Variační posloupnost v mechanice a teorii pole

Michael Krbek

Obsah

Kapitola 1

Variační formulace fyzikálních teorií

1.1 Mechanika

Podstatnou část zákonů mechaniky lze formulovat na základě variačních principů. Předpokládáme, že vlastnosti mechanického systému jsou určeny jistou funkcí času t, zobecněných souřadnic, zobecněných rychlostí, popřípadě vyšších zobecněných zrychlení

$$L = L\left(t, q^{\sigma}_{j}\right), \tag{1.1}$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$ a $0 \leq j \leq r$. m určuje počet zobecněných souřadnic systému (stupňů volnosti) a r určuje řád nejvyšších derivací zobecněných souřadnic, na kterých L závisí (v klasické mechanice $r = 1$). Dolními indexy u q^{σ} označme příslušnou derivaci podle času. Zavádíme funkcionál

$$S\left[q^{\sigma}(t)\right] = \int_{a}^{b} L\left(t, q^{\sigma}_{j}\right) dt. \tag{1.2}$$

Dále volíme počateční a (nebo) okrajové podmínky pro q^{σ}_{j}. Pro "správnou" dráhu nabývá funkcionál extrémální hodnoty. Ve fyzikálních úlohách je znaménko funkce L zpravidla dáno konvencí tak, že pro extremální dráhu funkcionál nabývá svého minima. V mechanice funkci L nazýváme *Lagrangeovou funkcí* a funkcionál S *funkcionálem akce.*

Ukažme některé možné postupy při řešení tzv. nejjednodušší variační úlohy, která spočívá ve vyhledání extremál funkcionálu S s okrajovými podmínkami $q^{\sigma}_{0}(a) = u^{\sigma}_{0}, \ldots, q^{\sigma}_{r-1}(a) = u^{\sigma}_{r-1}$ a $q^{\sigma}_{0}(b) = v^{\sigma}_{0}, \ldots, q^{\sigma}_{r-1}(b) = v^{\sigma}_{r-1}$, kde $u^{\sigma}_{j}, v^{\sigma}_{j} \in \mathrm{R}$. Existuje několik na pohled rozdílných způsobů, jak odvodit nutné podmínky pro existenci extrému, které nazýváme *Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi.*

Jako první uvedeme Eulerovu metodu řešení pro $r = 1$, $m = 1$. Označme $q_0^1 = x, q_1^1 = \dot{x}$.

$$S\left[x(t)\right] = \int_a^b L(t, x, \dot{x})dt \tag{1.3}$$

Předpokládáme, že L a x mají dostatečný počet derivací. Interval $< a, b >$ rozdělíme na n stejně dlouhých podintervalů délky $\Delta t = \frac{b-a}{n}$. Riemannův integrál je limitou posloupnosti součtů $\{f_n\}_{n\to\infty}$, kde

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} L\left(t_i, x_i, \dot{x}_i\right)\Delta t. \tag{1.4}$$

$t_i = a + (i-1)\Delta t$, x_i je hodnota funkce x v i-tém bodě a $\dot{x}_i = \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t}$ je přibližná hodnota první derivace v tomto bodě. Jedná se o úlohu s pevnými konci, a proto platí $x_1 = u$ a $x_{n+1} = v$, kde u, v jsou konstanty. Na n-tý člen posloupnosti je možno se dívat jako na funkci $(n-1)$ proměnných $x_2, \ldots, x_n$. Podmínku stacionarity této funkce vyjádříme jako

$$dS_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{\partial S_n}{\partial x_k} dx_k = 0. \tag{1.5}$$

Po dosazení dostanene

$$\begin{aligned}
dS_n &= \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_j} \frac{\partial \dot{x}_j}{\partial x_k} \right) dx_k \Delta t && (1.6)\\
&= \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{\partial}{\partial x} L\left(t_k, x_k, \dot{x}_k\right)\Delta t - \right. && (1.7)\\
&- \left. \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t_k, x_k, \dot{x}_k\right) + \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t_{k-1}, x_{k-1}, \dot{x}_{k-1}\right) \right] dx_k.
\end{aligned}$$

Nyní použitím věty o střední hodnotě dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}} L(t_k, x_k, \dot{x}_k) - \frac{\partial}{\partial \dot{x}} L\left(t_{k-1}, x_{k-1}\right) = \frac{d}{dt} \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right|_{\tau \in < t_{k-1}, t_k >} \Delta t. \tag{1.8}$$

Je zřejmé, že musí být splněna rovnost

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \tag{1.9}$$

Tento postup lze přímočaře zobecnit i pro $m > 1$. Zobecnění na $r > 1$ provázejí ovšem stále delší výpočty (jedná se o nahrazování derivací diferencemi).

Další možnost řešení klade vyšší nároky na matematický aparát. Úlohu řešíme pro obecné r a m, přičemž $q_0, \ldots, q_j$ představují uspořádané m-tice funkcí. Zavedeme-li v prostoru $C^r_{<a,b>}$ spojitých, do potřebného řádu r spojitě diferencovatelných funkcí $h(t)$ na intervalu $< a, b >$ vektorovou strukturu a normu –nejčastěji užíváme

$$\|h(t)\| = \max\left[\max_{t\in<a,b>} h(t), \ldots, \max_{t\in<a,b>} h_r(t)\right] \tag{1.10}$$

–můžeme definovat derivaci funkcionálu v bodě $q \in C^r_{<a,b>}$ ve směru vektoru (v tomto případě též funkce) h

$$D_h S[q] = \lim_{s\to 0} \frac{S[q+sh] - S[q]}{s}. \tag{1.11}$$

Jelikož se jedná o úlohu s pevnými konci, platí v krajních bodech a, b okrajové podmínky $h(a) = h(b) = 0, \ldots, h_{r-1}(a) = h_{r-1}(b) = 0$. Po provedení derivace funkcionálu s využitím metody per partes a uvážením nulovosti h v krajních bodech intervalu $< a, b >$ dostaneme

$$D_h S[q] = \int_a^b \left[\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial q_j}\right] h dt. \tag{1.12}$$

V místě lokálního extrému pokládáme derivaci funkcionálu rovnu nule a to nezávisle na volbě směru (vektoru h). Proto musí v místě lokálního extrému funkcionálu S platit rovnice

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j}\frac{\partial L}{\partial q_j} = 0. \tag{1.13}$$

Nakonec ukážeme metodu běžnou v učebnicích mechaniky. Předpokládejme, že funkcionál S má lokální extrém v bodě $q^\sigma = q^\sigma(t)$. Pro určitost řekněme, že se jedná o lokální minimum (pokud se jedná o lokální maximum, docílíme požadovaného stavu změnou znaménka Lagrangeovy funkce L). To ale znamená, že S roste pro libovolný argument tvaru

$$q'^\sigma(t) = q^\sigma(t) + \delta q^\sigma(t), \tag{1.14}$$

jehož libovolnost je zaručena libovolností funkce $\delta q^\sigma(t)$. Tuto funkci, tzv. *variaci* a její derivace až do řádu r pokládáme za dostatečně malé v celém intervalu $< a, b >$. Dále vzhledem k tomu, že se jedná o variační úlohu s pevnými konci, musí platit $\delta q^\sigma_j(a) = 0$ a $\delta q^\sigma_j(b) = 0$ pro $0 \le j \le r-1$ a $1 \le \sigma \le m$. Vyjádříme změnu $\delta S = S[q'^\sigma] - S[q^\sigma]$

$$\int_a^b L\left(t, q^\sigma_j + \delta q^\sigma_j\right) dt - \int_a^b L\left(t, q^\sigma_j\right) dt. \tag{1.15}$$

V prvním členu rozvineme za integrálem L v bodě q^σ do Taylorovy řady vzhledem k δq^σ_j, $0 \leq j \leq r$ a vezmeme v potaz pouze členy prvního řádu. Dostaneme

$$\delta S \; = \int_a^b \sum_{j=0}^{r} \frac{\partial L}{\partial q^\sigma_j} \delta q^\sigma_j \, dt. \tag{1.16}$$

V dalším kroku j-tý člen sumy za integrálem j-krát integrujeme metodou per partes s uvážením okrajových podmínek a přecházíme od δq^σ_j k δq^σ. V bodě extrému musí platit pro přírůstek $\delta S = 0$ a výsledné nutné podmínky pro existenci extrému tedy nabývají tvaru

$$\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial q^\sigma_j} = 0. \tag{1.17}$$

V 2. kapitole ukážeme, jak lze tzv. *první variační formuli* zobecnit na funkcionály definované na fibrovaných varietách.

Uvedeme zdůvodnění platnosti variačního principu v klasické mechanice. Všeobecně je známa variační formulace dynamiky hmotných bodů. Označíme-li T kinetickou a V potenciální energii soustavy, platí, že pohyb se realizuje po extremále funkcionálu

$$S = \int_a^b (T - V) \, dt. \tag{1.18}$$

Předpokládáme dále, že lagrangián $T - V$ je kvadratickým polynomem v zobecněných rychlostech

$$T - V = \frac{1}{2} M_{\sigma\nu} \left(t, q^\mu\right) q^\sigma_1 q^\nu_1 + N_\sigma \left(t, q^\mu\right) q^\sigma_1 + P \left(t, q^\mu\right) \tag{1.19}$$

Potom je princip nejmenší akce důsledkem obecnějšího kvantově mechanického principu, který udává amplitudu pravděpodobnosti přechodu z bodu A do bodu B po trajektorii určené křivkou $x(t)$ procházející body A i B:

$$K[x(t)] \propto \exp(\frac{i}{\hbar} \int_A^B L dt) \tag{1.20}$$

Amplitudu pravděpodobnosti přechodu je nutno sečíst přes všechny dráhy procházející body A a B, tedy přistoupit k funkcionální integraci. Pouze v okolí dráhy, která splňuje Eulerovy-Lagrangeovy rovnice, se příspěvky do funkcionálního integrálu výrazně odlišují od nuly, neboť zde je argument exponenciální funkce blízký nule. Jinde vzhledem k malosti $\hbar$ exponenciální funkce silně osciluje. Analogicky lze postupovat i pro teorii pole, kde body A, B mají význam počáteční a koncové konfigurace pole.

Další možnosti aplikace variačního počtu na fibrovaných varietách s jednorozměrnou bází nacházíme např. v teorii pružnosti při určení statické rovnováhy tyčí, kde časovou souřadnici nahrazuje souřadnice zobecněná, související zpravidla s délkou tyče. V dalším uvedeme několik příkladů aplikací variačního principu v mechanice a teorii pružnosti.

Příklad 1:[1] Určení pohybové rovnice matematického kyvadla o jednotkové hmotnosti a délce l, jehož bod závěsu délky l vykonává harmonický pohyb v tíhovém poli g s horizontální výchylkou $\propto \cos(\gamma t)$. Úhlovou výchylku kyvadla označme ϕ.

Kartézské souřadnice kmitajícího hmotného bodu jsou při volbě soustavy spojené se směrem tíhového zrychlení

$$\begin{aligned} x &= a\cos\gamma t + l\sin\phi && (1.21)\\ y &= l\cos\phi && (1.22) \end{aligned}$$

Rozdíl kinetické a potenciální energie v homogenním tíhovém poli

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + gy. \qquad (1.23)$$

Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} L &= \frac{l^2}{2}\dot{\phi}^2 + la\gamma^2\cos\gamma t\sin\phi + gl\cos\phi - && (1.24)\\ &- \frac{d}{dt}\left[a\gamma\sin\gamma t\left(\frac{1}{4}a\cos\gamma t + l\sin\phi\right) - \frac{a^2\gamma^2 t}{4}\right] \end{aligned}$$

V dalších odstavcích vyložíme, že totální derivace libovolné funkce času a souřadnice nemá vliv na pohybové rovnice, takže poslední sčítanec předchozí rovnice je možno vynechat. Získáme pohybovou rovnici (po vydělení konstantou $-l^2$)

$$\ddot{\phi} + \frac{g}{l}\sin\phi - \frac{a\gamma^2}{l}\cos\gamma t\cos\phi = 0. \qquad (1.25)$$

Dále uveďme příklad z teorie pružnosti[2]. Nechť s značí délku tyče od zvoleného počátku. Zjišťujeme malou deformaci $\xi = \xi(s)$ tyče kruhového průřezu libovolného rovinného nedeformovaného tvaru daného funkcí $a = a(s)$. Youngův model pružnosti tyče označíme E, moment setrvačnosti [3] průřezu tyče vzhledem k ose tyče I. Extremalizujeme funkcionál

$$S = \int \left[\frac{EI}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)^2 + U\right] ds, \qquad (1.26)$$

kde $R = R\left(a\left(s\right), \xi\left(s\right)\right)$ je poloměr křivosti tyče v deformovaném stavu, $R_0 = R_0\left(a\left(s\right)\right)$ poloměr křivosti tyče v nedeformovaném stavu, $U(s)$ potenciální energie délkového elementu tyče ds v bodě s.

$$L\left(s, \xi, \xi_1, \xi_2\right) = \frac{EI}{2}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)^2 + U \qquad (1.27)$$

[1] [9], Band I-Mechanik, str. 14
[2] [9], Band VII str. 87, 102
[3] Jedná se o běžně definovaný moment setrvačnosti, ovšem namísto elementu plošné hustoty se bere pouze element plochy.

Můžeme si povšimnout, že vzniklý funkcionál je závislý na 2. derivacích zobecněných souřadnic podle zvolené bázové souřadnice (např. délky oblouku tyče s).

Příklad 2: Je dán kruhový prstenec o poloměrech a a $R \ll a$ (jedná se tedy o tyč, protože lze dva rozměry zanedbat vzhledem k rozměru třetímu). Moment setrvačnosti kruhového průřezu vzhledem k jeho ose je $I = \frac{\pi R^4}{4}$. Na jednotku délky prstence působí radiální síla K. Youngův model pružnosti materiálu označme E, jeho lineární hustotu λ. Určeme deformaci prstence ξ za předpokladu malosti deformace $\xi \ll a$

Zavedeme polární souřadnice r, ϕ. Rovnici deformovaného prstence předpokládáme ve tvaru $r(\phi) = a + \xi(\phi)$, kde $\xi \ll a$. Pro elastickou energii v polárních souřadnicích dostaneme

$$F = \frac{EI}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a} \right)^2 a d\phi, \tag{1.28}$$

kde

$$\frac{1}{R} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{\left(r^2 + r'^2\right)^{3/2}} \approx \frac{1}{a} - \frac{\xi + \xi''}{a^2}. \tag{1.29}$$

je výraz pro poloměr křivosti v polárních souřadnicích. Derivaci podle ϕ značíme $'$. Pro malé deformace $\xi \ll a$ dostaneme

$$F = \frac{EI}{2a^3} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\xi + \xi''\right)^2 d\phi \tag{1.30}$$

Z variačního principu plyne podmínka rovnováhy

$$D_h F - a \int_{-\pi}^{\pi} K \ h d\phi = 0. \tag{1.31}$$

V uvedené aproximaci dochází pouze k ohybu prstence, nikoliv k jeho prodloužení [4]. Platí tedy navíc vazební podmínka

$$\int_{-\pi}^{\pi} \xi d\phi = 0 \tag{1.32}$$

vyjadřující konstantnost obvodu prstence. Zavedeme Lagrangeův multiplikátor β a provedením variace dostaneme rovnici

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{EI}{a^4} \left(\xi + 2\xi'' + \xi''''\right) - K \ + \beta \right] a h d\phi = 0 \tag{1.33}$$

Odtud plyne rovnice

$$\frac{EI}{a^4} \left(\xi + 2\xi'' + \xi''''\right) - K \ + \beta = 0. \tag{1.34}$$

Po doplnění cyklickými okrajovými podmínkami je formulace úlohy ukončena.

[4] Uvnitř prstence existuje plocha, v níž nedochází ani k rozpínání, ani k stlačování. Body více vzdálené od středu prstence se od sebe vzdalují, body blíže ke středu prstence se k sobě přibližují. Protože dva rozměry prstence jsou zanedbatelné vzhledem k rozměru třetímu, můžeme projekci této plochy do roviny prstence považovat za uzavřenou křivku a identifikovat ji s délkou prstence.

Příklad 3: Odvodíme rovnice pro geodetické křivky v metrickém prostoru $(\mathcal{M}, g)$, kde $\mathcal{M}$ je hladká varieta a g je symetrická bilineární forma splňující v případě potřeby jisté další požadavky (pozitivní definitnost, popřípadě jiné omezení signatury g).

Funkcionál, který budeme extremalizovat (délka křivky, vlastní čas v teorii relativity) má tvar [5]

$$S[x^\sigma(t)] = \int_a^b \sqrt{\pm g_{\mu\nu}(x^\kappa) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \tag{1.35}$$

Po provedení variace a odstranění okrajových členů vzniklých po integraci per partes dostaneme následující výraz

$$D_h S \; = \mp \int_a^b \left[\frac{1}{s'} \left(\frac{g_{\sigma\nu} x^{\nu\prime}}{s'} \right)' - \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} x^{\mu\prime} x^{\nu\prime}}{s'^2} \right] s' h^\sigma(\lambda) d\lambda = 0, \tag{1.36}$$

kde $s' = \sqrt{\pm g_{\mu\nu}(x^\kappa) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}$ a $'$ značíme derivaci podle parametru λ. Vhodnou volbou parametru $ds \; = \sqrt{\pm g_{\mu\nu}(x^\kappa) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda$ (jako parametr vezmeme právě délku křivky, vlastní čas) lze výraz dále zjednodušit na

$$D_h S \; = \mp \int_a^b \left[\frac{d}{ds} \left(g_{\sigma\nu} \dot{x}^\nu \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \right] h^\sigma(s) ds \; = 0, \tag{1.37}$$

kde $\cdot$ značíme derivaci podle s. Aby byla rovnost splněna pro libovolné h, musí po provedení derivace v prvním sčítanci platit

$$g_{\sigma\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\sigma\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0. \tag{1.38}$$

Tím je úloha vyřešena.

1.2 Teorie pole

Uvedený variační princip je možno zobecnit též pro teorii pole. Hledáme nyní extremály funkcionálu

$$S[y(x^i)] = \int_{\mathcal{O}} L\left(x^i, y_{I_p^\sigma} \right) dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n, \tag{1.39}$$

kde index $1 \le i \le n$ a multiindex $I_p = |i_1 \ldots i_p|$ a $0 \le p \le r$. Analogickým způsobem jako v mechanice získáme též variační rovnice. Podrobný způsob odvození první variační formule a dalších vztahů bude uveden v následující kapitole, kde všechny vztahy odvozujeme pro libovolnou pevnou dimenzi n bázové variety, tedy pro teorii pole. Zde se omezíme na uvedení příkladů ilustrujících využití variačního počtu v teorii pole.

[5] Horní znaménko platí pro pozitivně definitní g, dolní znaménko pro g se signaturou $(-1, 1, 1, 1)$

Následující příklad využívá kovektorového charakteru zobecněných souřadnic $\tilde{A}$. Vnější derivaci forem značíme d.

