Cvičení k F6420

cvičící: Michael Krbek

23. února 2011

CVIČENÍ 1

Základy topologie, topologické variety, homomorfizmy

1. Rozhodněte, zda v níže uvedených případech je (X, Ω) topologický prostor:

(a) $\Omega = 2^X$.

(b) $\Omega = \{\emptyset, X\}$.

(c) $X = [0, \infty)$ a Ω obsahuje $\emptyset$, X a všechny intervaly (a, ∞), kde $a \geq 0$.

(d) X je rovina $\mathbb{R}^2$, Ω obsahuje $\emptyset$, X a všechny otevřené kruhy se středem v počátku.

(e) $X = \mathbb{R}$, Ω obsahuje $\emptyset$ a všechny nekonečné podmnožiny X.

(f) $X = \mathbb{R}$, Ω obsahuje všechny podmnožiny X, jež mají konečné doplňky.

2. Zaveďte všechny topologie na $X = \{a, b, c, d\}$.

3. Dokažte, že každá otevřená množina v $\mathbb{R}$ s přirozenou topologií je sjednocením disjunktních otevřených intervalů.

4. Nechť K je množina všech reálných čísel, která lze v trojkové soustavě zapsat jako $0.a_1a_2\ldots$, $a_i \neq 1$, tj. bez použití číslice 1. Najděte geometrický popis množiny K. Dokažte dále

(a) $K \subset [0, 1]$.

(b) $K \cap (1/3, 2/3) = \emptyset$.

(c) $K \cap (\frac{3m+1}{3^n}, \frac{3m+2}{3^n}) = \emptyset$ pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$.

(d) Ukažte, že K lze získat odstraněním (nekonečného) počtu otevřených intervalů z $[0, 1]$.

(e) Dokažte, že K je uzavřená množina.

Množina K se nazývá *Cantorova* množina.

5. Uvažujme následující tři systémy podmnožin v $\mathbb{R}^2$: Σ_2 je množina všech otevřených kruhů, Σ^∞ množina všech otevřených čtverců se stranami rovnoběžnými se souřadnicovými osami a Σ^1 je množina všech otevřených čtverců se stranami svírajícími úhel $\pi/4$ se souřadnicovými osami, tj.

$$\begin{aligned} \Sigma^2 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| (x-a)^2 + (y-b)^2 < r^2, a, b \in \mathbb{R}, r > 0\}, \\ \Sigma^\infty &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| \max(|x-a|, |y-b|) < r, a, b \in \mathbb{R}, r > 0\}, \\ \Sigma^1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| |x-a| + |y-b| < r, a, b \in \mathbb{R}, r > 0\}. \end{aligned}$$

(a) Dokažte, že každý prvek Σ^2 je sjednocením prvků ze Σ^∞.

(b) Dokažte, že průnik libovolných dvou prvků ze Σ^1 je sjednocením prvků ze Σ^1.

(c) Dokažte, že Σ^2, Σ^∞ i Σ^1 jsou bázemi topologií na $\mathbb{R}^2$ a tyto topologie se shodují.

6. Každý metrický prostor určuje topologii na své podkladové množině, jejíž bazí jsou otevřené koule vzhledem k dané metrice. Jak tato skutečnost souvisí s předchozím příkladem?

7. Nechť $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}^+$ je metrika na X a $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je monotónně rostoucí funkce taková, že $f(0) = 0$ a $f(x+y) \le f(x) + f(y)$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Dokažte, že potom i $f \circ \rho$ je metrika na X.

8. Nechť A a B jsou omezené množiny v metrickém prostoru (X, ρ). Definujme vzdálenost bodu $b \in X$ od množiny A vztahem

$$\rho(b, A) := \inf\{\rho(b, a) \| a \in A\}.$$

Dále definujme

$$D_\rho(A, B) = \max\left\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\right\}.$$

Dokažte, že D_ρ je metrikou na množině omezených uzavřených množin v (X, ρ).

9. Dokažte, že množina je otevřená právě když je shodná se svým vnitřkem.

10. Dokažte, že $\mathrm{Cl}\,\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

11. Nechť Ω, ω jsou dvě topologie na X. Dokažte, že identické zobrazení $1\colon (X, \Omega) \to (X, \omega)$ je spojité právě tehdy, je-li $\omega \subset \Omega$.

12. Buď X topologický prostor s diskrétní topologií, Y libovolný topologický prostor. Která zobrazení $X \to Y$ jsou spojitá? Která zobrazení $Y \to X$ jsou spojitá?

