $W = \Lambda V$, pro $v \in V$ definujeme **vnější součin**

$$v\wedge\colon \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to v \wedge v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k+1} V$$

a **vnitřní součin**

$$v \lrcorner\colon \Lambda^k V \ni v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \to \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} G(v, v_i) v_1 \wedge \ldots \wedge \hat{v}_i \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^{k-1} V$$

Pro $v \in V$ a $\rho \in \Lambda V$ je dáno zobrazení f jako

$$f(v, \rho) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v \wedge \rho - v \lrcorner \rho), \quad \text{přičemž} (v \wedge - v \lrcorner)^2 \rho = -2g(v)\rho,$$

takže celkově dostaneme $f(v)^2 = -g(v)$ a f definuje Cliffordovu akci.

9. Cliffordovy grupy

Cliffordova grupa $\mathrm{Pin}(V, g)$ — množina všech invertibilních prvků $A \in C(V, g)$ taková, že $AVA^{-1} \subset V$ spolu s násobením v $C(V, g)$.

9. Cliffordovy grupy

Cliffordova grupa $\mathrm{Pin}(V, g)$ — množina všech invertibilních prvků $A \in C(V, g)$ taková, že $AVA^{-1} \subset V$ spolu s násobením v $C(V, g)$.

speciální Cliffordova grupa $\mathrm{Spin}(V, g)$ — podgrupa sudých prvků Cliffordovy grupy

9. Cliffordovy grupy

Cliffordova grupa $\mathrm{Pin}(V,g)$ — množina všech invertibilních prvků $A \in C(V,g)$ taková, že $AVA^{-1} \subset V$ spolu s násobením v $C(V,g)$.

speciální Cliffordova grupa $\mathrm{Spin}(V,g)$ — podgrupa sudých prvků Cliffordovy grupy

Každý prvek A Cliffordovy grupy indukuje lineární transformaci $f(A) \colon V \ni v \to AvA^{-1} \in V$, která je ortogonální transformací $\mathbb{O}(V,g)$. Navíc je zobrazení $\mathrm{Pin}(V,g) \ni A \to f(A) \in \mathbb{O}(V,g)$ reprezentací $\mathrm{Pin}(V,g)$, které říkáme **vektorová reprezentace**.

9. Cliffordovy grupy

Cliffordova grupa $\mathrm{Pin}(V, g)$ — množina všech invertibilních prvků $A \in C(V, g)$ taková, že $AVA^{-1} \subset V$ spolu s násobením v $C(V, g)$.

speciální Cliffordova grupa $\mathrm{Spin}(V, g)$ — podgrupa sudých prvků Cliffordovy grupy

Každý prvek A Cliffordovy grupy indukuje lineární transformaci $f(A) \colon V \ni v \to AvA^{-1} \in V$, která je ortogonální transformací $\mathbb{O}(V, g)$. Navíc je zobrazení $\mathrm{Pin}(V, g) \ni A \to f(A) \in \mathbb{O}(V, g)$ reprezentací $\mathrm{Pin}(V, g)$, které říkáme **vektorová reprezentace**.

Pokud $v \in \mathrm{Pin}(V, g) \cap V$, potom $g(v) \neq 0$ a $f(v) \colon V \to V$ je **zrcadlení** V vzhledem k nadrovině „kolmé“ na v.

9. Cliffordovy grupy

Cliffordova grupa $\mathrm{Pin}(V, g)$ — množina všech invertibilních prvků $A \in C(V, g)$ taková, že $AVA^{-1} \subset V$ spolu s násobením v $C(V, g)$.

speciální Cliffordova grupa $\mathrm{Spin}(V, g)$ — podgrupa sudých prvků Cliffordovy grupy

Každý prvek A Cliffordovy grupy indukuje lineární transformaci $f(A)\colon V \ni v \to AvA^{-1} \in V$, která je ortogonální transformací $\mathbb{O}(V, g)$. Navíc je zobrazení $\mathrm{Pin}(V, g) \ni A \to f(A) \in \mathbb{O}(V, g)$ reprezentací $\mathrm{Pin}(V, g)$, které říkáme **vektorová reprezentace**.

Pokud $v \in \mathrm{Pin}(V, g) \cap V$, potom $g(v) \neq 0$ a $f(v)\colon V \to V$ je **zrcadlení** V vzhledem k nadrovině „kolmé“ na v.

Je-li $\dim V = 2k + 1$, pak $f(\mathrm{Pin}(V, g)) = f(\mathrm{Spin}(V, g)) = \mathbb{SO}(V, g)$ a je-li $\dim V = 2k$, pak $f(\mathrm{Pin}(V, g)) = \mathbb{O}(V, g)$ a $f(\mathrm{Spin}(V, g)) = \mathbb{SO}(V, g)$.