Příklad 1: Teorie elektromagnetického pole na varietách s metrikou, kde jsou zadány proudy. [6]. Buďte $(\mathcal{U}, \phi)$, kde $\phi = (x^i)$, $0 \leq i \leq 3$, $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$, lokální souřadnice v metrickém prostoru $(\mathcal{M}, G)$, $G = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$ metrický tenzor, $g = \det g_{ij}$ jeho determinant, signatura metrického tenzoru je zvolena $(-1, 1, 1, 1)$. Platí běžná konvence pro zvedání a snižování indexů. Pro přehlednost budeme diferenciální formy označovat tildou. Zavedeme 1-formy potenciálu a proudu

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A_i dx^i && (1.40) \\ \tilde{J} &= J_i dx^i. && (1.41) \end{aligned}$$

Dále zavádíme 2-formu elektromagnetického pole

$$\tilde{F} = d\tilde{A} = \sum_{i<k} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) dx^i \wedge dx^k. \tag{1.42}$$

Definujeme objemový element

$$\tilde{\epsilon} = \frac{1}{4!} \sqrt{-g} \epsilon_{ijk\ l} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l, \tag{1.43}$$

kde $\epsilon_{ijk\ l}$ je Levi-Civitův plně antisymetrický symbol. Dále definujeme operace $*$ a $\|.\|$ pro diferenciální p-formu $\tilde{\alpha}$ obvyklým způsobem

$$\begin{aligned} *\tilde{\alpha} &= \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \sqrt{-g} \epsilon_{i_1 \ldots i_p k_1 \ldots k_{4-p}} \alpha^{i_1 \ldots i_p} dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_{4-p}} && (1.44) \\ \|\tilde{\alpha}\| &= \sum_{i_1 < \ldots < i_p} \alpha^{i_1 \ldots i_p} \alpha_{i_1 \ldots i_p}. && (1.45) \end{aligned}$$

Funkcionál akce S na kompaktní podvarietě $\mathcal{O} \subset \mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ položíme roven

$$\begin{aligned} S\left[\tilde{A}\right] &= \frac{1}{4!} \int_{\mathcal{O}} \left(\tilde{A} \wedge *\tilde{J} - \frac{1}{2} d\tilde{A} \wedge *d\tilde{A} \right) && (1.46) \\ &= \int_{\mathcal{O}} \left(A_i J^i - \frac{1}{2} \left\|\tilde{F}\right\|^2 \right) \tilde{\epsilon}. \end{aligned}$$

Provedeme funkcionální derivaci $S\left[\tilde{A}\right]$ ve směru 1-formy $\tilde{\alpha}$:

$$\begin{aligned} D_{\tilde{\alpha}} S\left[\tilde{A}\right] &= \frac{d}{ds} S\left[\tilde{A} + s\,\tilde{\alpha}\right]\Big|_{s=0} && (1.47) \\ &= \frac{1}{4!} \int_{\mathcal{O}} \left(\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{J} - \frac{1}{2} d\tilde{\alpha} \wedge *d\tilde{A} - \frac{1}{2} d\tilde{A} \wedge *d\tilde{\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{4!} \int_{\mathcal{O}} \left(\tilde{\alpha} \wedge *\tilde{J} - d\tilde{\alpha} \wedge *d\tilde{A} \right) \end{aligned}$$

[6] V tomto příkladu je sledováno značení z [10] str. 91-98

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4!}\int_{\mathcal{O}}\left[\tilde{\alpha}\wedge\left(*\tilde{J}-d*a\tilde{A}\right)-d\left(\tilde{\alpha}\wedge *d\tilde{A}\right)\right] \\
&= \frac{1}{4!}\int_{\mathcal{O}}\left[\tilde{\alpha}\wedge\left(*\tilde{J}-d*d\tilde{A}\right)\right]-\frac{1}{4!}\int_{\partial\mathcal{O}}\tilde{\alpha}\wedge *d\tilde{A}
\end{aligned}
$$

Na hranici integračního oboru $\partial\mathcal{O}$ platí $\tilde{\alpha}=0$, dále dostáváme Maxwellovy rovnice

$$d\left(*d\tilde{A}\right)=*\tilde{J}, \tag{1.48}$$

vzhledem k tomu, že $\tilde{\alpha}$ je libovolná 1-forma, která vymizí na hranici $\partial\mathcal{O}$.

1.3 Triviální lagrangiány a variační rovnice

Triviální Lagrangeovou funkcí rozumíme takovou funkci, která identicky splňuje Eulerovy-Lagrangeovy rovnice.

Příklad 1: Triviální Lagrangeovy funkce $L=L\left(x^k,y^\nu,y_l^\nu\right)$ v teorii pole pro řád $r=1$. Eulerovy-Lagrangeovy výrazy (levé strany rovnic) zapisujeme ve tvaru

$$\epsilon_\sigma=\frac{\partial L}{\partial y^\sigma}-\frac{d}{dx^i}\frac{\partial L}{\partial y_i^\sigma}. \tag{1.49}$$

Předpokládáme L ve tvaru $L=\frac{dA^j\left(x^k,y^\nu\right)}{dx^j}$. Při následujících úpravách využijeme formule pro záměnu úplných a parciálních derivací

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y^\sigma}\frac{dA^i}{dx^i} &= \frac{d}{dx^i}\frac{\partial A^i}{\partial y^\sigma} && (1.50)\\
\frac{\partial}{\partial y_j^\sigma}\frac{dA^i}{dx^i} &= \frac{d}{dx^i}\underbrace{\frac{\partial A^i}{\partial y_j^\sigma}}_{0}+\frac{\partial A^j}{\partial y^\sigma}. && (1.51)
\end{aligned}
$$

Dosazením do výrazů pro ϵ_σ dostaneme opravdu identicky

$$\epsilon_\sigma=0 \tag{1.52}$$

Tímto postupem samozřejmě nelze zaručit, že všechny triviální Lagrangeovy funkce jsou uvedeného tvaru.

Variačními rovnicemi rozumíme takové diferenciální rovnice

$$\epsilon_\sigma\left(x^k,y^\nu,\ldots,y_{k_1\ldots k_s}^\nu\right)=0$$

, jež jsou Eulerovými-Lagrangeovými rovnicemi příslušnými nějaké Lagrangeově funkci $L\left(x^k,,y^\nu,\ldots,y_{k_1\ldots k_r}^\nu\right)$. Aby taková situace nastala, je nutné a stačí, aby výrazy ϵ_σ splňovat tzv. *Helmholtzovy–Soninovy podmínky*

$$\mathcal{H}_{\sigma\nu}^{j_1\ldots j_i}=\frac{\partial\epsilon_\nu}{\partial y_{j_1\ldots j_i}^\sigma}-(-1)^i\frac{\partial\epsilon_\sigma}{\partial y_{j_1\ldots j_i}^\nu}-\sum_{k=i+1}^{r}(-1)^k\begin{pmatrix}k\\i\end{pmatrix}d_{j_{i+1}}\ldots d_{j_k}\frac{\partial\epsilon_\sigma}{\partial y_{j_1\ldots j_k}^\nu}, \tag{1.53}$$

kde značení d_i znamená úplnou derivaci podle i-té bázové souřadnice $d_i = \frac{d}{dx^i}$. Pokud platí $\mathcal{H}_{\sigma\nu}^{j_1 \dots j_i} = 0$ pro $0 \leq i \leq s$, vznikly uvedené rovnice $\epsilon_\sigma = 0$ z Lagrangeovy funkce a jsou tedy (lokálně) variační. Původní Lagrangeovu funkci získáme například (lokálně) následovně: Zavedeme zobrazení

$$\chi_t \left(t, \left(x^i, y^\sigma, \dots, y^\sigma_{j_1 \dots j_s}\right)\right) = \left(x^i, ty^\sigma, \dots, ty^\sigma_{j_1 \dots j_s}\right). \tag{1.54}$$

Lagrangeova funkce L je dána jako

$$L\left(x^i, , y^\sigma, \dots, y^\sigma_{j_1 \dots j_s}\right) = y^\sigma \int_0^1 \left(\epsilon_\sigma \circ \chi_t\right) dt. \tag{1.55}$$

L je obecně definována na s-tém řádu.K snižování řádu dochází přičítáním triviálních lagrangiánů vhodného tvaru.

Důkazy tvrzení uvedených výše je možno nalézt v následující kapitole.

Kapitola 2

Geometrická formulace variačních teorií

V následující kapitole[1] přeneseme objekty a operace definované v předchozí kapitole na fibrované variety. Předpokládá se znalost základních operací a pojmů z diferenciální geometrie:

- vnější derivace diferenciálních forem — d
- pullback diferenciální formy α zobrazením f — $f^*\alpha$
- Lieova derivace diferenciální formy α podle vektorového pole ξ — $\partial_\xi \alpha$
- Kontrakce diferenciální formy α vektorovým polem ξ — $\imath_\xi \alpha$
- Lieova závorka vektorových polí ξ_1, ξ_2 — $[\xi_1, \xi_2]$
- tečný prostor k varietě $\mathcal{M}$ — varieta $T\mathcal{M}$ s přirozeně zavedenou topologií a hladkou strukturou (atlasem).
- tečné zobrazení k hladkému zobrazení $f : \mathcal{M} \mapsto \mathcal{N}$ — hladké zobrazení $Tf : T\mathcal{M} \mapsto T\mathcal{N}$

2.1 Fibrované variety a jejich prodloužení

Fibrovanou varietou rozumíme uspořádanou trojici $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$, kde Y je tzv. *totální prostor* a X tzv. *báze* jsou variety (označme $n = \dim \mathcal{X}$, $m = \dim \mathcal{Y} - n$) a $\pi : \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ je *surjektivní vnoření*, definované přirozeným způsobem:

[1] Text následující kapitoly se opírá především o [3].

Pro každý bod $y \in \mathcal{Y}$ existuje lokální souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, kde $y \in \mathcal{V}$, $\psi = (v^i, y^\sigma)$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$, pro jím projekcí π určený bod $\mathcal{X} \ni x = \pi(y)$ existuje lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \phi)$, $\phi = (x^i)$, kde $x \in \mathcal{U}$, tak, že $\mathcal{U} = \pi(\mathcal{V})$ a $x^i \circ \pi = v^i$.

Obvykle proto pro tzv. *fibrovaný souřadnicový systém* $(\mathcal{V}, \psi)$ přímo píšeme $\psi = (x^i, y^\sigma)$ vzhledem k tomu, že existuje právě jeden lokální souřadnicový systém $(\mathcal{U}, \phi)$, $\phi = (x^i)$.

Řezem fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ rozumíme zobrazení $\gamma : \mathcal{X} \supset \mathcal{U} \mapsto \mathcal{Y}$, kde množina $\mathcal{U}$ je otevřená, takové, že platí $\pi \circ \gamma = id_{\mathcal{U}}$. Dále řekneme, že dva řezy γ_1, γ_2 fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$, definované na okolí $\mathcal{U}$ bodu $x \in \mathcal{X}$, jsou r-ekvivalentní, jestliže platí

$$\gamma_1(x) = \gamma_2(x) \tag{2.1}$$

a existuje souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$ na $\mathcal{Y}$, zvolený tak, že $\gamma_1(x) = \gamma_2(x) \in \mathcal{V}$, ve kterém platí

$$\left[\frac{\partial^q \left(y^\sigma \circ \gamma_2 \circ \phi^{-1}\right)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_q}}\right]_{\phi(x)} = \left[\frac{\partial^q \left(y^\sigma \circ \gamma_1 \circ \phi^{-1}\right)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_q}}\right]_{\phi(x)} \tag{2.2}$$

pro všechna $1 \leq \sigma \leq m$, $0 \leq q \leq r$ a všechny $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_q \leq n$.

Lze prověřit, že r-ekvivalence je relací ekvivalence na množině řezů fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ definovaných v bodě x. Tuto třídu ekvivalence nazveme *r-jetem* řezu γ v bodě x a značíme $j_x^r \gamma$. Dále označme

$$j^r \mathcal{Y} = \bigcup_{x \in \mathcal{X}} j_x^r \gamma. \tag{2.3}$$

Přirozeným způsobem definujeme zobrazení (projekce) $\pi^{r,s} : j^r \mathcal{Y} \mapsto j^s \mathcal{Y}$ a $\pi^r : j^r \mathcal{Y} \mapsto \mathcal{X}$ pro $s \leq r$.

$$\pi^{r,s}\left(j_x^r \gamma\right) = j_x^s \gamma \tag{2.4}$$

$$\pi^r\left(j_x^r \gamma\right) = x \tag{2.5}$$

Nechť $(\mathcal{V}, \psi)$ je fibrovaný souřadnicový systém na $\mathcal{Y}$. Označme $V^r = \left(\pi^{r,0}\right)^{-1}(\mathcal{V})$. V dalším použijeme $J_q = (j_1 \dots j_q)$, kde $1 \leq j_1 \leq \ldots \leq j_q \leq n$ pro multiindexy délky q. Délkou multiindexu rozumíme $|J_q| = q$. Pro každý r-jet $j_x^r \gamma \in \mathcal{V}^r$ pokládáme

$$x^i\left(j_x^r \gamma\right) = x^i(x) \tag{2.6}$$

$$y_{J_q}^\sigma\left(j_x^r \gamma\right) = \left[\frac{\partial^q \left(y^\sigma \circ \gamma \circ \phi^{-1}\right)}{\partial x^{j_1} \dots \partial x^{j_q}}\right]_{\phi(x)}, \tag{2.7}$$

kde $1 \leq \sigma \leq m$ a $0 \leq |J| \leq r$. Vzniká systém $n + m\binom{n+r}{n}$ funkcí $\psi^r = \left(x^i, y_{J_q}^\sigma\right)$, kde $1 \leq i \leq n$, $1 \leq \sigma \leq m$, $0 \leq q \leq r$, který definuje zobrazení

$$\mathcal{V}^r \mapsto \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}^m \times L_{\mathrm{sym}}^1\left(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^m\right) \times \ldots \times L_{\mathrm{sym}}^r\left(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^m\right),$$

kde $L^q_{\mathrm{sym}}(\mathrm{R}^n, \mathrm{R}^m)$ je vektorový prostor q-lineárních symetrických zobrazení $\mathrm{R}^n \mapsto \mathrm{R}^m$ společně s přirozenou strukturou Banachova prostoru. Dimenze tohoto prostoru je $m\binom{n+q-1}{q}$. Na množině $j^r\mathcal{Y}$ existuje právě jedna hladká struktura taková, že pro každý souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$ na $\mathcal{Y}$ je $(\mathcal{V}^r, \psi^r)$ souřadnicovým systémem na $j^r\mathcal{Y}$ tzv. *asociovaným* s $(\mathcal{V}, \psi)$. Množina $j^r\mathcal{Y}$ společně s touto hladkou strukturou se nazývá *r-jetové prodloužení* fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Zřejmě jsou nyní uspořádáné trojice $(j^r\mathcal{Y}, \pi^{r,s}, j^s\mathcal{Y})$, kde $r > s$, popřípadě $(j^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$ také fibrované variety. Dimenze variety $j^r\mathcal{Y}$ je $n + m\binom{n+r}{n}$.

Nechť $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}$ je otevřená množina, γ je řez fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Pak *$r$-jetové prodloužení* řezu γ je zobrazení definované vztahem

$$j^r\gamma : \mathcal{U} \ni x \mapsto j^r_x\gamma \in j^r\mathcal{Y} \tag{2.8}$$

Toto zobrazení je řezem fibrované variety $(j^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$.

2.2 Vektorová pole na fibrovaných varietách a jejich prodlouženích

Nechť $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ je fibrovaná varieta, $\mathcal{V} \subset \mathcal{Y}$ otevřená množina a $\alpha : \mathcal{V} \mapsto \mathcal{Y}$ izomorfizmus. α je izomorfizmem fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$, jestliže existuje izomorfizmus $\alpha_0 : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{X}$, $U = \pi(V)$ na bázi splňující

$$\pi \circ \alpha = \alpha_0 \circ \pi. \tag{2.9}$$

Zobrazení α_0 se nazývá *π-projekce* izomorfizmu α fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Pro každé $j^r_x\gamma \in \left(\pi^{r,0}\right)^{-1}(\mathcal{V})$ klademe

$$j^r\alpha\,(j^r_x\gamma) = j^r_{\alpha_0(x)}\alpha \circ \gamma \circ \alpha_0^{-1}. \tag{2.10}$$

Z definice plynou vztahy

$$\begin{aligned} \pi^r \circ j^r\alpha &= \alpha_0 \circ \pi^r && (2.11)\\ \pi^{r,s} \circ j^r\alpha &= j^s\alpha \circ \pi^{r,s}, && (2.12) \end{aligned}$$

pro $0 \leq s \leq r$. $j^r\alpha$ je izomorfizmus fibrované variety $(j^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$ a nazývá se *r-jetové prodloužení* izomorfizmu α fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$.

Buď $\xi \in T\mathcal{Y}$ vektorové pole. Řekneme, že pole ξ je *π-projektabilní*, jestliže existuje takové vektorové pole $\xi_0 \in T\mathcal{Y}$, že platí

$$T\pi \cdot \xi = \xi_0 \circ \pi \tag{2.13}$$

Existuje-li ξ_0, je určeno jednoznačně a nazývá se *π-projekce* vektorového pole ξ. Vektorové pole ξ se nazývá *π-vertikální*, jestliže platí $T\pi \cdot \xi = 0$. V lokálních souřadnicích zapisujeme:

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \Xi^\sigma \frac{\partial}{\partial y_0^\sigma} \tag{2.14}$$

$$\xi^i \equiv 0 \qquad \forall 1 \le i \le n. \tag{2.15}$$

Označme α_t lokální jednoparametrickou grupu transformací π-projektabilního vektorového pole ξ. Podmínka projektability zaručuje, že α_t je tvořena izomorfizmy fibrované variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Pro každé $j_x^r\gamma \in j^r\mathcal{Y}$ je definována křivka $\mathrm{R} \supset (-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto j^r\alpha_t(j_x^r\gamma)$. Klademe

$$j^r\xi(j_x^r\gamma) = \left[\frac{d}{dt} j^r\alpha_t(j_x^r\gamma)\right]_{t=0} \tag{2.16}$$

Tímto vztahem je definováno π^r-projektabilní $\pi^{r,s}$-projektabilní vektorové pole $j^r\xi$ na $j^r\mathcal{Y}$ nazývané *r-jetové prodloužení* vektorového pole ξ.

Definujeme *úplnou* (také *totální*, *formální*) derivaci funkce $f : \mathcal{V}^r \mapsto \mathrm{R}$ podle x^i:

$$d_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i} + \sum_{q=0}^{r} \frac{\partial f}{\partial y_{I_q}^\sigma} y_{I_q i}^\sigma \tag{2.17}$$

Ve vzorci se sčítá přes všechny přípustné hodnoty multiindexu I_q.

Věta 1: Buď ξ π-projektabilní vektorové pole na varietě $\mathcal{Y}$ vyjádřené v lokálním souřadnicovém systému $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$

$$\xi = \xi^i\left(x^j\right)\frac{\partial}{\partial x^i} + \Xi^\sigma\left(x^j, y^\nu\right)\frac{\partial}{\partial y^\sigma}. \tag{2.18}$$

Potom prodloužení $j^r\xi$ vektorového pole je vyjádřeno vzhledem k asociovanému souřadnicovému systému $(\mathcal{V}^r, \psi^r)$

$$j^r\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{q=0}^{r} \Xi_{I_q}^\sigma \frac{\partial}{\partial y_{I_q}^\sigma}. \tag{2.19}$$

Složky $\Xi_{I_q}^\sigma$ jsou určeny rekurentním vzorcem

$$\Xi_{j_1\ldots j_q}^\sigma = d_{j_q}\Xi_{j_1\ldots j_{q-1}}^\sigma - y_{j_1\ldots j_{q-1} i}^\sigma \frac{\partial \xi^i}{\partial x^{j_q}}. \tag{2.20}$$

Věta 2: Buď $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ fibrovaná varieta, ξ_1, ξ_2 π-projektabilní vektorová pole na $\mathcal{Y}$. Pak je jejich *Lieova závorka* také π-projektabilní a platí

$$j^r\left[\xi_1, \xi_2\right] = \left[j^r\xi_1, j^r\xi_2\right]. \tag{2.21}$$

Pro $r \geq 0$ přiřaďme každému vektoru $\xi \in Tj^{r+1}\mathcal{Y}$ v bodě $j^{r+1}_x\gamma \in j^{r+1}\mathcal{Y}$ vektor $h\xi \in Tj^r\mathcal{Y}$ v bodě $j^r_x\gamma = \pi^{r+1,r}\left(j^{r+1}_x\gamma\right) \in j^r\mathcal{Y}$ vztahem

$$h\xi = T_x j^r\gamma \cdot T\pi^{r+1} \cdot \xi. \tag{2.22}$$

Zobrazení $h : Tj^{r+1}\mathcal{Y} \mapsto Tj^r\mathcal{Y}$ nazýváme *π-horizontalizace* nebo krátce horizontalizace. $h\xi$ nazýváme *horizontální složkou* vektoru ξ. Využitím komplementární konstrukce lze definovat $p\xi$, *kontaktní složku* ξ:

$$p\xi = T\pi^{r+1,r} \cdot \xi - h\xi. \tag{2.23}$$

V souřadnicovém systému indukovaném $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$ na $j^r\mathcal{Y}$ získáme pro souřadnicové vyjádření horizontální složky $h\xi$ a kontaktní složky $p\xi$ vyjádření

$$\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{q=0}^{r} \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_q} \Xi^\sigma_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_q}} \tag{2.24}$$

$$h\xi = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \xi^i \sum_{q=0}^{r} \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_q} y^\sigma_{j_1 \ldots j_q i} \frac{\partial}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_q}} \tag{2.25}$$

$$p\xi = \sum_{q=0}^{r} \sum_{j_1 \leq \ldots \leq j_q} \left(\Xi^\sigma_{j_1 \ldots j_q} - y^\sigma_{j_1 \ldots j_q i}\xi^i\right) \frac{\partial}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_q}} \tag{2.26}$$

2.3 Diferenciální formy na fibrovaných varietách a jejich prodlouženích

V další sekci označuje $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ fibrovanou varietu. Diferenciální forma ρ na $j^r\mathcal{Y}$ se nazývá *π-projektabilní*, jestliže existuje forma ρ_0 na $\mathcal{X}$ tak, že platí

$$\rho = \pi^* \rho_0. \tag{2.27}$$

Existuje-li forma ρ_0, pak je určena jednoznačně a nazývá se *π-projekcí* formy ρ. Diferenciální forma ρ na $\mathcal{Y}$ se nazývá *π-horizontální*, jestliže pro každý π-vertikální vektor ξ na $\mathcal{Y}$ platí

$$\imath_\xi \rho = 0 \tag{2.28}$$

Poznámka 1: Výše uvedenou definici projektability lze rozšířit též k definici π^r-projektability resp. $\pi^{r,s}$-projektability forem, neboť uspořádané trojice $(j^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$ resp. $(j^r\mathcal{Y}, \pi^{r,s}, j^s\mathcal{Y})$, kde $0 \leq s \ \leq r$ představují rovněž fibrované variety.