13. Stejně jako v předchozím příkladě, X má ovšem triviální topologii.

14. Dokažte, že složení spojitých zobrazení je opět spojité zobrazení.

15. Dokažte, že každé konstantní zobrazení (tj. zobrazení, jehož obrazem je jediný bod) je spojité.

16. Dokažte, že vlastnost "být homeomorfní" je relací ekvivalence.

17. Dokažte, že inverze

$$\begin{aligned} \kappa\colon \mathbb{R}^n \setminus 0 &\to \mathbb{R}^n \setminus 0 \\ x &\mapsto \frac{x}{|x|^2} \end{aligned}$$

je homeomorfizmus.

18. Nechť $H = \{z \in \mathbb{C} | \Im z > 0\}$ je horní komplexní polorovina a $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0.$$

Dokažte, že zobrazení

$$\begin{aligned} f\colon H &\to H \\ z &\mapsto \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

je homeomorfizmus.

19. Dokažte, že následující topologické prostory jsou homeomorfní.

(a) $(0,1) \cong (a,b)$ pro $a < b$.

(b) $(-1,1) \cong \mathbb{R}$.

(c) $[0,1) \cong [0,\infty)$.

(d) $\mathbb{S}^n \setminus \text{bod} \cong \mathbb{R}^n$, první prostor je n-rozměrná sféra s vynechaným bodem.

(e) $\mathbb{D}^2 \cong \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \| x, y \in [0,1]\}$, kde $\mathbb{D}^2$ je uzavřený kruh v rovině.

20. Nechť $A \cap B$ a $A \cup B$ jsou souvislé. Jsou A a B souvislé?

21. Nechť X je souvislý topologický prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Dokažte, že $f(X)$ je interval v $\mathbb{R}$.

22. Dokažte, že $\mathbb{R}^n$ je souvislý.

23. Dokažte, že $\mathbb{S}^n$ je souvislý.

24. Dokažte, že množina $0 \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ je kompaktní v $\mathbb{R}$.

25. Dokažte, že $\mathbb{S}^n$ je kompaktní.

26. Nechť (X, Ω) je Hausdorffův topologický prostor. Nechť X^* je množina získaná přidáním bodu $*$ do X (samozřejmě $*$ nenáleží do X). Nechť Ω^* je systém otevřených množin tvořený otevřenými množinami v X, množinami $X^* \setminus C$, kde $C \subset X$ je kompaktní množina.

(a) Dokažte, že Ω^* je topologie na X^*.

(b) Dokažte, že prostor (X^*, Ω^*) je kompaktní.

(c) Dokažte, že inkluze $i\colon X \to X^*$ je topologické vložení, tzn. že zúžené zobrazení $X \to i(X)$ je homeomorfizmus.

(a) Dokažte, že je-li (X, Ω) lokálně kompaktní, potom (X^*, Ω^*) je Hausdorffův topologický prostor.

Topologický prostor (X^*, Ω^*) se nazývá *jednobodová* nebo *Alexandrovova kompaktifikace* topologického prostoru (X, Ω).

27. Dokažte, že $\mathbb{R}^2 \setminus 0 \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.

28. *Möbiova páska* je definována jako faktorprostor $M = \mathbb{I}^2/[(0,t) \sim (1, 1-t)]$. Dokažte, že M je homeomorfní ploše opsané v $\mathbb{R}^3$ úsečkou rotující kolem svého středu a tento jejíž střed zároveň rotuje po kružnici se středem v 0. Rotace kolem 0 o 2π přitom odpovídá rotaci kolem středu úsečky o π.

29. Ukažte, že $GL(n, \mathbb{K})$ a její podgrupy jsou topologické grupy pro $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

30. Dokažte, že následující prostory jsou lokálně euklidovské.

(a) $\mathbb{R}^n$.

(b) libovolná otevřená množina v $\mathbb{R}^n$.

(c) $\mathbb{S}^n$.

(d) $\mathbb{R}P^n$.

(e) $\mathbb{C}P^n$.

(f) $\mathbb{R}^n_+$.

(g) $\mathbb{D}^n$.

(h) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

31. Dokažte, že $\partial \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \| x^1 = 0\}$.

32. Dokažte, že $\partial(X \times Y) = (\partial X \times Y) \cup (X \times \partial Y)$.

33. Vyplňte následující tabulku.

Varieta X	Je X kompaktní?	Je ∂X prázdná?
$\mathbb{S}^1$		
$\mathbb{R}^1$		
$\mathbb{I}$		
$\mathbb{R}^1_+$		