Poznámka 2: Rovněž tak uvedenou definici π-horizontality lze rozšířit na π^r-horizontalitu forem na $j^r\mathcal{Y}$ následovně:

Diferenciální forma ρ na $j^r\mathcal{Y}$ se nazývá π^r-horizontální, jestliže pro každý π^r-vertikální vektor Ξ na $j^r\mathcal{Y}$[2] platí

$$\imath_\Xi \rho = 0 \tag{2.29}$$

Věta 3: (Poincarého lemma pro fibrované variety) [3] Buď $\mathcal{U} \subset \mathrm{R}^n$ otevřená množina, $\mathcal{V} \subset \mathrm{R}^m$ otevřená koule se středem O. Označme kanonické souřadnice na $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ (x^i, y^σ). Definujeme zobrazení $\chi : [0,1] \times \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

$$\chi\left(s, \left(x^i, y^\sigma\right)\right) = \left(x^i, sy^\sigma\right). \tag{2.30}$$

Pro každou k-formu ($k \geq 1$) na $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ uvažujeme pullback $\chi^*\rho$, což je k-forma na $[0,1] \times \mathcal{U} \times \mathcal{V}$. Existuje jednoznačný rozklad k-formy $\chi^*\rho = ds \wedge \rho_0(s) + \rho'(s)$ takový, že $(k-1)$-forma $\rho_0(s)$ a k-forma $\rho'(s)$ již neobsahují ds. Definujeme

$$I\ \rho = \int \rho_0(s), \tag{2.31}$$

tedy integrujeme koeficienty formy $\rho_0(s)$ přes s od 0 do 1. V lokálních souřadnicích (x^i) na $\mathcal{U}$ a (y^σ) na $\mathcal{V}$ s přihlédnutím ke vztahům

$$\chi^* dx^i = dx^i$$

$$\chi^* dy^\sigma = s dy^\sigma + y^\sigma ds$$

dostaneme

$$\rho = \sum_{j=0}^{k} \rho_{\sigma_1 \dots \sigma_j i_{j+1} \dots i_k} dy^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_j} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \tag{2.32}$$

$$I\ \rho = \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{j} (-1)^{l-1} y^{\sigma_l} \left(\int_0^1 \rho_{\sigma_1 \dots \sigma_j i_{j+1} \dots i_k} \circ \chi s^{k-1} ds \right) \tag{2.33}$$

$$dy^{\sigma_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_{l-1}} \wedge dy^{\sigma_{l+1}} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_j} \wedge dx^{i_{j+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \tag{2.34}$$

Označme $\pi : \mathcal{U} \times \mathcal{V} \mapsto \mathcal{U}$ kartézskou projekci a

$$\imath : \mathcal{U} \ni (x^i) \mapsto (x^i, \underbrace{0, \dots, 0}_{m}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$$

nulový řez. Potom platí

$$\rho = I\ d\rho + dI\ \rho + \pi^* \imath^* \rho. \tag{2.35}$$

[2] π^r-vertikální vektor Ξ splňuje $T\pi^r \cdot \Xi = 0$.

[3] Převzato z [3] str. 3

Důkaz předchozího vztahu lze výpočtem v lokálních souřadnicích. Z předcházejícího tvrzení plyne, vlastní tvrzení. Jestliže platí $d\rho = 0$, potom existuje $(k-1)$-forma η na $\mathcal{U} \times \mathcal{V}$ taková, že platí

$$\rho = d\eta + \pi^* \imath^* \rho. \tag{2.36}$$

Zabývejme se studiem forem na varietě $j^r\mathcal{Y}$. Buď nyní ρ diferenciální k-forma na $j^r\mathcal{Y}$. Potom existuje právě jedna π^r-horizontální k-forma $h\rho$ na $j^{r+1}\mathcal{Y}$ taková, že platí

$$(j^r\gamma)^* \rho = \left(j^{r+1}\gamma\right)^* h\rho \tag{2.37}$$

pro všechny řezy γ na $\mathcal{Y}$. Z definice pullbacku plyne

$$h\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right) = \rho\left(j_x^r\gamma\right) \tag{2.38}$$

pro $k = 0$ a

$$h\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right)(\xi_1, \ldots, \xi_k) = \rho\left(j_x^r\gamma\right)\left(T_x j^r\gamma \cdot T\pi^{r+1} \cdot \xi_1, \ldots, T_x j^r\gamma \cdot T\pi^{r+1} \cdot \xi_k\right). \tag{2.39}$$

pro $k > 0$. V definicích je možno definiční obor forem $j^r\mathcal{Y}$ omezit a nahradit jej otevřenou podmnožinou $j^r\mathcal{Y}$. Zavedeme následující značení. Buď $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ otevřená množina. Označme $\Omega_k^r\mathcal{W}$ (resp. $\Omega^r\mathcal{W}$) abelovskou grupu k-forem (resp. vnější algebru forem)[4] na otevřené množině $\mathcal{W}^r \subset j^r\mathcal{Y}$. Všem otevřeným množinám $\mathcal{V} \subset \mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ přiřadíme kanonickou inkluzi $\iota_{\mathcal{V},\mathcal{W}} : \mathcal{V}^r \mapsto \mathcal{W}^r$. Svazek Ω_k^r je definován jako

$$\Omega_k^r = \left\{ \iota_{\mathcal{V},\mathcal{W}}^* \rho \middle| \rho \in \Omega_k^r\mathcal{W}, \mathcal{V} \subset \mathcal{W} \right\}$$

Obdobně postupujeme při definici svazku Ω^r. Tato konstrukce slouží k dosažení nezávislosti na $\mathcal{W}$ a konkrétním výběru formy. V dalším budeme využívat značení Ω_k^r a $\Omega_k^r\mathcal{W}$ volně, pokud nebude moci dojít k nedorozumění.

Zobrazení $\Omega_k^r \ni \rho \mapsto h\rho \in \Omega_k^{r+1}$ se nazývá π-*horizontalizace*,krátce horizontalizace, pokud splňuje následující požadavky.

Věta 4: Horizontalizace $\Omega^r \ni \rho \mapsto h\rho \in \Omega^{r+1}$ je jednoznačně určené R-lineární zobrazení zachovávající vnější součin, takové, že pro každou funkci $f : \mathcal{W}^r \mapsto \mathrm{R}$ a každý fibrovaný souřadnicový systém $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ platí

$$hf = f \circ \pi^{r+1,r} \tag{2.40}$$

$$h(df) = d_i f dx^i, \tag{2.41}$$

kde d_i značí úplnou derivaci. K *důkazu* postačí určit horizontalizaci bázových 1-forem

$$hdx^i = dx^i \tag{2.42}$$

$$hdy^\sigma_{j_1\ldots j_k} = y^\sigma_{j_1\ldots j_k i} dx^i \tag{2.43}$$

[4] Množina $\Omega_k^r\mathcal{W}$ společně s operací sčítání forem tvoří abelovskou grupu, množina $\Omega^r\mathcal{W}$ společně s operacemi sčítání forem a vnějšího součinu forem tvoří algebru.

a sporem dokázat jednoznačnost zobrazení h.

Důkaz linearity zobrazení h Buďte $\alpha, \beta \in \Omega_k^r$ diferenciální formy,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{j=0}^{k} A^{J_1\ldots J_j}_{\sigma_1\ldots\sigma_j i_{j+1}\ldots i_k} dy^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\sigma_j}\wedge dx^{i_{j+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\\ \beta &= \sum_{j=0}^{k} B^{J_1\ldots J_j}_{\sigma_1\ldots\sigma_j i_{j+1}\ldots i_k} dy^{\sigma_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\sigma_j}\wedge dx^{i_{j+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}\end{aligned}$$

jsou jejich souřadnicová vyjádření Potom s využitím vztahů (2.40), (2.41), (2.42), (2.43) a faktu, že h zachovává vnější součin, zřejmě platí

$$h(\alpha+\beta) = h(\alpha) + h(\beta).$$

Horizontalizaci lze pokládat za morfizmus vnějších algeber lokálně indukovaný horizontalizací funkcí a jejich vnějších derivací.

2.4 Rozklady diferenciálních forem

Nadále platí označení předchozích sekcí. Horizontalizace $h : Tj^{r+1}\mathcal{Y} \mapsto Tj^r\mathcal{Y}$ indukuje rozklad každé z grup Ω_k^r následujícím způsobem: Buďte $\rho \in \Omega_k^r$ k-forma, $\xi_1, \ldots, \xi_k$ vektory v bodě $j_x^{r+1}\gamma \in W^{r+1} \subset j^{r+1}\mathcal{Y}$. Pro každé $j = 1, \ldots, k$ provedeme rozklad

$$T\pi^{r+1,r}\cdot\xi_j = h\xi_j + p\xi_j \tag{2.44}$$

a vyčíslíme pullback $\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho$ k-formy ρ na vektorových argumentech $\xi_1, \ldots, \xi_k$:

$$\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right)(\xi_1,\ldots,\xi_k) = \rho\left(j_x^r\gamma\right)\left(T\pi^{r+1,r}\cdot\xi_1,\ldots,T\pi^{r+1,r}\cdot\xi_k\right). \tag{2.45}$$

Úpravou tohoto výrazu lze ukázat, že existuje jednoznačný rozklad formy

$$\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho$$

tvaru

$$\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho = \sum_{q=0}^{k} p_q\rho = h\rho + p\rho, \tag{2.46}$$

kde jsme označili $p_0\rho = h\rho$ a $p\rho = \sum_{q=1}^{k} p_q\rho$. Platí přitom

$$\begin{aligned}p_q\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right)(\xi_1,\ldots,\xi_k) &= \frac{1}{q!\,(k-q)!}\epsilon^{j_1\ldots j_q j_{q+1}\ldots j_k}\rho\left(j_x^r\gamma\right)\\ &\quad\left(p\xi_{j_1},\ldots,p\xi_{j_q},h\xi_{j_{q+1}},\ldots,h\xi_{j_k}\right)\end{aligned} \tag{2.47}$$

k-forma $p_q\rho$ se nazývá *q-kontaktní složkou* formy ρ. Zobrazení $p_q : \Omega^r \mapsto \Omega^{r+1}$ jsou lineární v následujícím smyslu: Platí $p_q(\alpha+\beta) = p_q\alpha + p_q\beta$ a $p_q(f\alpha) = \left(f \circ \pi^{r+1,r}\right) p_q\alpha$ pro každé $\alpha, \beta \in \Omega_k^r$ a $f \in \Omega_0^r$. Identicky platí, že pro $n+1 \le k \le \dim j^r\mathcal{Y}$ jsou

$$\begin{aligned} p_0\rho &= 0 \\ &\vdots \\ p_{k-n-1}\rho &= 0 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Jak lze jednoduše ukázat, nejsou již zobrazení p_q homomorfismy vnější algebry forem. Místo toho pro libovolné formy $\alpha \in \Omega_k^r$ a $\beta \in \Omega_l^r$ platí následující pravidlo

$$p_q(\alpha \wedge \beta) = \sum_{j=0}^{q} p_j\alpha \wedge p_{q-j}\beta. \tag{2.49}$$

Navíc platí $p_j\alpha = 0$ pro $k < j$ a $p_j\beta = 0$ pro $l < j$.

k-formu $\rho \in \Omega_k^r$ nazveme *kontaktní*, pokud $h\rho = 0$. Formu ρ nazveme *q-kontaktní*, jestliže $\left(\pi^{r+1,r}\right)^* \rho = p_q\rho$, nebo ekvivalentně $p_j\rho = 0 \quad \forall j \neq q$. Číslo q nazveme *stupňem kontaktnosti* formy ρ. Pro $n+1 \le k \le \dim j^r\mathcal{Y}$ má rozklad k-formy $\rho \in \Omega_k^r$ tvar $\left(\pi^{r+1,r}\right)^* \rho = p_{k-n}\rho + p_{k-n+1}\rho + \ldots + p_k\rho$. Taková forma $\rho \in \Omega_k^r$ je vždy kontaktní. Řekneme, že ρ je *silně kontaktní*, platí-li $p_{k-n}\rho = 0$. Přesvědčíme se především, že pro bázové 1-formy platí

$$pdx^i = 0 \tag{2.50}$$

$$pdy^\sigma_{j_1\ldots j_q} = dy^\sigma_{j_1\ldots j_q} - y^\sigma_{j_1\ldots j_q i}dx^i \equiv \omega^\sigma_{j_1\ldots j_q} \tag{2.51}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} d\omega^\sigma_{j_1\ldots j_q} &= -\omega^\sigma_{j_1\ldots j_q i} \wedge dx^i \quad \text{pro} \quad 0 \le q \le r-2 \\ d\omega^\sigma_{j_1\ldots j_{r-1}} &= -dy^\sigma_{j_1\ldots j_{r-1} i} \wedge dx^i \text{pro} \quad q = r-1. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Buďte ρ diferenciální forma na $j^r\mathcal{Y}$, $j_x^{r+1}\gamma \in j^{r+1}\mathcal{Y}$ bod, ζ vektor v tomto bodě a ξ π-projektabilní vektorové pole na $\mathcal{Y}$. Pak platí

$$\imath_\zeta p_q\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right) = p_{q-1}\imath_{p\zeta}\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right) + p_q\imath_{h\zeta}\rho\left(j_x^{r+1}\gamma\right) \tag{2.53}$$

$$p_q\left((j^r\alpha)^*\rho\right) = \left(j^{r+1}\alpha\right)^* p_q\rho \tag{2.54}$$

$$p_q\left(\partial_{j^r\xi}\rho\right) = \partial_{j^{r+1}\xi}p_q\rho \tag{2.55}$$

$$\left(\pi^{r+2,r+1}\right)^* p_q d\rho = p_q dp_{q-1}\rho + p_q dp_q\rho \tag{2.56}$$

Užitím věty 3, vyjádřené vztahem (2.36), aplikované na fibrovanou varietu $(j^r\mathcal{Y}, \pi^r, \mathcal{X})$ dostaneme pro formu ρ na $j^r\mathcal{Y}$

$$\rho = I\ d\rho + dI\ \rho + (\iota^r \circ \pi^r)^* \rho, \tag{2.57}$$

kde

$$\iota^r : \mathcal{U} \ni (x^i) \mapsto (x^i, \underbrace{0, \ldots, 0}_{m\binom{n+r}{n}}) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$$

je nulový řez. V případě kontaktní formy[5] ρ zřejmě platí

$$(\iota^r)^* \rho = 0_{\mathcal{X}}$$

a pro kontaktní formy ρ tedy platí

$$\rho = I \ d\rho + dI \ \rho. \tag{2.58}$$

2.5 Lagrangeovy struktury a Lepageův ekvivalent lagrangiánu

Lagrangiánem na fibrované varietě $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ nazveme π^r-horizontální n-formu λ na $j^r\mathcal{Y}$. Dvojici $((\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X}), \lambda)$ nazýváme *Lagrangeovou strukturou* řádu r. Ve fibrovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$ má lagrangián λ řádu r definovaný na $\mathcal{V}^r$ tvar

$$\lambda = L\omega_0, \tag{2.59}$$

kde

$$\omega_0 = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{2.60}$$

Buďte $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ otevřená množina a $\lambda \in \Omega^r_n \mathcal{W}$ lagrangián řádu r na fibrované varietě $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$. Dále buď $\mathcal{O} \subset \pi(\mathcal{W})$ kompaktní n-rozměrná podvarieta s okrajem (označíme $\partial\mathcal{O}$) variety $\mathcal{X}$. Označme $\Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}(\pi)$ množinu hladkých řezů variety $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$ na $\mathcal{O}$. Potom λ definuje funkcionál

$$\Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}(\pi) \ni \gamma \mapsto \lambda_{\mathcal{O}}(\gamma) = \int_{\mathcal{O}} (j^r\gamma)^* \lambda \in \mathrm{R} \tag{2.61}$$

Tento funkcionál nazýváme *variační funkcionál* nebo *funkcionál akce* asociovaný s lagrangiánem λ na oblasti $\mathcal{O}$.

Hlavním předmětem studia ve variačním počtu je vyšetřování chování funkcionálu $\lambda_{\mathcal{O}} : \Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}} \mapsto \mathrm{R}$. Buďte Ξ π-projektabilní vektorové pole na $\mathcal{W} \subset \mathcal{Y}$ a ξ jeho π-projekce, α_t (resp. α_{0t}) lokální jednoparametrická grupa transformací asociovaná s Ξ (resp. ξ). Každému řezu $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}$ přiřadíme jeho *variaci* indukovanou vektorovým polem Ξ vztahem

$$\gamma_t = \alpha_t \circ \gamma \circ (\alpha_{0t})^{-1}. \tag{2.62}$$

[5] v souřadnicovém zápisu takové formy se nevyskytují součty typu

$$A_{i_1 \ldots i_k} dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$$

Variace řezu γ je jednoparametrickou soustavou řezů variety $\mathcal{Y}$. Zobrazení $t \mapsto \gamma_t$,které nazýváme deformací řezu γ, je hladké. Zvolme nyní pevně $\mathcal{O}$, γ a Ξ. Tím získáme reálnou funkci jedné reálné proměnné definovanou na okolí $(-\epsilon, \epsilon) \subset \mathrm{R}$ bodu 0. [6]

$$(-\epsilon, \epsilon) \ni t \mapsto \lambda_{\alpha_{0t}(\mathcal{O})}(\gamma_t) = \int_{\alpha_{0t}(\mathcal{O})} j^r \left(\alpha_t \circ \gamma \circ \alpha_{0t}^{-1}\right)^* \lambda \in \mathrm{R} \tag{2.63}$$

Upravujeme dále integrál

$$\int_{\alpha_{0t}(\mathcal{O})} j^r \left(\alpha_t \circ \gamma \circ \alpha_{0t}^{-1}\right)^* \lambda = \int_{\alpha_{0t}(\mathcal{O})} \left(\alpha_{0t}^{-1}\right)^* j^r\gamma^* j^r \alpha_t^* \lambda = \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^* j^r \alpha_t^* \lambda \tag{2.64}$$

Naším cílem je určit stacionární řezy γ funkcionálu, tzv. *extremály.* Derivujeme vzniklou funkci podle parametru t v bodě $t = 0$ a získáme

$$\left[\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^* j^r \alpha_t^* \lambda\right]_{t=0} = \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^* \lim_{t\to 0}\frac{j^r\alpha_t^*\lambda - \lambda}{t} = \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^* \partial_{j^r\Xi}\lambda \tag{2.65}$$

Vzniklý funkcionál

$$\Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}(\pi) \mapsto \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^*\partial_{j^r\Xi}\lambda \in \mathrm{R} \tag{2.66}$$

nazýváme *první variací* funkcionálu akce $\lambda_{\mathcal{O}}$ vzhledem k vektorovému poli Ξ. Všimněme si korespondence $\lambda \leftrightarrow \partial_{j^r\Xi}\lambda$, pomocí níž je možno definovat vyšší variace funkcionálu $\lambda_{\mathcal{O}}$. Řez $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}(\pi)$ je *stacionárním řezem* variačního funkcionálu $\lambda_{\mathcal{O}}$ vzhledem ke Ξ, pokud platí

$$\left(\partial_{j^r\Xi}\lambda\right)_{\mathcal{O}}(\gamma) = 0. \tag{2.67}$$

Vyjádříme první variaci funkcionálu $\lambda_{\mathcal{O}}$ pro případ π-vertikálního vektorového pole Ξ v lokálních souřadnicích $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$.

$$\lambda = L dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{2.68}$$

$$\Xi = \Xi^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} \tag{2.69}$$

$$j^r\Xi = \sum_{k=0}^{r} d_{j_1}\ldots d_{j_k}\Xi^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma_{j_1\ldots j_k}} \tag{2.70}$$

$$\partial_{j^r\Xi}\lambda = \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{j_1\ldots j_k}} d_{j_1}\ldots d_{j_k}\Xi^\sigma dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{2.71}$$

Řez $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{O},\mathcal{W}}$ je *extremálou* lagrangiánu λ na $\mathcal{O}$ právě tehdy, platí-li

$$\int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^*\partial_{j^r\Xi}\lambda = 0. \tag{2.72}$$

[6] $\epsilon > 0$ volíme tak, aby definiční obory zobrazení γ_t obsahovaly $\mathcal{O}$.

V dalším zavedeme Lepageovy formy, potřebné k formulaci nutných a postačujících podmínek pro extremály. Řekneme, že forma $\rho \in \Omega_n^s$ je *Lepageova*, pokud pro každé π^s-vertikální, $\pi^{s,0}$-projektabilní vektorové pole na $j^s\mathcal{Y}$ je forma $h\left(\imath_\Xi d\rho\right)$ závislá pouze na $\pi^{s,0}$-projekci vektorového pole Ξ. Dále řekneme, že Lepageova forma ρ je *Lepageův ekvivalent* lagrangiánu λ, pokud platí $\left(\pi^{t,s+1}\right)^* h\left(\rho\right) = \left(\pi^{t,r}\right)^* \lambda$.

Forma $\rho \in \Omega_n^s$ je Lepageova tehdy a jen tehdy, má-li v každém fibrovaném souřadnicovém systému $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (x^i, y^\sigma)$ tvar

$$\left(\pi^{s+1,s}\right)^* \rho = \Theta + d\eta + \mu, \tag{2.73}$$

kde η je kontaktní $(n-1)$-forma a stupeň kontaktnosti μ je ≥ 2 a forma Θ má souřadnicové vyjádření

$$\Theta = f\omega_0 + \sum_{k=0}^{s} \left(\sum_{l=0}^{s-k} (-1)^l \, d_{p_1} \dots d_{p_l} \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_{j_1 \dots j_k p_1 \dots p_l i}} \right) \omega^\sigma_{j_1 \dots j_k} \wedge \omega_i, \tag{2.74}$$

kde $\omega_i = \imath_{\partial/\partial x^i} \omega_0 = (-1)^{i-1} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n$. Formu Θ nazýváme *hlavní složkou* Lepageovy formy ρ vzhledem k danému souřadnicovému systému (složky obecně závisí na volbě souřadnic). Je-li ρ Lepageova forma, potom forma $\left(\pi^{s+1,s}\right)^* d\rho$ má souřadnicové vyjádření

$$\left(\pi^{s+1,s}\right)^* d\rho = E + F = \left(\sum_{l=0}^{s+1} (-1)^l \, d_{p_1} \dots d_{p_l} \frac{\partial f}{\partial y^\sigma_{p_1 \dots p_l}} \right) \omega^\sigma \wedge \omega_0 + F, \tag{2.75}$$

přičemž stupeň kontaktnosti F je ≥ 2. Lepageova forma $\rho \in \Omega_n^s$ je Lepageovým ekvivalentem lagrangiánu $\lambda = L dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ tehdy a jen tehdy, lze-li hlavní složku Θ formy ρ vyjádřit jako

$$\Theta = L\omega_0 + \sum_{k=0}^{r-1} \left(\sum_{l=0}^{r-1-k} (-1)^l \, d_{p_1} \dots d_{p_l} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{j_1 \dots j_k p_1 \dots p_l i}} \right) \omega^\sigma_{j_1 \dots j_k} \wedge \omega_i. \tag{2.76}$$

Je-li ρ Lepageovým ekvivalentem lagrangiánu $\lambda = L\omega_0$ potom

$$p_1 d\rho = E_\sigma\left(L\right) \omega^\sigma \wedge \omega_0, \tag{2.77}$$

kde

$$E_\sigma\left(L\right) = \sum_{l=0}^{r} (-1)^l \, d_{p_1} \dots d_{p_l} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{p_1 \dots p_l}}. \tag{2.78}$$

Forma $E_\lambda = p_1 d\rho$ příslušná Lepageovu ekvivalentu ρ lagrangiánu λ se nazývá *Eulerovou-Lagrangeovou formou* asociovanou s lagrangiánem λ. Výrazy $E_\sigma\left(L\right)$ nazýváme *Eulerovými-Lagrangeovými výrazy.* Zobrazení $\Omega_n^r \ni \lambda \mapsto E_\lambda \in \Omega_{n+1}^{2r}$ se nazývá *Eulerovým-Lagrangeovým zobrazením.* Všechny tři výše definované pojmy jsou definovány globálně.

Poznámka 1: Lepageův ekvivalent Θ lagrangiánu λ není v teorii pole určen jednoznačně (na rozdíl od mechaniky). Eulerova-Lagrangeova forma je určena jednoznačně jak v teorii pole, tak, samozřejmě, i v mechanice.

Vraťme se nyní k úpravě výrazu pro první variaci funkcionálu

$$\left(\partial_{j^r\Xi}\lambda\right)_{\mathcal{O}}(\gamma) = \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^*\partial_{j^r\Xi}\lambda. \tag{2.79}$$

Vyjádříme λ pomocí jeho Lepageova ekvivalentu ρ

$$\partial_{j^r\Xi}\lambda = h\imath_{j^r\Xi}d\rho + hd\imath_{j^r\Xi}\rho. \tag{2.80}$$

Pro každý řez γ na $\mathcal{Y}$ platí

$$j^r\gamma^*\partial_{j^r\Xi}\lambda = j^s\gamma^*\imath_{j^r\Xi}d\rho + dj^s\gamma^*\imath_{j^r\Xi}\rho. \tag{2.81}$$

Tento výraz se nazývá *první variační formule v infinitezimálním tvaru.* Integrací a využitím Stokesovy věty dostaneme

$$\int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^*\partial_{j^r\Xi}\lambda = \int_{\mathcal{O}} j^s\gamma^*\imath_{j^r\Xi}d\rho + \int_{\partial\mathcal{O}} j^s\gamma^*\imath_{j^r\Xi}\rho. \tag{2.82}$$

Toto je *první variační formule v integrálním tvaru.*

Dále se budeme věnovat mechanice, tzn. případu $\dim\mathcal{X} = 1$. V takovém případě zjednodušujeme značení následujícím způsobem. Buď $(\mathcal{V},\psi)$, $\psi = (t, y^\sigma)$ fibrovaný souřadnicový systém. Indukovaný souřadnicový systém na $j^r\mathcal{Y}$ zapisujeme jako $(\mathcal{V}^r,\psi^r)$, $\psi^r = (t, y_0^\sigma, \ldots, y_r^\sigma)$. Kontaktní 1-formy zapisujeme $\omega_k^\sigma = dy_k^\sigma - y_{k+1}^\sigma dt$ a úplnou derivaci značíme $\frac{d}{dt}$. Věnujme se funkcionálu akce

$$\lambda_{\mathcal{O}}(\gamma) = \int_{\mathcal{O}} j^r\gamma^*\lambda. \tag{2.83}$$

S každou formou $\rho \in \Omega_1^{r-1}$ je asociován lagrangián $\lambda \in \Omega_{1,\mathcal{X}}^r$ pomocí zobrazení $\lambda = h\rho$. Definujeme Lepageův ekvivalent Θ řádu s formy ρ. Platí:

$$\begin{aligned} \left(\pi^{t,s+1}\right)^* h\Theta &= \left(\pi^{t,r}\right)^* h\rho && (2.84)\\ p_1\imath_\Xi d\Theta &= 0 && (2.85)\end{aligned}$$

pro každé $\pi^{s,0}$-vertikální vektorové pole Ξ na $j^s\mathcal{Y}$. Lze ukázat, že existuje právě jedna forma Θ. Navíc $s \le 2r-1$. Druhá podmínka je ekvivalentní tvrzení, že forma $p_1 d\Theta$ je $\pi^{s+1,0}$-horizontální.

Stejným postupem, jako je uvedeno výše, odvodíme první variační formuli v infinitezimálním tvaru. Buď ξ π-projektabilní vektorové pole na $\mathcal{Y}$.

$$\partial_{j^r\xi}\lambda = \partial_{j^{s+1}\xi}h\Theta = h\partial_{j^s\xi}\Theta = h\imath_{j^s\xi}d\Theta + hd\imath_{j^s\xi}\Theta = \imath_{j^{s+1}\xi}p_1 d\Theta + hd\imath_{j^s\xi}\Theta. \tag{2.86}$$

Ve 2-formě

$$E_\lambda = p_1 d\Theta \tag{2.87}$$

vystupující v prvním sčítanci první variační formule poznáme Eulerovu-Lagrangeovu formu. Stejně lze získat také první variační formuli v integrálním tvaru. Ve fibrovaném lokálním souřadnicovém systému $(\mathcal{V}, \psi)$, $\psi = (t, y^\sigma)$ dostaneme pro souřadnicová vyjádření

$$\lambda = Ldt. \tag{2.88}$$

$$\Theta = Ldt + \sum_{k=0}^{r-1} P_\sigma^k (L)\, \omega_k^\sigma, \tag{2.89}$$

kde

$$P_\sigma^k (L) = \sum_{j=0}^{r-1-k} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial y_{k+j+1}^\sigma}. \tag{2.90}$$

a

$$E_\lambda = E_\sigma (L)\, \omega^\sigma \wedge dt, \tag{2.91}$$

kde

$$E_\sigma (L) = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial y_J^\sigma}. \tag{2.92}$$

2.6 Variační posloupnost

Následující dvě podkapitoly sledují především práci [2]. Zobrazení $p_q : \Omega_k^r \mathcal{W} \mapsto \Omega_k^{r+1} \mathcal{W}$ definovaná vztahem (2.47), která jsou morfizmy abelovských grup, přirozeným způsobem definují morfizmy svazků $p_q : \Omega_k^r \mapsto \Omega_k^{r+1}$. Zobrazení značíme stejně, jelikož nemůže dojít k nedorozumění. Pro $1 \leq k \leq n$ definujeme

$$\Omega_{k,c}^r = \ker p_0 = \ker h \tag{2.93}$$

a pro $n + 1 \leq k \leq N$, kde

$$N = n + m \begin{pmatrix} n+r \\ n \end{pmatrix}$$

je dimenze $j^r \mathcal{Y}$, definujeme

$$\Omega_{k,c}^r = \ker p_{k-n}. \tag{2.94}$$

Symbolem ker značíme jádro lineárního zobrazení. Explicitní zápis forem ρ, které náležejí do $\Omega_{k,c}^r \mathcal{W}$ následuje

$$\rho = \Phi_\sigma^J \omega_J^\sigma \tag{2.95}$$

pro $k = 1$, kde $\Phi_\sigma^J \in \Omega_0^r \mathcal{W}$ a $|J| = r - 1$.

$$\rho = \omega_J^\sigma \wedge \Phi_\sigma^J + d\omega_I^\sigma \wedge \Psi_\sigma^I \tag{2.96}$$

pro $2 \leq k \ \leq n$, kde $\Phi^J_\sigma \in \Omega^r_{k-1}\mathcal{W}$, $|J| \leq r-1$ a $\Psi^J_\sigma \in \Omega^r_{k-2}\mathcal{W}$, $|I| = r-1$

$$\begin{aligned} \rho \quad = \quad & \sum_{k-n+1 \leq p+s} \sum_{p+2s \leq k} \omega^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\sigma_p}_{J_p} \wedge \\ \wedge \quad & d\omega^{\nu_1}_{I_1} \wedge \ldots \wedge d\omega^{\nu_s}_{I_s} \wedge \Phi^{J_1 \ldots J_p I_1 \ldots I_s}_{\sigma_1 \ldots \sigma_p \nu_1 \ldots \nu_s} \end{aligned} \tag{2.97}$$

pro $n+1 \leq k \leq N$, kde $\Phi \in \Omega^r_{k-p-2s}\mathcal{W}$, $|J_j| \leq r-1$ pro $1 \leq j \leq p$ a $|I_i| = r-1$ pro $1 \leq i \leq s$. Důkazy uvedených tvrzení jsou v [3] str. 44-49.

Označme nyní $d_k : \Omega^r_k \mapsto \Omega^r_{k+1}$[7] morfizmy svazků definované zobrazením vnější derivace k-forem

$$d : \Omega^r_k\mathcal{W} \mapsto \Omega^r_{k+1}\mathcal{W}$$

definovaných na $\mathcal{W}^r \subset j^r\mathcal{Y}$. Obraz svazku Ω^r_k morfizmem d_k označíme symbolicky $d\Omega^r_{k,c}$. Definujeme svazky

$$\Theta^r_k = \Omega^r_{k,c} \tag{2.98}$$

pro $1 \leq k \ \leq n$ a

$$\Theta^r_k = \Omega^r_{k,c} + d\Omega^r_{k-1,c} \tag{2.99}$$

pro $n+1 \leq k \ \leq N$. Na základě výrazu (2.95) zjistíme, že $\Omega^r_{k,c} = \{0\}$ pro $k > M + 2(n-1)$, kde

$$M = m \begin{pmatrix} n+r-1 \\ n \end{pmatrix}$$

je počet nezávislých 1-forem ω^σ_J, $0 \leq |J| \leq r-1$ na $j^r\mathcal{Y}$. Z toho dále vyplývá, že svazky Θ^r_k pro $k > M + 2(n-1) + 1$ jsou triviální; platí tedy $\Theta^r_k = \{0\}$.

Definujeme relaci ekvivalence pro $\alpha, \beta \in \Omega^r_k$ následovně $\alpha \sim \beta$, jestliže platí $\alpha = \beta + \theta$, kde $\theta \in \Theta^r_k$. S odvoláním na [2] dostáváme následující komutativní diagram svazků, v němž horizontální zobrazení jsou přirozené inkluze a přirozená kvocientní zobrazení. Podrobněji se budeme problematikou zaobírat v následující kapitole pro $\dim \mathcal{X} = 1$.

[7] V předešlých a dalších podkapitolách byla takto označena totální derivace, která v této podkapitole není užívána, a proto nemůže dojít k nedorozumění.

Variační posloupnost — Diagram 1

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 0 & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & \mathrm{R} & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & \Omega_0^r & & & & & \\
 & & & & | & & & & & \\
 & & & & d_0 & \searrow E_0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
0 & \to & \Theta_1^r & \to & \Omega_1^r & & \to & \Omega_1^r/\Theta_1^r & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_1 & & \downarrow d_1 & & & \downarrow E_1 & & \\
0 & \to & \Theta_2^r & \to & \Omega_2^r & & \to & \Omega_2^r/\Theta_2^r & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_2 & & \downarrow d_2 & & & \downarrow E_2 & & \\
0 & \to & \Theta_3^r & \to & \Omega_3^r & & \to & \Omega_3^r/\Theta_3^r & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_3 & & \downarrow d_3 & & & \downarrow E_3 & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow d_{k-1} & & \downarrow d_{k-1} & & & \downarrow E_{k-1} & & \\
0 & \to & \Theta_k^r & \to & \Omega_k^r & & \to & \Omega_k^r/\Theta_k^r & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_k & & \downarrow d_k & & & \downarrow E_k & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow d_{P-1} & & \downarrow d_{P-1} & & & \downarrow E_{P-1} & & \\
0 & \to & \Theta_P^r & \to & \Omega_P^r & & \to & \Omega_P^r/\Theta_P^r & \to & 0 \\
 & & \downarrow d_P & & \downarrow d_P & \swarrow E_P & & & & \\
 & & 0 & \to & \Omega_{P+1}^r & & & & & \\
 & & & & | & & & & & \\
 & & & & d_{P+1} & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & | & & & & & \\
 & & & & d_{N-1} & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & \Omega_N^r & & & & & \\
 & & & & | & & & & & \\
 & & & & d_N & & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & & \\
 & & & & 0 & & & & &
\end{array}
$$

Kvocientní posloupnost

$$\begin{aligned}&0 \longrightarrow \mathrm{R} \longrightarrow \Omega_0^r \xrightarrow{E_0} \Omega_1^r/\Theta_1^r \xrightarrow{E_1} \Omega_2^r/\Theta_2^r \xrightarrow{E_2} \cdots \\ &\xrightarrow{E_2} \cdots \xrightarrow{E_{P-1}} \Omega_P^r/\Theta_P^r \xrightarrow{E_P} \Omega_{P+1}^r \xrightarrow{E_{P+1}} \Omega_{P+2}^r \xrightarrow{E_{P+2}} \cdots \xrightarrow{E_{N-1}} \Omega_N^r \xrightarrow{E_N} 0\end{aligned} \tag{2.100}$$

definovaná tímto diagramem se nazývá *variační posloupnost* řádu r na fibrované varietě $(\mathcal{Y}, \pi, \mathcal{X})$.

2.7 Eulerovo-Lagrangeovo a Helmholtzovo-Soninovo zobrazení

Využijeme komutativního diagramu 1 z předchozí podkapitoly ke konstrukci *Eulerova-Lagrangeova zobrazení* E_n. Napřed vezmeme obecnou formu $\alpha \in \Omega_{n+1}^r$, a upravujeme 1-kontaktní část pullbacku

$$p_1 \left(\pi^{s-1,r}\right)^* \alpha = \sum_{k=0}^{r} A_\sigma^{j_1 \cdots j_k} \omega_{j_1 \ldots j_k}^\sigma \wedge \omega_0, \tag{2.101}$$

kde $\omega_0 = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ a $s \geq r$ je vhodně zvolené číslo, které bude určeno později. Dále označíme

$$\omega_j = (-1)^{j-1} dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{j-1} \wedge dx^{j+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$$

a využijeme vzorce (2.50), podle kterého platí

$$\omega_{j_1 \ldots j_k}^\sigma \wedge \omega_0 = -d\left(\omega_{j_1 \ldots j_{k-1}}^\sigma \wedge \omega_{j_k}\right). \tag{2.102}$$

Formu (2.101) postupně upravíme na tvar

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{r} \Big\{ (-1)^k d_{j_1} \ldots d_{j_k} A_\sigma^{j_1 \cdots j_k} \omega^\sigma \wedge \omega_0 - d\left(A_\sigma^{j_1 \cdots j_k} \omega_{j_1 \ldots j_{k-1}}^\sigma \wedge \omega_{j_k}\right) + \\ &+ \tfrac{\partial A_\sigma^{j_1 \cdots j_k}}{\partial y_{I_0}^{\nu_0}} \omega_{I_0}^{\nu_0} \wedge \omega_{j_1 \ldots j_{k-1}}^\sigma \wedge \omega_{j_k} + \\ &+ \sum_{l=1}^{k-1} (-1)^{l-1} \Big[d\left(d_{j_{k-l+1}} \ldots d_{j_k} A_\sigma^{j_1 \cdots j_k} \omega_{j_1 \ldots j_{k-l-1}}^\sigma \wedge \omega_0\right) - \\ &- \tfrac{\partial}{\partial y_{I_l}^{\nu_l}} \left(d_{j_{k-l+1}} \ldots d_{j_k} A_\sigma^{j_1 \cdots j_k}\right) \omega_{I_l}^{\nu_l} \wedge \omega_{j_1 \ldots j_{k-l-1}}^\sigma \wedge \omega_{k-l} \Big] \Big\}\end{aligned} \tag{2.103}$$

Na řádu s můžeme tedy s odvoláním na definici ekvivalence psát

$$p_1 \left(\pi^{s-1,r}\right)^* \alpha \sim \sum_{k=0}^{r} (-1)^k d_{j_1} \ldots d_{j_k} A_\sigma^{j_1 \cdots j_k} \omega^\sigma \wedge \omega_0 \tag{2.104}$$

Zajímá nás situace, kdy $\alpha = d\lambda$, kde

$$\lambda = L\omega_0 \tag{2.105}$$

je lagrangián. Potom platí, že

$$p_1 d\lambda = \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_k}} \omega^\sigma_{j_1 \ldots j_k} \wedge \omega_0 \tag{2.106}$$

a

$$p_1 \left(\pi^{s-1,r}\right)^* d\lambda \sim \sum_{k=0}^{r} (-1)^k d_{j_1} \ldots d_{j_k} \frac{\partial L}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_k}} \omega^\sigma \wedge \omega_0. \tag{2.107}$$

Zbývá určit řád s variační posloupnosti. Z definice úplné derivace je zřejmé, že zvedá řád funkce o jedničku. Nejvyšší s připadající v úvahu je zřejmě $s = 2r$. Tím je souřadnicová reprezentace Eulerova-Lagrangeova zobrazení zkonstruována.

V dalším definujeme *Helmholtzovo-Soninovo* zobrazení příslušné formě $\rho = \epsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ definované na řádu s. Nejdříve se zabývejme případem $s = 1$.

$$d\rho \sim \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu}\right) \omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_0 + \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_k} \omega^\nu_k \wedge \omega^\sigma \wedge \omega_0 - \frac{1}{2} \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_k} \omega^\sigma \wedge \omega^\nu_k \wedge \omega_0 \tag{2.108}$$

Poslední sumand dále upravujeme. Využijeme vztahu

$$d\left(f\omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_k\right) = df \wedge \omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_k - f\omega^\nu \wedge \omega^\sigma_k \wedge \omega_0 - f\omega^\sigma \wedge \omega^\nu_k \wedge \omega_0 \tag{2.109}$$

Z tohoto vztahu dále plyne, že

$$f\omega^\sigma \wedge \omega^\nu_k \wedge \omega_0 \sim -f\omega^\nu \wedge \omega^\sigma_k \wedge \omega_0 - d_k f\omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_0 \tag{2.110}$$

pro každou funkci f definovanou na $j^1\mathcal{Y}$. Položíme $f = -\frac{1}{2}\frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_k}$. Konečný výsledek dostaneme ve tvaru

$$d\rho \sim \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial y^\sigma} - \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu}\right) - \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_k}\right] \omega^\sigma \wedge \omega^\nu \wedge \omega_0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_k} + \frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial y^\sigma_k}\right) \omega^\sigma_k \wedge \omega^\nu \wedge \omega_0. \tag{2.111}$$

Předpokládejme, že platí obecně

$$\begin{aligned} d\rho \quad \sim \quad & \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{s} \left[\frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial y^\sigma_{j_1 \ldots j_i}} - (-1)^i \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{j_1 \ldots j_i}} - \right. \\ - \quad & \left. \sum_{k=i+1}^{s} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} d_{j_{i+1}} \ldots d_{j_k} \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{j_1 \ldots j_k}}\right] \omega^\sigma_{j_1 \ldots j_i} \wedge \omega^\nu \wedge \omega_0 \end{aligned} \tag{2.112}$$

Dokážeme vztah úplnou indukcí vzhledem k s. Je tedy potřeba upravovat výraz

$$\frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{j_1 \ldots j_{s+1}}} \omega^\nu_{j_1 \ldots j_{s+1}} \wedge \omega^\sigma \wedge \omega_0, \tag{2.113}$$

který rozdělíme na poloviny jako pro případ $s = 1$. Opět jako v případě $s = 1$ budeme upravovat výraz typu

$$\begin{aligned} & f\omega^\sigma_{j_{s+1} \ldots j_{s-l+2}} \wedge \omega^\nu_{j_1 \ldots j_{s-l+1}} \wedge \omega_0 \sim -f\omega^\sigma_{j_{s+1} \ldots j_{s-l+1}} \wedge \omega^\nu_{j_1 \ldots j_{s-l}} \wedge \omega_0 - \\ - \quad & d_{j_{s-l+1}} f\omega^\sigma_{j_{s+1} \ldots j_{s-l+2}} \wedge \omega^\nu_{j_1 \ldots j_{s-l}} \wedge \omega_0 \end{aligned} \tag{2.114}$$

Funkce f zastupují výrazy

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y^\nu_{j_1 \dots j_{s+1}}}$$

pro $l = 0$. Je již vidět, že po s-násobném zopakování úpravy, kdy rekurentně použijeme vzorec (2.114), dostaneme právě chybějící členy ve formě (2.112). Tím je problém konstrukce Helmholtzova-Soninova zobrazení uzavřen. Jak vyplývá z diagramu 1, musí se Helmholtzova-Soninova forma na formách $\rho = \epsilon_\sigma \omega^\sigma \wedge \omega_0$ vzniklých Eulerovým-Lagrangeovým zobrazením z lagrangiánu $\lambda = L\omega_0$ anulovat.

Kapitola 3

Variační posloupnost v mechanice

3.1 Souřadnicová vyjádření diferenciálních forem

Nechť $(\mathcal{V},\psi),\psi=(t,y^{\sigma}),1\leq\sigma\leq m$ je souřadnicový systém na fibrované varietě $\mathcal{Y}$, $(\mathcal{U},\phi),\mathcal{U}=\pi(\mathcal{V}),\phi=(t)$ asociovaný systém na bázi $\mathcal{X}$ a $(\mathcal{V}^r,\psi^r),\mathcal{V}^r=\left(\pi^{r,0}\right)^{-1}(\mathcal{V}),\psi^r=(t,y_0^{\sigma},\ldots,y_r^{\sigma})$ asociovaný fibrovaný systém na $j^r\mathcal{Y}$. Mějme dále diferenciální formu $\rho\in\Omega_k^r$. Její obecné vyjádření v bázi souřadnicových 1-forem dy_k^{σ} a dt je

$$\rho=\frac{1}{(k-1)!}A^{j_1\ldots j_{k-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}}dy^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt+\frac{1}{k!}B^{j_1\ldots j_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}dy^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\ldots\wedge dy^{\sigma_k}_{j_k},\tag{3.1}$$

kde koeficienty $A^{j_1\ldots j_{k-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}}$ resp. $B^{j_1\ldots j_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ jsou antisymetrické v multiindexech $\binom{j_q}{\sigma_q}$, kde $1\leq q\leq k-1$ resp. $1\leq q\leq k$. Existuje jednoznačný rozklad formy $\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho$ na $(k-1)$-kontaktní a k-kontaktní část.

$$\left(\pi^{r+1,r}\right)^*\rho=p_{k-1}\rho+p_k\rho\tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}p_{k-1}\rho &= \frac{1}{(k-1)!}\left(A^{j_1\ldots j_{k-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}}+B^{j_1\ldots j_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}y^{\sigma_k}_{j_k+1}\right)\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt\\ &= P^{j_1\ldots j_{k-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}}\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt\end{aligned}\tag{3.3}$$

$$p_k\rho=\frac{1}{k!}B^{j_1\ldots j_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\ldots\wedge\omega^{\sigma_k}_{j_k}\tag{3.4}$$

kde $\omega^{\nu}_k=dy^{\nu}_k-y^{\nu}_{k+1}dt$ značíme bázovou kontaktní 1-formu. Je zřejmé, že koeficienty $P^{j_1\ldots j_{k-1}}_{\sigma_1\ldots\sigma_{k-1}}$ jsou rovněž antisymetrické ve všech multiindexech. Přešli jsme tedy k bázi tvořené 1-formami ω^{σ}_{j}, $0 \leq j \leq r$ a dt. Všechny úvahy pro formu vyjádřenou v tomto tvaru je nutno provádět na $(r+1)$-ním řádu. Je vhodné zavést ještě další vyjádření, které je jistým kompromisem mezi předešlými volbami bází, a spočívá na tom, že souřadnicové 1-formy dy^{σ}_{j} nahradíme kontaktními 1-formami ω^{σ}_{j}, ale pouze pro $0 \leq j \leq r-1$. Na r-tém řádu ponecháme bázovou 1-formu dy^{σ}_{r}. Toto vyjádření formy ρ se zdá být z hlediska další aplikace při výpočtu reprezentantů nejvýhodnější. V bázi forem $(dt, \omega^{\sigma}_{j}, dy^{\sigma}_{r})$, $0 \leq j \leq r-1$ lze k-formu ρ zapsat následovně:

$$\begin{aligned}\rho \;=\; & \frac{1}{(k-1)!}\sum_{p=0}^{k-1}\begin{pmatrix} k-1 \\ p \end{pmatrix}\mathcal{A}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k-1}} dy^{\sigma_1}_{r}\wedge\dots\wedge dy^{\sigma_p}_{r}\wedge\omega^{\sigma_{p+1}}_{j_{p+1}}\wedge\dots \\ & \dots\wedge\omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt \;+ \qquad (3.5) \\ + & \frac{1}{k!}\sum_{p=0}^{k}\begin{pmatrix} k \\ p \end{pmatrix}\mathcal{B}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} dy^{\sigma_1}_{r}\wedge\dots\wedge dy^{\sigma_p}_{r}\wedge\omega^{\sigma_{p+1}}_{j_{p+1}}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_k}_{j_k},\end{aligned}$$

kde koeficienty $\mathcal{A}^{j_1\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_{k-1}}$ resp. $\mathcal{B}^{j_1\dots j_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}$ jsou funkcemi vždy na r-tém řádu. Koeficienty jsou antisymetrické jak v multiindexech $\begin{pmatrix} r \\ \sigma_q \end{pmatrix}$, $1 \leq q \leq p$, kde $1 \leq p \leq k-1$, resp. $1 \leq p \leq k$, tak v multiindexech $\begin{pmatrix} j_q \\ \sigma_q \end{pmatrix}$, $p+1 \leq q \leq k-1$ resp. $p+1 \leq q \leq k$, kde $0 \leq p \leq k-1$ resp. $0 \leq p \leq k$. Pak $\left(\pi^{r+1,r}\right)^{*}\rho = p_{k-1}\rho + p_k\rho$. Pro koeficienty $(k-1)$-kontaktní složky k-formy ρ potom platí vztah:

$$\begin{aligned} p_{k-1}\rho &= P^{j_1\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_{k-1}}\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt \qquad (3.6) \\ &= \frac{1}{(k-1)!}\left(\mathcal{A}^{j_1\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_{k-1}} + \mathcal{B}^{j_1\dots j_{k-1} r}_{\sigma_1\dots\sigma_{k-1}\sigma_k} y^{\sigma_k}_{r+1}\right)_{\text{asym}}\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}\wedge dt,\end{aligned}$$

kde $0 \leq j_1, \dots, j_{k-1} \leq r$ a index asym značí antisymetrizaci ve zbývajících multiindexech, tj. $\binom{r}{\sigma_q}$ a $\binom{j_t}{\sigma_t}$, $0 \leq j_t \leq r-1$, $1 \leq q \leq p$, $p+1 \leq t \leq k$. Pro k-kontaktní složku antisymetrické k-formy ρ potom platí vztah:

$$p_k\rho = \frac{1}{k!}\mathcal{B}^{j_1\dots j_k}_{\sigma_1\dots\sigma_k}\omega^{\sigma_1}_{j_1}\wedge\dots\wedge\omega^{\sigma_k}_{j_k} \qquad (3.7)$$

Porovnáním s (3.3) získáme vztahy mezi koeficienty obou vyjádření:

$$\mathcal{A}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k-1}} = A^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k-1}} + B^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} y^{\sigma_k}_{j_k+1}, \qquad (3.8)$$

kde $0 \leq j_{p+1}, \dots, j_k \leq r-1$ a $0 \leq p \leq k-1$.

$$\mathcal{B}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} = B^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}}, \qquad (3.9)$$

kde $0 \leq j_{p+1}, \dots, j_k \leq r-1$ a $0 \leq p \leq k$. Inverzní vztahy mezi mezi koeficienty získáme vyřešením rovnic (3.8), (3.9).

$$\begin{aligned} B^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} &= \mathcal{B}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} \qquad (3.10) \\ A^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k-1}} &= \mathcal{A}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k-1}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k-1}} - \mathcal{B}^{r\dots r j_{p+1}\dots j_{k}}_{\sigma_1\dots\sigma_p\sigma_{p+1}\dots\sigma_{k}} y^{\sigma_k}_{j_k+1}, \qquad (3.11)\end{aligned}$$

Obory hodnot indexů jsou uvedeny výše.

3.2 Reprezentace variační posloupnosti

Nyní definujeme třídy forem na Ω^r_k. K tomu zavedeme relaci ekvivalence na Ω^r_k.

Definice *ekvivalence forem* na Ω^r_k Nechť $\alpha, \beta \in \Omega^r_k$. Říkáme, že formy α a β jsou ekvivalentní a píšeme $\alpha \sim \beta$, právě když rozdíl $\alpha - \beta \in \Theta^r_k$, kde $\Theta^r_k = \Omega^r_{k,c} + d\Omega^r_{k-1,c}$ je podgrupou abelovské grupy Ω^r_k. Tedy slovy, je-li rozdíl forem α a β součtem k-kontaktní k-formy a vnější derivace $(k-1)$-kontaktní $(k-1)$-formy na r-tém řádu.

$$\alpha - \beta = \theta + d\phi \quad \theta \in \Omega^r_{k,c}, \phi \in \Omega^r_{k-1,c} \tag{3.12}$$

$$\theta = P^{j_1 \dots j_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k} \omega^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_k}_{j_k}, \tag{3.13}$$

kde $0 \leq j_q \leq r-1$, $1 \leq q \leq k$.

$$\phi = Q^{j_1 \dots j_{k-1}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}} \omega^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \dots \wedge \omega^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}}, \tag{3.14}$$

kde $0 \leq j_q \leq r-1$, $1 \leq q \leq k-1$. Koeficienty $P^{j_1 \dots j_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k}$ a $Q^{j_1 \dots j_{k-1}}_{\sigma_1 \dots \sigma_{k-1}}$ jsou úplně antisymetrické v multiinedexech a jsou funkcemi na $j^r\mathcal{Y}$.

Faktorovou grupou grupy Ω^r_k vzhledem k její (normální) podgrupě Θ^r_k označme Ω^r_k / Θ^r_k.

Třída generovaná formou α: $[\alpha] = \{\beta \in \Omega^r_k | \, \beta \sim \alpha\}$

Reprezentant $[\alpha]$: libovolná forma $\beta \in [\alpha]$

Faktorizace: $F^r_k : \Omega^r_k \ni \alpha \mapsto F^r_k(\alpha) = [\alpha] \in \Omega^r_k / \Theta^r_k$

Reprezentace faktorové grupy Ω^r_k / Θ^r_k: Jedná se o každé zobrazení, které přiřazuje třídě některého jejího reprezentanta $\Phi^r_k : \Omega^r_k / \Theta^r_k \ni [\alpha] \mapsto (\alpha)_0 \in \Omega^r_k$. Je vidět, že reprezentací faktorové grupy je nekonečně mnoho. Všechny reprezentace jsou injektivní, je tedy možný přechod od reprezentanta zpět ke třídě.

Zobecněná definice ekvivalence forem na Ω_k^r

Nechť $\alpha \in \Omega_k^r$ a $\beta \in \Omega_k^s$. Řekneme, že α a β jsou *ekvivalentní v zobecněném smyslu*, jestliže existuje $t \geq r, s$ tak, že $(\pi^{t,r})^*\alpha - (\pi^{t,s})^*\beta \in \Theta_k^t$. Jistě platí, že jsou-li α a β ekvivalentní, jsou ekvivalentní také v zobecněném smyslu. Opačné tvrzení neplatí. Nechť však jsou $\alpha \in \Omega_k^r$ a $\beta \in \Omega_k^s$ formy ekvivalentní v zobecněném smyslu a nechť $q \in \mathcal{N}$ je nejmenší takové číslo, že forma α je $\pi^{r,q}$-projektabilní a forma β je $\pi^{s,q}$-projektabilní. Pak formy $(\pi^{r,q})^*\,\alpha$ a $(\pi^{s,q})^*\,\beta$ jsou ekvivalentní v obvyklém smyslu.

Volba vhodné reprezentace tříd forem na Ω_k^r/Θ_k^r

Pro dané r hledáme takovou reprezentaci Φ_k^t, při níž reprezentanti $\Phi_k^t\left([(\pi^{t,r})^*\alpha]\right)$, kde $\alpha \in \Omega_k^r$ je libovolná forma, mají standardní fyzikální interpretaci, tzn. reprezentanti vnějších derivací 0-forem $\Phi_1^t\left([(\pi^{t,r})^* d\alpha]\right)$ jsou triviální lagrangiány, reprezentanti vnějších derivací 1-forem $\Phi_2^t\left([(\pi^{t,r})^* d\alpha]\right)$ Eulerovy-Lagrangeovy formy a reprezentanti vnějších derivací 2-forem $\Phi_3^t\left([(\pi^{t,r})^* d\alpha]\right)$ Helmholtzovy-Soninovy formy. Dále je požadováno globální zadání reprezentantů. Tím míníme následující vlastnost: Buďte $(\mathcal{U}\ , \Phi)$ a $(\mathcal{V}, \Psi)$ dva souřadnicové systémy na $\mathcal{Y}$ a $(\mathcal{U}^s, \Phi^s)$ a $(\mathcal{V}^s, \Psi^s)$ s nimi asociované systémy na $J^s\mathcal{Y}$. Požadujme, aby na $\mathcal{U}^s \cap \mathcal{V}^s$ byla souřadnicová vyjádření reprezentanta třídy $[\alpha]$ získaná v obou systémech svázána obvyklými transformačními vztahy. Při schematickém označení transformace souřadnic $T_{\Phi\to\Psi}$ musí tedy platit:

$$T_{\Phi\to\Psi}\left(\Phi_k^t\left(\left[\left(\pi^{t,r}\right)^*\alpha\right]\right)\right) = \Phi_k^t\left(\left[\left(\pi^{t,r}\right)^* T_{\Phi\to\Psi}\left(\alpha\right)\right]\right). \tag{3.15}$$

Uvedeme důležitou pomůcku při hledání reprezentantů. K tomu uvažme následující diagram, sloužící k definici kvocientního zobrazení $Q_k^{r,r+1}$:

Kvocientní zobrazení — Diagram 1

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
\Theta_k^r \arrow[rr, "(\pi^{r+1,r})^*"] \arrow[d, "\imath_k^r"'] & & \Theta_k^{r+1} \arrow[d, "\imath_k^{r+1}"] \\
\Omega_k^r \arrow[rr, "(\pi^{r+1,r})^*"] \arrow[d, "F_k^r"'] & & \Omega_k^{r+1} \arrow[d, "F_k^{r+1}"] \\
\Omega_k^r/\Theta_k^r \arrow[rr, "Q_k^{r,r+1}"] \arrow[d] & & \Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1} \arrow[d] \\
0 & & 0
\end{tikzcd}
$$

kde zobrazení $\imath_k^r$, $\imath_k^{r+1}$ jsou kanonické injekce a faktorizace F_k^r a F_k^{r+1} jsou zobrazení definovaná výše. Kvocientní zobrazení definujeme podmínkou komutace výše uvedeného diagramu. Musí tedy platit:

$$Q_k^{r,r+1} \circ F_k^r = F_k^{r+1} \circ \left(\pi^{r+1,r}\right)^* \tag{3.16}$$

V dalším uvedeme důležitou větu, která zaručuje schůdnost postupu konstrukce reprezentantů zvyšováním řádu formy α.

Věta 1: Kvocientní zobrazení $Q_k^{r,r+1} : \Omega_k^r/\Theta_k^r \mapsto \Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1}$ je injektivní.

Důkaz: Dokázat injektivitu znamená dokázat, že pro různé vzory dostaneme různé obrazy nebo ekvivalentně, jsou-li totožné dva libovolné obrazy, pak jsou totožné i jim příslušné vzory. Protože navíc $Q_k^{r,r+1}$ je lineární, stačí dokázat

$$Q_k^{r,r+1}([\alpha]) = 0_{\Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1}} \Rightarrow [\alpha] = 0_{\Omega_k^r/\Theta_k^r} \tag{3.17}$$

Nechť platí předpoklad, tj. $Q_k^{r,r+1}([\alpha]) = 0_{\Omega_k^{r+1}/\Theta_k^{r+1}} = \Theta_k^{r+1}$ a zvolme $\alpha \in [\alpha] \in \Omega_k^r/\Theta_k^r$ libovolně. Forma $(\pi^{r+1,r})^*\alpha$ je tedy $\pi^{r+1,r}$-projektabilní. K důkazu pravdivosti implikace tedy postačuje ukázat, že $\alpha \in 0_{\Omega_k^r/\Theta_k^r} = \Theta_k^r$. Formu $\left(\pi^{r+1,r}\right)^* \alpha$ předpokládejme ve tvaru

$$\left(\pi^{r+1,r}\right)^* \alpha = \alpha_0 + d\alpha' \quad \alpha_0 \in \Omega_{k,c}^{r+1}, \alpha' \in \Omega_{k-1,c}^{r+1} \tag{3.18}$$

Dokážeme, že formy α_0 a α' jsou $\pi^{r+1,r}$-projektabilní. Platí, že

$$d\alpha_0 = d\left((\pi^{r+1,r})^*\alpha\right) = p_k d\alpha + p_{k+1} d\alpha, \tag{3.19}$$

kde

$$\alpha_0 = \frac{1}{k!} A_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}^{j_1 \ldots j_k} \omega_{j_1}^{\sigma_1} \wedge \ldots \wedge \omega_{j_k}^{\sigma_k}, \tag{3.20}$$

kde $0 \leq j_1, \ldots, j_k \leq r$ a $A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} \in \Omega^{r+1}_0$. Z $\pi^{r+1,r}$-projektability formy $\left(\pi^{r+1,r}\right)^* \alpha$ plyne i $\pi^{r+1,r}$-projektabilita formy $d\alpha_0$. Přímým dosazením dostaneme

$$p_k d\alpha_0 = (\pi^{r+2,r+1})^* p_k d\alpha \tag{3.21}$$

a

$$p_{k+1} d\alpha_0 = (\pi^{r+2,r+1})^* p_{k+1} d\alpha. \tag{3.22}$$

Z vyjádření (3.20) plyne:

$$p_{k+1} d\alpha_0 = \frac{1}{k!} p_1 \left(dA^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}\right) \wedge \omega^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\sigma_k}_{j_k} = \frac{1}{k!} \sum_{l=0}^{r+1} \frac{\partial A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}}{\partial y^\rho_l} \omega^\rho_l \wedge \omega^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \omega^{\sigma_k}_{j_k} \tag{3.23}$$

$p_{k+1} d\alpha_0$ je $\pi^{r+2,r+1}$-projektabilní (dokonce dekompozibilní na $j^{r+1}\mathcal{Y}$). Proto nesmí výraz (3.23) obsahovat členy s ω^ρ_{r+1}:

$$\frac{\partial A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}}{\partial y^\rho_{r+1}} = 0, \tag{3.24}$$

tzn., že koeficienty $A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \cdots j_k}$ jsou funkcemi na $j^r\mathcal{Y}$. Nyní vyjádřeme formu $d\alpha_0$ v jiném tvaru:

$$\alpha_0 = \frac{1}{k!} A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} (dy^{\sigma_1}_{j_1} - y^{\sigma_1}_{j_1+1} dt) \wedge \ldots \wedge \left(dy^{\sigma_k}_{j_k} - y^{\sigma_k}_{j_k+1} dt\right), \tag{3.25}$$

z toho

$$\begin{aligned} d\alpha_0 &= \frac{1}{k!} dA^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} \wedge dy^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\sigma_k}_{j_k} - \frac{1}{(k-1)!} \left(dA^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} y^{\sigma_k}_{j_k+1} + \right. \\ &+ \left. A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} dy^{\sigma_k}_{j_k+1}\right) \wedge dy^{\sigma_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{\sigma_{k-1}}_{j_{k-1}} \wedge dt \end{aligned} \tag{3.26}$$

Vzhledem k (3.24) jsou členy obsahující $dA^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ $\pi^{r+1,r}$-projektabilní. Aby byla $d\alpha_0$ $\pi^{r+1,r}$ projektabilní, musí tedy platit, že $A^{j_1 \cdots j_{k-1} r}_{\sigma_1 \ldots \sigma_{k-1} \sigma_k} = 0$. Užitím úplné antisymetrie koeficientů $A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}$ pak dostáváme

$$A^{j_1 \cdots j_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k} = 0 \Leftrightarrow j_s = r, \tag{3.27}$$

alespoň pro jeden index s, $1 \leq s \leq k$. Forma α_0 je tedy $\pi^{r+1,r}$-projektabilní. Z linearity projekce $\pi^{r+1,r}$ automaticky plyne projektabilita $d\alpha'$. Stejná argumentace jako v případě formy α_0 pak vede k závěru, že i forma α' je $\pi^{r+1,r}$-projektabilní. Celkově tedy platí, že $\alpha \in \Theta^r_k$.

Poznámka 1: Touto větou je samozřejmě zaručena také injektivita kvocientních zobrazení $Q^{r,t}_k : \Omega^r_k / \Theta^r_k \mapsto \Omega^t_k / \Theta^t_k$, kde $t > r$, protože $Q^{r,t}_k$ je kompozicí injektivních zobrazení $Q^{r,t}_k = Q^{t-1,t} \circ \cdots \circ Q^{r,r+1}_k$. Kompozicí injektivních zobrazení získáme opět injektivní zobrazení.

Injektivitou kvocientního zobrazení $Q^{r,t}_k$ je zaručena možnost hledání reprezentanta na vyšším řádu pomocí odčítání forem ležících v Θ^t_k od dané formy, protože je zaručena existence inverzního zobrazení $\left(Q^{r,t}_k\right)^{-1}$ definovaného na množině tříd $Q^{r,t}_k \left(\Omega^r_k / \Theta^r_k\right)$.

Zobecněná reprezentace faktorové grupy Ω^r_k/Θ^r_k

Zobecněnou reprezentací faktorové grupy Ω^r_k/Θ^r_k nazveme každé zobrazení $\overline{\Phi}^{r,t}_k : \Omega^r_k/\Theta^r_k \mapsto \Omega^t_k$ tvaru $\overline{\Phi}^{r,t}_k = \Phi^t_k \circ Q^{r,t}_k$, kde $\Phi^t_k : \Omega^t_k/\Theta^t_k \ni [\alpha] \mapsto \alpha_0 \in \Omega^t_k$ je jistá reprezentace faktorové grupy Ω^t_k/Θ^t_k. Protože Φ^t_k je injektivní a $Q^{r,t}_k$ je také injektivní, je injektivní také jejich kompozice $\overline{\Phi}^{r,t}_k$, takže je zaručena možnost rekonstrukce třídy z reprezentanta. Pro praktickou konstrukci reprezentanta využijeme zobrazení

$$\overline{F}^{r,t}_k = \overline{\Phi}^{r,t}_k \circ F^r_k = \Phi^t_k \circ Q^{r,t}_k \circ F^r_k = \Phi^t_k \circ F^t_k \circ \left(\pi^{t,r}\right)^* . \tag{3.28}$$

Definiční obory a obory hodnot všech zobrazení jsou patrny z **Diagramu 2**

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] \\
\Theta^r_k \arrow[rr, "(\pi^{t,r})^*"] \arrow[d, "\imath^r_k"] & & \Theta^t_k \arrow[d, "\imath^t_k"] \\
\Omega^r_k \arrow[rr, "(\pi^{t,r})^*"] \arrow[d, "F^r_k"] & & \Omega^t_k \arrow[d, "F^t_k"] \\
\Omega^r_k/\Theta^r_k \arrow[rr, "Q^{r,t}_k"] \arrow[d] \arrow[urr, dashed, "\overline{\Phi}^{r,t}_k"] & & \Omega^t_k/\Theta^t_k \arrow[d] \arrow[u, dashed, bend right, "\Phi^t_k"'] \\
0 & & 0
\end{tikzcd}$$

Zobrazení provedená přerušovanými čarami s ostatními nekomutují. Samozřejmě, že konkrétní tvar $\overline{F}^{r,t}_k$ i $\overline{\Phi}^{r,t}_k$ závisí na výběru Φ^t_k.

Reprezentace variační posloupnosti

Uvažme následující dva sloupce diagramu

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \stackrel{d_{k-1}}{\to} & \Theta^r_k & \stackrel{d_k}{\to} & \Theta^r_{k+1} & \stackrel{d_{k+1}}{\to} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \stackrel{d_{k-1}}{\to} & \Omega^r_k & \stackrel{d_k}{\to} & \Omega^r_{k+1} & \stackrel{d_{k+1}}{\to} & \dots \\
 & & | & & | & & \\
 & & F^r_k & & F^r_{k+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \stackrel{E_{k-1}}{\to} & \Omega^r_k/\Theta^r_k & \stackrel{E_k}{\to} & \Omega^r_{k+1}/\Theta^r_k & \stackrel{E_{k+1}}{\to} & \dots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

a definujme posloupnost zobrazení $E^r_k : \Omega^r_k/\Theta^r_k \mapsto \Omega^r_{k+1}/\Theta^r_{k+1}$ požadavkem, aby diagramy komutovaly. Následující rovnice slouží tedy jako definice prvků posloupnosti zobrazení.

$$E^r_k \circ F^r_k = F^r_{k+1} \circ d_k \tag{3.29}$$

Strukturu variační posloupnosti přeneseme na reprezentanty tříd forem, kteří byli definováni výše. Uvažme následující diagram:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & \stackrel{E_{k-1}}{\to} & \Omega^r_k/\Theta^r_k & \stackrel{E_k}{\to} & \Omega^r_{k+1}/\Theta^r_{k+1} & \stackrel{E_{k+1}}{\to} & \dots \\
 & & | & & | & & \\
 & & \overline{\Phi}^{r,t}_k & & \overline{\Phi}^{r,t}_{k+1} & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots & \stackrel{\overline{E}^{r,t}_{k-1}}{\to} & \Omega^t_k & \stackrel{\overline{E}^{r,t}_k}{\to} & \Omega^t_{k+1} & \stackrel{\overline{E}^{r,t}_{k+1}}{\to} & \dots
\end{array}$$

Reprezentace jednotlivých zobrazení variační posloupnosti $\overline{E}^{r,t}_k$ asociovaná s reprezentací faktorových grup $\overline{\Phi}^{r,t}_k : \Omega^r_k/\Theta^r_k \mapsto \Omega^t_k$, kde $1 \le k \le m(r+1)+1$ ($m = \dim \mathcal{Y} - 1$) je opět definována požadavkem na komutaci příslušného diagramu:

$$\overline{E}^{r,t}_k \circ \overline{\Phi}^{r,t}_k = \overline{\Phi}^{r,t}_{k+1} \circ E^r_k \tag{3.30}$$

3.3 Konstrukce reprezentantů tříd diferenciálních forem

V mechanice mají fyzikální význam zřejmě pouze první tři sloupce variační posloupnosti, a proto je třeba jim věnovat zvýšenou pozornost. V dalším se budeme podrobně zabývat konstrukcí reprezentantů tříd 1, 2 a 3-forem a dále ukážeme postup při rekonstrukci třídy příslušné reprezentantovi. V této podkapitole je využito některých výsledků z práce [11].

Konstrukce reprezentanta pro třídu 1-forem Ω_1^r/Θ_1^r

Nechť $\alpha \in \Omega_1^r$ je 1-forma. 1-formu α rozložíme na horizontální a kontaktní část

$$(\pi^{r+1,r})^*\alpha = h\alpha + p_1\alpha, \tag{3.31}$$

přičemž $p_1\alpha \in \Omega_{c,1}^{r+1} = \Theta_1^{r+1}$.Podle zobecněné definice ekvivalence z předchozí kapitoly platí

$$\alpha \sim h\alpha. \tag{3.32}$$

Definujeme tedy zobrazení

$$\overline{F_1^r} : \Omega_1^r \ni \alpha \mapsto \alpha_0 \equiv \overline{F_1^r}(\alpha) = h\alpha \in \Omega_1^{r+1}. \tag{3.33}$$

Musí platit následující tvrzení:

$$\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \Theta_1^r, \tag{3.34}$$

tzn., že podgrupa Θ_1^r je jádrem zobrazení $\overline{F_1^r}$. Důkaz tohoto tvrzení plyne z vlastností horizontalizace h (kapitola 2.3.).

Dále je třeba prakticky provést rekonstrukci třídy. Teoretická proveditelnost tohoto záměru byla prokázána výše. Předpokládejme formu α ve tvaru

$$\alpha = A\ dt + \sum_{j=1}^{r-1} B_\sigma^j \omega_j^\sigma + B_\sigma^r dy_r^\sigma, \tag{3.35}$$

kde $A, B_\sigma^j \in \Omega_0^r \quad 0 \le j \le r$. Po provedení horizontalizace

$$h\alpha = \left(A + B_\sigma^r y_{r+1}^\sigma\right) dt. \tag{3.36}$$

Obecný reprezentant 1-formy na Ω_1^r je horizontální 1-forma na Ω_1^{r+1}, jejíž koeficient je lineární funkcí proměnné y_{r+1}^σ. Každá forma tvaru

$$\alpha_0 = \left(\mathcal{A} + \mathcal{B}_\sigma^{r+1} y_{r+1}^\sigma\right) dt, \tag{3.37}$$

kde $\mathcal{A}, \mathcal{B}_\sigma^{r+1} \in \Omega_0^{r+1}$, je tedy reprezentantem třídy forem

$$[\alpha] = \mathcal{A} dt + \mathcal{B}_\sigma^{r+1} dy_r^\sigma + \Theta_1^r. \tag{3.38}$$

Tím je problém konstrukce reprezentanta třídy na Ω_1^r/Θ_1^r vyřešen.

Konstrukce reprezentanta pro třídu 2-forem Ω_2^r/Θ_2^r

Vezměme obecnou 2-formu $\alpha \in \Omega_2^r$.

$$\alpha = \sum_{j=0}^{r-1} A_\sigma^j \omega_j^\sigma \wedge dt + A_\sigma^r dy_r^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{r-1} B_{\sigma\nu}^{jk} \omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu + \sum_{j=0}^{r-1} B_{\sigma\nu}^{jr} \omega_j^\sigma \wedge dy_r^\nu + \frac{1}{2} B_{\sigma\nu}^{rr} dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu, \tag{3.39}$$

kde $B_{\sigma\nu}^{jk} = -B_{\nu\sigma}^{kj}$, pro $0 \leq j, k \leq r$. Při konstrukci reprezentanta α_0 se neuplatní její 2-kontaktní část. Přesněji

$$(\pi^{r+1,r})^* \alpha = p_1 \alpha + \overbrace{p_2 \alpha}^{\in \Omega_{2,c}^r} \Rightarrow \alpha \sim p_1 \alpha \tag{3.40}$$

Vyjádření 1-kontaktní části formy α

$$p_1 \alpha = \sum_{j=0}^{r} P_\sigma^j \omega_j^\sigma \wedge dt, \tag{3.41}$$

kde

$$P_\sigma^j = A_\sigma^j + B_{\sigma\nu}^{jr} y_{r+1}^\nu \tag{3.42}$$

Hledejme nyní formu $\beta \in \Omega_{1,c}^s$ tak, aby forma $(\pi^{s,r+1})^* p_1 \alpha - d\beta$ splňovala výše uvedené požadavky kladené na reprezentanta. Souřadnicově vyjádříme formu β

$$\beta = \sum_{j=0}^{s-1} Q_\sigma^j \omega_j^\sigma, \tag{3.43}$$

kde $Q_j^\sigma \in \Omega_0^s$, a její vnější derivaci

$$d\beta = \sum_{j=0}^{s-1} d\left(Q_\sigma^j \omega_j^\sigma\right) \tag{3.44}$$

$$(\pi^{s+1,s})^* d\beta = -\sum_{j=0}^{s-1} \left(\frac{dQ_\sigma^j}{dt} \omega_j^\sigma \wedge dt + Q_\sigma^j \omega_{j+1}^\sigma \wedge dt \right) + p_2 d\beta, \tag{3.45}$$

protože platí, že

$$(\pi^{s+1,s})^* d\omega_j^\sigma = -\omega_{j+1}^\sigma \wedge dt \tag{3.46}$$

Reprezentanta α_0 budeme hledat ve tvaru

$$\alpha_0 = (\pi^{s+1,r+1})^* p_1 \alpha - p_1 d\beta. \tag{3.47}$$

Po rozepsání do souřadnicového vyjádření dostaneme

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \left(P^0_\sigma + \frac{dQ^0_\sigma}{dt}\right)\omega^\sigma_0 \wedge dt + \sum_{j=1}^{r}\left(P^j_\sigma + \frac{dQ^j_\sigma}{dt} + Q^{j-1}_\sigma\right)\omega^\sigma_j \wedge dt + \\ &+ \sum_{j=r+1}^{s-1}\left(\frac{dQ^j_\sigma}{dt} + Q^{j-1}_\sigma\right)\omega^\sigma_j \wedge dt + Q^{s-1}_\sigma \omega^\sigma_s \wedge dt.\end{aligned} \tag{3.48}$$

Nyní budeme postupně uplatňovat podmínky, jež musí reprezentant splňovat, a omezovat svobodu volby koeficientů Q^j_σ, kde $0 \le j \le s-1$, tak dlouho, až budou určeny jednoznačně pomocí P^j_σ, kde $0 \le j \le r$. Reprezentant formy $\alpha \in \Theta^r_2$ musí být identicky nulový. Z toho po dosazení vyplývají rovnice

$$Q^{s-1}_\sigma = 0, \quad \frac{dQ^j_\sigma}{dt} + Q^{j-1}_\sigma = 0, \quad r+1 \le j \le s-1. \tag{3.49}$$

Odtud je vidět, že koeficienty Q^j_σ se tedy budou identicky rovnat nule pro

$$r \ \le \ j \ \le \ s-1.$$

Obecnou formu α tedy budeme reprezentovat ve tvaru

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \left(P^0_\sigma + \frac{dQ^0_\sigma}{dt}\right)\omega^\sigma_0 \wedge dt + \sum_{j=1}^{r-1}\left(P^j_\sigma + \frac{dQ^j_\sigma}{dt} + Q^{j-1}_\sigma\right)\omega^\sigma_j \wedge dt + \\ &+ \left(P^r_\sigma + Q^{r-1}_\sigma\right)\omega^\sigma_r \wedge dt.\end{aligned} \tag{3.50}$$

Aby tato forma měla tvar Eulerovy-Lagrangeovy formy, musí být všechny koeficienty u bázových forem rovny nule až na koeficient u $\omega^\sigma_0 \wedge dt$. To vede k následujícím rovnicím:

$$P^r_\sigma + Q^{r-1}_\sigma = 0 \tag{3.51}$$

$$P^j_\sigma + \frac{dQ^j_\sigma}{dt} + Q^{j-1}_\sigma = 0 \tag{3.52}$$

$$1 \le j \le r-1$$

Tyto rovnice mají řešení

$$Q^i_\sigma = \sum_{k=0}^{r-i-1}(-1)^{k+1}\frac{d^k P^{i+k+1}_\sigma}{dt^k} \quad 0 \le i \le r-1. \tag{3.53}$$

Můžeme tedy vyjádřit koeficient Q^0_σ. Pro výsledný tvar reprezentanta dostaneme

$$\alpha_0 = \left(P^0_\sigma + \frac{dQ^0_\sigma}{dt}\right)\omega^\sigma_0 \wedge dt = \left(\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\frac{d^k P^k_\sigma}{dt^k}\right)\omega^\sigma_0 \wedge dt. \tag{3.54}$$

Nyní dokážeme, že skutečně platí $\alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha \in \Theta^r_k$. Stačí dokázat implikaci zleva doprava. Opačnou část tvrzení dokážeme triviálně dosazením. Předpokládejme tedy, že pro jistou 2-formu $\alpha \in \Omega^r_2$ platí, že $\alpha_0 \equiv 0$. Potom pro koeficienty formy

$$p_1\alpha = \sum_{j=0}^{r} P^j_\sigma \omega^\sigma_j \wedge dt \tag{3.55}$$

musí platit následující rovnost

$$\sum_{l=0}^{r} (-1)^l \frac{d^l P^l_\sigma}{dt^l} = 0. \tag{3.56}$$

Přitom $P^j_\sigma \in \Omega^{r+1}_0$. Z předešlé rovnice vyjádříme P^0_σ

$$P^0_\sigma = -\frac{d}{dt}\sum_{l=1}^{r}(-1)^l \frac{d^{l-1}P^l_\sigma}{dt^{l-1}}. \tag{3.57}$$

Je zřejmé, že výraz určený v předchozím vztahu sumou za úplnou derivací je funkcí na Ω^r_0. Nyní postupně dosazujeme:

$$\begin{aligned}
(\pi^{r+1,r})^*\alpha &= p_1\alpha + p_2\alpha && (3.58)\\
&= \sum_{j=1}^{r} P^j_\sigma \omega^\sigma_j \wedge dt - \frac{d}{dt}\left(\sum_{l=1}^{r}(-1)^l \frac{d^{l-1}P^l_\sigma}{dt^{l-1}}\right)\omega^\sigma_0 \wedge dt + p_2\alpha = && (3.59)\\
&= \sum_{j=1}^{r} P^j_\sigma \omega^\sigma_j \wedge dt + (\pi^{r+1,r})^* d\left(\sum_{l=1}^{r}(-1)^l \frac{d^{l-1}P^l_\sigma}{dt^{l-1}}\omega^\sigma_0\right) + && (3.60)\\
&+ \sum_{k=0}^{r} \frac{\partial}{\partial y^\nu_k}\left(\sum_{l=1}^{r}(-1)^l \frac{d^{l-1}P^l_\sigma}{dt^{l-1}}\right)\omega^\sigma_0 \wedge \omega^\nu_k + \sum_{l=1}^{r}(-1)^l \frac{d^{l-1}P^l_\sigma}{dt^{l-1}}\omega^\sigma_1 \wedge dt + p_2\alpha.
\end{aligned}$$

U prvního a předposledního člene se první sčítance v sumách vyruší a je možno opět vytknout jednu úplnou derivaci a vzniklý výraz opět upravit na vnější derivaci 1-formy. Tímto postupem dostaneme po $(r-1)$ krocích

$$\begin{aligned}
(\pi^{r+1,r})^*\alpha &= -\sum_{s=1}^{r}(-1)^s \Bigg\{ \left(\pi^{r+1,r}\right)^* d\sum_{l=s}^{r} \underbrace{(-1)^l \frac{d^{l-s}P^l_\sigma}{dt^{l-s}}}_{\in \Omega^r_0} \omega^\sigma_{s-1} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y^{\nu_k}}\left[(-1)^l \frac{d^{l-s}P^l_\sigma}{dt^{l-s}}\omega^\sigma_{s-1}\right]\omega^\sigma_{s-1} \wedge \omega^\nu_k \Bigg\} + p_2\alpha. \qquad (3.61)
\end{aligned}$$

Každému kroku odpovídá jedna hodnota sčítacího indexu s. Výsledný výraz má následující strukturu

$$(\pi^{r+1,r})^*\alpha = (\pi^{r+1,r})^* d\alpha_1 + \alpha_2, \tag{3.62}$$

kde $\alpha_1 \in \Omega^r_{1,c}$ a $\alpha_2 \in \Omega^{r+1}_{2,c}$. Z toho plyne, že také α_2 je $\pi^{r+1,r}$ projektabilní podle věty 1 uvedené v této kapitole. Tím bylo dokázáno, že opravdu $\alpha \in \Theta^r_2$.

Problém rekonstrukce třídy $[\alpha] \in \Omega_2^r/\Theta_2^r$ při znalosti reprezentanta α_0.

Nyní řešíme následující problém: Nechť $\alpha_0 = F_\sigma \omega_0^\sigma \wedge dt \in \Omega_2^s$, kde $s \leq 2r+1$. Stanovíme podmínky nutné a postačující, kladené na funkce $F_\sigma \in \Omega_2^s$, aby forma α_0 byla reprezentantem jisté třídy forem $[\alpha] \in \Omega_2^r/\Theta_2^r$ a určíme tuto třídu na základě znalosti funkcí F_σ. Formu $\alpha \in \Omega_2^r$ předpokládáme ve tvaru

$$\alpha = \sum_{j=0}^{r-1} A_\sigma^j \omega_j^\sigma \wedge dt + A_\sigma^r y_r^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2} \sum_{j,k=0}^{r-1} B_{\sigma\nu}^{jk} \omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu + \sum_{j=0}^{r-1} B_{\sigma\nu}^{jr} \omega_j^\sigma \wedge dy_r^\nu + \frac{1}{2} B_{\sigma\nu}^{rr} dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu \tag{3.63}$$

a obvyklými antisymetriemi koeficientů. Její 1-kontaktní část na $(r+1)$-ním řádu dostaneme jako

$$p_1\alpha = \sum_{j=0}^{r} \left(A_\sigma^j + B_{\sigma\nu}^{jr} y_{r+1}^\nu \right) \omega_j^\sigma \wedge dt. \tag{3.64}$$

Aby forma

$$\alpha_0 = F_\sigma \omega_0^\sigma \wedge dt, \tag{3.65}$$

byla reprezentantem třídy $[\alpha]$, musí platit

$$F_\sigma = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(A_\sigma^j + B_{\sigma\nu}^{jr} y_{r+1}^\nu \right). \tag{3.66}$$

Jak A_σ^j, tak $B_{\sigma\nu}^{jk}$ jsou funkcemi na Ω_0^r. Provedením úplných derivací vyjádříme funkci F_σ jako polynom v proměnných y_l^σ, kde $r+1 \leq l \leq s$, s koeficienty z Ω_0^r. Úplnou derivaci zapíšeme následujícím způsobem

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} &= \frac{\partial X}{\partial t} + \sum_{l=0}^{r-1} \frac{\partial X}{\partial y_l^\kappa} y_{l+1}^\kappa + \frac{\partial X}{\partial y_r^\kappa} y_{r+1}^\kappa \\ &= \frac{d' X}{dt} + \frac{\partial X}{\partial y_r^\kappa} y_{r+1}^\kappa, \end{aligned} \tag{3.67}$$

kde $\frac{d'}{dt}$ je tzv. *neúplná derivace* na $j^r\mathcal{Y}$. Dostaneme

$$\begin{aligned} F_\sigma &= \alpha_\sigma + \beta_{\sigma\nu}^{(r+1)} y_{r+1}^\nu + \cdots + \beta_{\sigma\nu}^{(2r+1)} y_{2r+1}^\nu + \\ &+ \sum_{q=2}^{r+1} \sum_{j_1+\ldots+j_q \leq r} \sum_{1 \leq j_1,\ldots,j_q \leq r} \gamma_{\sigma\nu_1\ldots\nu_q}^{j_1\ldots j_q} y_{r+j_1}^{\nu_1} \ldots y_{r+j_q}^{\nu_q}, \end{aligned} \tag{3.68}$$

Ukazuje se, že k rekonstrukci třídy postačují koeficienty α_σ a $\beta_{\sigma\nu}^{(r+1+j)}$, kde $0 \leq j \leq r$, tedy jinými slovy lineární část polynomu (3.68). Ostatní (nelineární) členy polynomu jsou vyjádřitelné pomocí členů lineárních. Tvar rekonstruované třídy je následující:

$$[\alpha] = \alpha_\sigma \omega_0^\sigma \wedge dt + \sum_{j=0}^{r-1} Q_{\sigma\nu}^{jr} \omega_j^\sigma \wedge dy_r^\nu + \frac{1}{2} Q_{\sigma\nu}^{rr} dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu + \theta_2^r, \tag{3.69}$$

kde θ_2^r probíhá množinu Θ_2^r a pro koeficienty $Q_{\sigma\nu}^{jr}$, $0 \leq j \leq r$, platí

$$Q_{\sigma\nu}^{jr} = \sum_{k=j}^{r} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) (-1)^k \frac{d'^{k-j}}{dt^{k-j}} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+k)} \tag{3.70}$$

Vztahy (3.69) a (3.70) prověříme dosazením do výrazu pro výpočet reprezentanta.

$$F_\sigma = \alpha_\sigma + \underbrace{\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(Q_{\sigma\nu}^{jr} y_{r+1}^\nu \right)}_{G_\sigma} \tag{3.71}$$

Dále upravujme G_σ.

$$G_\sigma = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{j} \sum_{l=j}^{r} (-1)^j (-1)^l \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} l \\ j \end{array} \right) \left(\frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}} \frac{d'^{l-j}}{dt^{l-j}} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+l)} \right) y_{r+1+k}^\nu, \tag{3.72}$$

přičemž při úpravě výrazu bylo použito vzorce (důkaz lze snadno provést např. indukcí vzhledem k j)

$$\frac{d^j}{dt^j} (X \cdot Y) = \sum_{q=0}^{j} \left(\begin{array}{c} j \\ q \end{array} \right) \frac{d^q X}{dt^q} \frac{d^{j-q} Y}{dt^{j-q}}. \tag{3.73}$$

V dalším rozepíšeme $\frac{d^{j-k}}{dt^{j-k}}$ následujícím způsobem

$$\frac{d^q X}{dt^q} = \frac{d'^q X}{dt^q} + (\text{ další členy obsahující proměnné } y_{r+1+j}^\sigma \text{ }) \tag{3.74}$$

Pro koeficienty G_σ lineární v y_{r+1+j}^σ dostaneme

$$G_\sigma^{(\text{lin.})} = \sum_{j=0}^{r} \sum_{k=0}^{j} \sum_{l=j}^{r} (-1)^j (-1)^l \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} l \\ j \end{array} \right) \left(\frac{d'^{j-k}}{dt^{j-k}} \frac{d'^{l-j}}{dt^{l-j}} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+l)} \right) y_{r+1+k}^\nu, \tag{3.75}$$

což se po využití vztahu

$$\sum_{j=k}^{l} (-1)^j \left(\begin{array}{c} j \\ k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} l \\ j \end{array} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} 0 & l \neq k \\ (-1)^k & l = k \end{array} \right. \tag{3.76}$$

zjednoduší na tvar

$$G_\sigma^{(\text{lin.})} = \sum_{j=0}^{r} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+j)} y_{r+1+j}^{\nu}, \tag{3.77}$$

kde vzhledem k antisymetrii $Q_{\sigma\nu}^{rr}$ musíme požadovat $\beta_{\sigma\nu}^{(2r+1)} = -\beta_{\nu\sigma}^{(2r+1)}$. Vyjádření ostatních (nelineárních) členů výrazu G_σ není z hlediska rekonstrukce třídy $[\alpha]$ z reprezentanta α_0 podstatné. Toto vyjádření je ovšem podstatné pro rozpoznání reprezentanta z výrazů typu (3.68). Aby totiž forma $F_\sigma \omega_0^\sigma \wedge dt$ byla rerezentantem, musí mít polynom (3.68) u vyšších mocnin y_{r+1+j}^σ takové koeficienty, aby splňoval vztahy (3.70) a (3.69). Vyjádříme obecně úplné derivace $\frac{d^q}{dt^q}X$ pomocí neúplných derivací. Vzhledem k tomu, že G_σ je polynomem v proměnných y_{r+j}^σ, můžeme zpětně obdržet koeficienty jeho členů s-tého řádu s-násobným derivovaním podle proměnných y_{r+j}^σ.

$$\frac{\partial^s}{\partial_{r+j_s}^{\sigma_s} \dots \partial_{r+j_1}^{\sigma_1}} \left(\frac{d^l X}{dt^l} \right) = \sum_{k_1=0}^{l} \sum_{k_2=0}^{k_1} \dots \sum_{k_s=0}^{k_{s-1}} \left(\begin{array}{c} l \\ k_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right) \dots \tag{3.78}$$

$$\dots \left(\begin{array}{c} k_{s-1} \\ k_s \end{array} \right) \frac{d^{k_s}}{dt^{k_s}} \left[\frac{\partial^s X}{\partial y_{r+j_s+k_s-k_{s-1}}^{\sigma_s} \dots \partial_{r+j_2+k_2-k_1}^{\sigma_2} \partial_{r+j_1+k_1-l}^{\sigma_1}} \right]$$

Můžeme provést sumaci[1] přes všechna $k_p = 0 \dots l$, kde $1 \le p \le s$. Pokud má být výraz koeficientem u členu řádu s, je nutno úplné derivace v tomto výrazu nahradit neúplnými derivacemi. Aplikujeme nyní postup na vzorec 3.72. G_σ je vyjádřitelné pomocí koeficientů $\beta_{\sigma\nu}^{r+1+k}$, kde $0 \le k \le r$, jejich s-tých parciálních derivací podle proměnných y_j^κ, kde $1 \le j \le r$ a $1 \le s \le r$ a dále pomocí p-tých neúplných derivací výše uvedených výrazů, kde $1 \le p \le r-1$. Postupujeme tedy následovně:

$$G_\sigma = \sum_{j,k,q=0}^{r} (-1)^{j+k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} j \\ q \end{array} \right) y_{r+1+j-q}^{\nu} \underbrace{\frac{d^q}{dt^q} \frac{d'^{k-j}}{dt^{k-j}} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+k)}}_{\star} \tag{3.79}$$

Dále upravujeme část výrazu označenou $\star$. Pomocí výše nastíněného postupu vyjádříme úplné derivace

$$\star = \sum_{s=0}^{r} \sum_{j_1 \dots j_s} y_{r+j_1}^{\sigma_1} \dots y_{r+j_s}^{\sigma_s} \sum_{k_1,\dots,k_s=0}^{q} \left(\begin{array}{c} q \\ k_1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} k_1 \\ k_2 \end{array} \right) \dots \left(\begin{array}{c} k_{s-1} \\ k_s \end{array} \right) \cdot \tag{3.80}$$

$$\cdot \underbrace{\frac{d'^{k_s}}{dt^{k_s}} \frac{\partial^s}{\partial y_{r+j_s+k_s-k_{s-1}}^{\sigma_s} \dots \partial y_{r+j_1+k_1-q}^{\sigma_1}} \frac{d'^{k-j}}{dt^{k-j}} \beta_{\sigma\nu}^{(r+1+k)}}_{\star\star}$$

[1] Zavádíme konvenci $\left(\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right) = 0$ pro $a < b$ u kombinačních čísel.

V části výrazu označeného $\star\star$ provedeme záměnu parciálních a neúplných derivací[2] a konečně dostaneme

$$\sum_{q_1,\dots,q_s=0}^{k-j} \begin{pmatrix} k-j \\ q_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} q_{s-1} \\ q_s \end{pmatrix} \tag{3.81}$$
$$\frac{d'^{q_s}}{dt^{q_s}} \frac{\partial^s \beta^{(r+1+k)}_{\sigma\nu}}{\partial y^{\sigma_s}_{r+j_s+k_s+q_s-k_{s-1}-q_{s-1}} \dots y^{\sigma_1}_{r+j_1+k_1+q_1-k+j}}$$

Tam, kde je toho třeba, je nutno provést symetrizaci vzniklých koeficientů. Tím je problém rekonstrukce třídy uzavřen[3]. Byly jednoznačně definovány takové formy, které mohou být reprezentanty tříd forem z Ω^r_2/Θ^r_2. Reprezentanty jsou právě takové formy, které mají polynomiální charakter v proměnných y^ν_{r+1+k}, kde $0 \le k \le r$. Koeficienty u absolutního člene a členů lineárních jsou libovolné, koeficienty u nelineárních členů jsou vyjádřitelné pomocí koeficientů členů lineárních.

Pro ilustraci uvedeme výsledky pro $r = 1, 2$. Ve vzorci (3.72) nahradíme úplné derivace a přímým výpočtem dostaneme pro $r = 1$:

$$G_\sigma = \beta^{(2)}_{\sigma\nu} y^\nu_2 + \beta^{(3)}_{\sigma\nu} y^\nu_3 + \left[\frac{\partial \beta^{(3)}_{\sigma\nu}}{\partial y^\kappa_1} \right]_{\text{sym } \kappa\nu} y^\kappa_2 y^\nu_2, \tag{3.82}$$

přičemž koeficient $\beta^{(3)}_{\sigma\nu} = -\beta^{(3)}_{\nu\sigma}$. Obdobně postupujeme pro $r = 2$ s výsledkem

$$\begin{aligned} G_\sigma &= \beta^{(3)}_{\sigma\nu} y^\nu_3 + \beta^{(4)}_{\sigma\nu} y^\nu_4 + \beta^{(5)}_{\sigma\nu} y^\nu_5 + \left[\frac{\partial}{\partial y^\kappa_2} \left(\beta^{(4)}_{\sigma\nu} + \frac{d' \beta^{(5)}_{\sigma\nu}}{dt} \right) - \frac{\partial \beta^{(5)}_{\sigma\nu}}{\partial y^\kappa_1} \right]_{\text{sym } \kappa\nu} y^\kappa_3 y^\nu_3 \\ &+ \left(2 \frac{\partial \beta^{(5)}_{\sigma\nu}}{\partial y^\kappa_2} + \frac{\partial \beta^{(5)}_{\sigma\kappa}}{\partial y^\nu_2} \right) y^\kappa_3 y^\nu_4 + \left[\frac{\partial^2 \beta^{(5)}_{\sigma\nu}}{\partial y^\lambda_2 \partial y^\kappa_2} \right]_{\substack{\text{sym } \lambda\nu \\ \text{sym } \kappa\nu}} y^\kappa_3 y^\nu_3 y^\lambda_3, \end{aligned} \tag{3.83}$$

kde opět $\beta^{(5)}_{\sigma\nu} = -\beta^{(5)}_{\nu\sigma}$. Analogicky je možno postupovat pro $r > 2$.

Konstrukce reprezentanta pro třídu 3-forem Ω^r_3/Θ^r_3

V dalším postupu vycházíme z některých výsledků práce [11]. Nechť je nyní $\alpha \in \Omega^r_3$. V souřadnicovém zápisu z úvodní podkapitoly dostaneme pro 2-kontaktní komponentu α

$$p_2\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j,l=0}^{r} \left(A^{jl}_{\sigma\nu} + B^{jlr}_{\sigma\nu\lambda} y^\lambda_{r+1} \right) \omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_l \wedge dt, \tag{3.84}$$

[2] Pravidlo pro záměnu je v tomto případě identické jako v případě úplných derivací.

[3] Předchozí rekonstrukci je možno využít při řešení inverzního variačního problému. Napřed Helmholtzovým-Soninovým zobrazením zjistíme, zda jsou rovnice variační. Potom provedeme rekonstrukci třídy. Víme, že tato třída vznikla jako třída vnější derivace jisté formy, jejíž horizontalizací získáme lagrangián.

kde $A^{jl}_{\sigma\nu}, B^{jlr}_{\sigma\nu\lambda} \in \Omega^r_0$. Pro zjednodušení zápisu označíme

$$p_2\alpha = P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_l \wedge dt, \tag{3.85}$$

kde $P^{jl}_{\sigma\nu} \in \Omega^{r+1}_0$ Reprezentanta $\alpha_0 \in \Omega^s_3$ předpokládáme ve tvaru

$$\alpha_0 = H^k_{\sigma\nu}\omega^\sigma_k \wedge \omega^\nu_0 \wedge dt. \tag{3.86}$$

Upravujme nyní jeden konkrétní člen součtu (3.85)

$$X = P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_l \wedge dt. \tag{3.87}$$

Pro $l \geq 1$ platí rovnost

$$\omega^\nu_l \wedge dt = -d\omega^\nu_{l-1} \tag{3.88}$$

a tedy po dosazení

$$X = -P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_j \wedge d\omega^\nu_{l-1}. \tag{3.89}$$

Dále vyjádříme X pomocí vnějších derivací

$$\begin{aligned} X &= d\left(P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_{l-1}\right) - \frac{dP^{jl}_{\sigma\nu}}{dt}\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_{l-1} \wedge dt - \\ &- p_1\left(dP^{jl}_{\sigma\nu}\right) \wedge \omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_{l-1} - P^{jl}_{\sigma\nu} d\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_{l-1} \end{aligned} \tag{3.90}$$

Využitím zobecněné definice ekvivalence forem $\alpha \sim \alpha_0$ zjistíme, že z hlediska dané faktorizace jsou nepodstatné 3-kontaktní 3-formy[4] a dále vnější derivace 2-kontaktních 2-forem. Využitím vzorce (3.90) můžeme tedy psát

$$P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_j \wedge \omega^\nu_l \wedge dt \sim -\left(\frac{P^{jl}_{\sigma\nu}}{dt}\omega^\sigma_j + P^{jl}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_{j+1}\right) \wedge \omega^\nu_{l-1} \wedge dt \tag{3.91}$$

Tento postup aplikujeme na všechny členy součtu (3.85) a dostaneme výsledně

$$\alpha_0 = \sum_{j,k=0}^{r} \sum_{l=0}^{k} (-1)^k \left(\begin{array}{c} k \\ l \end{array}\right) \frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}} P^{jk}_{\sigma\nu}\omega^\sigma_{j+l} \wedge \omega^\sigma_k \wedge dt. \tag{3.92}$$

Další úpravou tohoto výrazu, dospějeme ke tvaru (3.86), kde

$$H^k_{\sigma\nu} = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{k} \sum\limits_{i=m}^{r} (-1)^i \left(\begin{array}{c} i \\ m \end{array}\right) \frac{d^{i-m}}{dt^{i-m}} P^{(k-m)i}_{\sigma\nu} & \text{pro } 0 \leq k \leq r \\ \sum\limits_{m=k-r}^{r} \sum\limits_{i=m}^{r} (-1)^i \left(\begin{array}{c} i \\ m \end{array}\right) \frac{d^{i-m}}{dt^{i-m}} P^{(k-m)i}_{\sigma\nu} & \text{pro } r+1 \leq k \leq 2r \end{cases} \tag{3.93}$$

Člen s $k = 0$ je obecně nutno antisymetrizovat.

[4] Této skutečnosti již bylo využito výše uvažováním pouze 2-kontaktní části α.

Problém rekonstrukce třídy $[\alpha] \in \Omega_3^r/\Theta_3^r$ při znalosti reprezentanta α_0.

Budeme postupovat poněkud odlišně než při rekonstrukci třídy u 2-forem. V následujícím textu používáme (nezobecněnou) ekvivalenci forem na $j^r\mathcal{Y}$, kterou budeme značit $\approx$. Při rekonstrukci třídy budeme postupovat v několika krocích. Nejdříve ukážeme, že každá obecná forma $\rho \in \Omega_3^r$

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2}A_{\sigma\nu}^{jk}\omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu \wedge dt + A_{\sigma\nu}^{rj}dy_r^\sigma \wedge \omega_j^\nu \wedge dt + \frac{1}{2}A_{\sigma\nu}^{rr}dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu \wedge dt + \\ &+ \frac{1}{3!}B_{\sigma\nu\lambda}^{jk\ l}\omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu \wedge \omega_l^\lambda + \frac{1}{2}B_{\sigma\nu\lambda}^{jk\ r}\omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu \wedge dy_r^\lambda + \frac{1}{2}B_{\sigma\nu\lambda}^{jrr}\omega_j^\sigma \wedge dy_r^\nu \wedge dy_r^\lambda + \\ &+ \frac{1}{3!}B_{\sigma\nu\lambda}^{rrr}dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu \wedge dy_r^\lambda, \end{aligned} \tag{3.94}$$

kde $0 \le j,k,l \le r-1$, je (nezobecněně) ekvivalentní s formou tvaru

$$\begin{aligned} \eta &= D_{\sigma\nu}^{j0}\omega_j^\sigma \wedge \omega_0^\nu \wedge dt + D_{\sigma\nu}^{rj}dy_r^\sigma \wedge \omega_j^\nu \wedge dt + F_\sigma^j\omega_j^\sigma \wedge \omega_{j+1}^\sigma \wedge dt + \\ &+ F_\sigma^{r-1}\omega_{r-1}^\sigma \wedge dy_r^\sigma \wedge dt + \frac{1}{2}E_{\sigma\nu\lambda}^{jk\ r}\omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu \wedge dy_r^\lambda + \\ &+ \frac{1}{2}E_{\sigma\nu\lambda}^{jrr}\omega_j^\sigma \wedge dy_r^\nu \wedge dy_r^\lambda + \frac{1}{3!}E_{\sigma\nu\lambda}^{rrr}dy_r^\sigma \wedge dy_r^\nu \wedge dy_r^\lambda, \end{aligned} \tag{3.95}$$

kde opět $0 \le j,k,l \le r-1$ a koeficienty $D_{\sigma\nu}^{j0}$, $D_{\sigma\nu}^{rj}$ jsou rovny nule pro $\sigma = \nu$, $F_\sigma^j = -F_\sigma^{j+1}$ pro $0 \le j \le r-2$, $E_{\sigma\nu\lambda}^{rrr}$, $E_{\sigma\nu\lambda}^{jrr}$ a $E_{\sigma\nu\lambda}^{jkr}$. Všechny koeficienty ve formě η jsou vyjádřitelné pomocí koeficientů $A_{\sigma\nu}^{pq}$ a $B_{\sigma\nu\lambda}^{pqs}$, kde $0 \le p,q,s \le r$ a jsou funkcemi na $j^r\mathcal{Y}$. Obě formy mají tedy stejného reprezentanta (zkonstruovaného v předešlém odstavci). Je zřejmé, že je možno z ρ odebrat jakoukoliv 3-kontaktní formu. Dále můžeme z ρ odebrat jakoukoliv formu typu

$$\frac{1}{2}d\sum_{j,k=0}^{r-1} C_{\sigma\nu}^{jk}\omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu, \tag{3.96}$$

kde $C_{\sigma\nu}^{jk} \in \Omega_0^r$, tedy vnější derivaci 2-kontaktní 2-formy. Tato vnější derivace má 3-kontaktní část (tuto nemusíme uvažovat), dále část

$$\frac{\partial C_{\sigma\nu}^{jk}}{\partial y_r^\lambda}dy_r^\lambda \wedge \omega_j^\sigma \wedge \omega_k^\nu, \tag{3.97}$$

kterou zahrneme do členu $E_{\sigma\nu\lambda}^{jkr}$ (proto ji také nemusíme uvažovat), a nakonec část

$$\sum_{j,k=0}^{r}\left(\frac{d'C_{\sigma\nu}^{jk}}{dt} + C_{\sigma\nu}^{(j-1)k}C_{\sigma\nu}^{j(k-1)}\right) \tag{3.98}$$

s konvencí $C_{\sigma\nu}^{rj} = 0$, $C_{\sigma\nu}^{(-1)j} = 0$ a $C_{\sigma\nu}^{j(-1)} = 0$ pro každé $0 \le j \le r$. Vhodnou volbou těchto $C_{\sigma\nu}^{jk}$ docílíme zahrnutí forem s koeficienty $A_{\sigma\nu}^{pq}$, které se nevyskytují ve formě

η, do vnější derivace 2-kontaktní 2-formy. Pro $\sigma \neq \nu$ dostáváme požadovaný tvar formy volbou

$$C_{\sigma\nu}^{p(r-1-q)} = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{q-i} \left(\begin{array}{c} q \\ j \end{array} \right) (-1)^{i+j} \frac{d'^j}{dt^j} A_{\sigma\nu}^{(p-i)(r-q+i+j)}. \tag{3.99}$$

Pro $\sigma = \nu$ opět můžeme zvolit $C_{\sigma\sigma}^{jk}$ tak, aby forma $\rho \approx \eta$. Vzhledem k linearitě zobrazení $\rho \mapsto \rho_0$ a faktu, že pro všechna $\theta \in \Theta_3^r$ platí $\theta \mapsto \theta_0 = 0_{\Omega_3^{2r+1}}$, platí

$$\rho \approx \eta \Longleftrightarrow \rho_0 = \eta_0. \tag{3.100}$$

Tohoto faktu využijeme při rekonstrukci třídy. Koeficienty reprezentanta η_0 předpokládáme ve tvaru

$$H_{\sigma\nu}^k = \alpha_{\sigma\nu}^k + \beta_{\sigma\nu\lambda}^{k(l)} y_{r+1+l}^\lambda + (\text{nelineární členy}) \tag{3.101}$$

podobně jako v předchozí rekonstrukci[5]. Dále dosadíme do formule pro výpočet reprezentanta, kde absolutní členy $\alpha_{\sigma\nu}^k$ dostaneme pouze tehdy, zaměníme-li úplné derivace za neúplné. Je nutno odlišit případy $\sigma = \nu$ a $\sigma \neq \nu$. Zabývejme se napřed jednodušším případem $\sigma = \nu$. Triviálním výpočtem zjistíme, že

$$F_\sigma^{r-1} = \frac{1}{2}(-1)^r \alpha_{\sigma\sigma}^{2r-1}. \tag{3.102}$$

Ostatní F_σ^j pro $0 \leq j \leq r-2$ jsou již také určeny vzhledem k antisymetrii forem:

$$F_\sigma^j = \frac{1}{2}(-1)^{j+1} \alpha_{\sigma\sigma}^{2r-1}. \tag{3.103}$$

Dále se zabývejme případem $\sigma \neq \nu$. Koeficienty

$$D_{\sigma\nu}^{j0} = \alpha_{\sigma\nu}^j \tag{3.104}$$

pro $0 \leq j \leq r-1$ dostaneme opět triviálně. K získání $D_{\sigma\nu}^{rj}$ řešíme rovnice

$$\begin{array}{rcl}
\alpha_{\sigma\nu}^r & = & -\displaystyle\sum_{m=0}^{r} (-1)^r \left(\begin{array}{c} r \\ m \end{array} \right) \frac{d'^{r-m}}{dt^{r-m}} D_{\sigma\nu}^{(k-m)r} \\
& \vdots & \\
\alpha_{\sigma\nu}^k & = & -\displaystyle\sum_{m=k-r}^{r} (-1)^r \left(\begin{array}{c} r \\ m \end{array} \right) \frac{d'^{r-m}}{dt^{r-m}} D_{\sigma\nu}^{(k-m)r} \\
& \vdots & \\
\alpha_{\sigma\nu}^{2r+1} & = & (-1)^r D_{\sigma\nu}^{rr}.
\end{array} \tag{3.105}$$

[5]Fakt, že při rekonstrukci forem se využívá jen lineárních členů v y_{r+1+j}^σ, souvisí s transformačními vlastnostmi reprezentantů a vybraného zástupce třídy.

Rovnice řešíme postupně pro $k = 2r + 1, 2r, \ldots, r$ a získáme

$$D^{rj}_{\sigma\nu} = \sum_{k=j}^{r} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ j \end{pmatrix} \frac{d'^{k-j}}{dt^{k-j}} \alpha^{r+k}_{\sigma\nu} \tag{3.106}$$

pro $0 \leq j \leq r$. Zbývá určit koeficienty $E^{jkr}_{\sigma\nu\lambda}$ pro $0 \leq j, k \leq r$. Zavedeme koeficienty

$$\gamma^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda} = \beta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda} - \delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda} \tag{3.107}$$

tak, že $\gamma^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$ závisí pouze na $E^{jkr}_{\sigma\nu\lambda}$ a $\delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$ závisí pouze na F^j_σ pro $\sigma = \nu$ nebo $D^{j0}_{\sigma\nu}, D^{jr}_{\sigma\nu}$ pro $\sigma \neq \nu$. Vzniklé rovnice opět řešíme a vyjádříme

$$\gamma^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda} = \sum_{m=0}^{k} \sum_{i=m}^{r} (-1)^i \begin{pmatrix} i \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i-m \\ l \end{pmatrix} \frac{d'^{i-m-l}}{dt^{i-m-l}} E^{(k-m)ir}_{\sigma\nu\lambda} \tag{3.108}$$

K určení všech $E^{jkr}_{\sigma\nu\lambda}$, kde $0 \leq j, k \leq r$ postačí $\gamma^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$, kde $0 \leq k \ \leq r$.

$$E^{pqr}_{\sigma\nu\lambda} = \sum_{j=0}^{r-q} \sum_{i=0}^{j} (-1)^{j+q} \begin{pmatrix} q+j \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} \frac{d'^{j-i}}{dt^{j-i}} \gamma^{(p-i)(q+j)}_{\sigma\nu\lambda} \tag{3.109}$$

Nakonec zbývá ještě určit koeficienty $\delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$. Pro $\sigma \neq \nu$ dostaneme

$$\delta^{(r+j)(l)}_{\sigma\nu\lambda} = \sum_{m=0}^{r-j-l} \begin{pmatrix} j+l-m \\ j \end{pmatrix} \frac{\partial \alpha^{r+j+l+m}_{\sigma\nu}}{\partial y^\lambda_{r+1-m}}, \tag{3.110}$$

kde $0 \leq j \leq r$. Ostatní členy $\delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$ jsou nulové. Pro $\sigma = \nu$ dostaneme

$$\delta^{k(l)}_{\sigma\sigma\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{k} \sum_{p=0}^{k-2m+1} \begin{pmatrix} k-m+1 \\ m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-2m+1 \\ p \end{pmatrix} \frac{d'^p}{dt^p} \frac{\partial \alpha^{2r-1}_{\sigma\sigma}}{\partial y^\lambda_{r+l-k+2m+p}} \tag{3.111}$$

Tím je rekonstrukce třídy $[\rho] = [\eta]$ dokončena. Pomocí koeficientů $\alpha^k_{\sigma\nu}$, kde $0 \leq k \ \leq 2r$ vyjádříme $D^{j0}_{\sigma\nu}, D^{rj}_{\sigma\nu}, F^j_\sigma$ a pomocné koeficienty $\delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$. Pomocí koeficientů $\beta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$ a pomocných koeficientů $\delta^{k(l)}_{\sigma\nu\lambda}$ vypočteme $E^{jkr}_{\sigma\nu\lambda}$. Tam, kde je třeba, vzniklé koeficienty opět symetrizujeme. Koeficienty u nelineárních členů dostaneme opětovným dosazením vypočtených koeficientů formy (3.95) do (3.93) a vyčíslením. Nelineární členy vyčteme z výsledku.

3.4 Eulerovo-Lagrangeovo a Helmholtzovo-Soninovo zobrazení a jejich reprezentace

Nechť $\alpha \in \Omega^r_1$, $[\alpha] \in \Omega^r_1/\Theta^r_1$ s příslušným souřadnicovým vyjádřením

$$\alpha = A\ dt + \sum_{j=0}^{r-1} B^j_\sigma \omega^\sigma_j + B^r_\sigma dy^\sigma_r. \tag{3.112}$$

Z předešlé podkapitoly vyplývá, že reprezentant třídy forem $[\alpha]$ označený α_0 nabývá tvaru

$$\alpha_0 = \left(A \ + B_\sigma^r y_{r+1}^\sigma\right) dt = P dt, \tag{3.113}$$

kde $A, B_\sigma^r \in \Omega_0^r$ a $P \in \Omega_0^{r+1}$. Provedeme nyní vnější derivaci formy α, a ke třídě jí určené —$[d\alpha]$— zkonstruujeme reprezentanta:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{j=0}^{r-1} \frac{\partial A}{\partial y_j^\sigma} \omega_j^\sigma \wedge dt + \left(\frac{\partial A}{\partial y_r^\sigma} - \frac{d' B_\sigma^r}{dt}\right) dy_r^\sigma \wedge dt + \\ &+ \sum_{k=0}^{r-1} \frac{\partial B_\sigma^r}{\partial y_k^\nu} \omega_k^\nu \wedge dy_r^\sigma + \frac{\partial B_\sigma^r}{\partial y_r^\nu} dy_r^\nu \wedge dy_r^\sigma + d\left(\sum_{j=0}^{r-1} B_\sigma^j \omega_j^\sigma\right) \end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned} p_1 d\alpha &\sim \sum_{j=0}^{r-1} \left(\frac{\partial A}{\partial y_j^\sigma} + \frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_j^\sigma} y_{r+1}^\nu\right) \omega_j^\sigma \wedge dt + \\ &+ \left[\frac{\partial A}{\partial y_r^\sigma} - \frac{d' B_\sigma^r}{dt} + \left(\frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_r^\sigma} - \frac{\partial B_\sigma^r}{\partial y_r^\nu}\right) y_{r+1}^\nu\right] \omega_r^\sigma \wedge dt, \end{aligned} \tag{3.115}$$

a konečně

$$\begin{aligned} (d\alpha)_0 &= \left\{\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial A}{\partial y_j^\sigma} + \frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_j^\sigma} y_{r+1}^\nu\right) + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \left[\frac{\partial A}{\partial y_r^\sigma} - \right.\right. \\ &- \left.\left. \frac{d' B_\sigma^r}{dt} + \left(\frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_r^\sigma} - \frac{\partial B_\sigma^r}{\partial y_r^\nu}\right) y_{r+1}^\nu\right]\right\} \omega_0^\sigma \wedge dt \end{aligned} \tag{3.116}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} \overline{E}_1^{r,2r+1} &: \quad \Omega_1^{r+1} \ni (\alpha)_0 = A\, dt + B_\sigma^r dy_r^\sigma \mapsto \\ &\mapsto \left\{\sum_{j=0}^{r-1} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \left(\frac{\partial A}{\partial y_j^\sigma} + \frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_j^\sigma} y_{r+1}^\nu\right) + (-1)^r \frac{d^r}{dt^r} \left[\frac{\partial A}{\partial y_r^\sigma} - \right.\right. \\ &- \left.\left. \frac{d' B_\sigma^r}{dt} + \left(\frac{\partial B_\nu^r}{\partial y_r^\sigma} - \frac{\partial B_\sigma^r}{\partial y_r^\nu}\right) y_{r+1}^\nu\right]\right\} \omega_0^\sigma \wedge dt = (d\alpha)_0 \in \Omega_2^{2r+1}. \end{aligned}$$

Buď nyní $\alpha = \lambda = L dt$, $L \in \Omega_0^r$ *lagrangián řádu* r. Potom $B_\sigma^r = 0$ a platí, že reprezentant $(d\alpha)_0 \in \Omega_2^{2r+1}$ je $\pi^{2r+1,2r}$-projektabilní:

$$(d\lambda)_0 = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \frac{d^j}{dt^j} \frac{\partial L}{\partial y_j^\sigma} \omega_0^\sigma \wedge dt. \tag{3.117}$$

Problém Helmholtzova-Soninova zobrazení byl již vyřešen pro teorii pole. Další výsledky pro mechaniku jsou v práci [11]. Vznikla-li

$$\rho = \epsilon_\sigma \omega_0^\sigma \wedge dt \in \Omega_2^{2r} \tag{3.118}$$

Eulerovým-Lagrangeovým zobrazením z lagrangiánu

$$\lambda = Ldt \in \Omega_1^r, \tag{3.119}$$

pak reprezentantem její vnější derivace je $0_{\Omega_3^{4r+1}}$.

3.5 Triviální lagrangiány a variační rovnice

Buď $f \in \Omega_0^r$ funkce. Reprezentantem její vnější derivace je

$$(df)_0 = hdf = \left(\frac{d'f}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y_r^\nu} y_{r+1}^\nu \right) dt. \tag{3.120}$$

Je tedy zřejmé, že nutná a postačující podmínka pro to, aby funkce $f \in \Omega_0^r$ definovala triviální lagrangián řádu r je

$$f \in \Omega_0^{r-1}. \tag{3.121}$$

Dále se budeme věnovat variačním rovnicím. V předešlém textu jsme ukázali (pro teorii pole a tedy i pro mechaniku), že rovnice jsou variační právě tehdy, pokud se anulují jim příslušné Helmholtzovz-Soninovy výrazy (2.112), (1.53), které pro zjednodušené značení v mechanice nabývají tvaru

$$\mathcal{H}_{\sigma\nu}^i = \frac{\partial \epsilon_\nu}{\partial y_i^\sigma} - (-1)^i \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y_i^\nu} - \sum_{k=i+1}^{r} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} \frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} \frac{\partial \epsilon_\sigma}{\partial y_k^\nu}. \tag{3.122}$$

Kapitola 4

Variační posloupnost v teorii pole

V této kapitole jsou uvedeny aplikace variační posloupnosti na teorii pole, které nebyly uvedeny v kapitole 2. Jedná se především o problém řádu u triviálních lagrangiánů.

4.1 Triviální lagrangiány

V této kapitole značíme $\approx$ (nezobecněnou) ekvivalenci forem a dále užíváme značení z kapitoly 2. Triviálním lagrangiánem v teorii pole opět rozumíme takovou formu $\lambda \in \Omega_n^r$, která identicky splňuje $E_\lambda \equiv 0$, jí příslušné Eulerovy-Lagrangeovy rovnice jsou tedy identicky splněny. Zobrazení přiřazující třídě forem $[\rho]$ jejího reprezentanta ρ_0 je zřejmě opět horizontalizace

$$h : \Omega_n^r / \Theta_n^r \ni [\rho] \mapsto \rho_0 = h\rho \in \Omega_n^{r+1}. \tag{4.1}$$

Všechny triviání lagrangiány dostaneme z požadavku komutativnosti diagramu 1 z kapitoly 2. Platí tedy

$$\lambda = hd\zeta, \tag{4.2}$$

kde $\zeta \in \Omega_{n-1}^r$. Obecně platí, že $\lambda \in \Omega_n^{r+1}$. Naskýtá se otázka, kdy bude triviální lagrangián $\lambda \in \Omega_n^r$. Nechť je tedy $\zeta \in \Omega_{n-1}^r$ libovolná $(n-1)$-forma

$$\zeta \approx \eta = H^i \omega_i + \sum_{k=1}^{n-1} B^{J_1 \dots J_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k j_{k+1} \dots j_{n-1}} dy^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_k}_{J_k} \wedge dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-1}}, \tag{4.3}$$

kde $|J_l| = r$ pro $1 \le l \le n-1$. Zbylá část formy ζ je kontaktní a tudíž nepodstatná. Provedeme vnější derivaci $d\eta$

$$d\eta = dH^i \wedge \omega_i + \sum_{k=1}^{n-1} dB^{J_1 \dots J_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k j_{k+1} \dots j_{n-1}} \wedge dy^{\sigma_1}_{J_1} \wedge \dots \wedge dy^{\sigma_k}_{J_k} \wedge dx^{j_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{j_{n-1}}. \quad (4.4)$$

Vzhledem k vlastnostem horizontalizace h (věta 4 v kapitole 2) platí

$$hd\eta = L\omega_0 = \left(d_i H^i + \frac{1}{n!}(-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} d_{j_n} B^{J_1 \dots J_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k j_{k+1} \dots j_{n-1}} y^{\sigma_1}_{J_1 j_1} \dots y^{\sigma_k}_{J_k j_k} \epsilon^{j_1 \dots j_n} \right) \omega_0. \quad (4.5)$$

V dalším faktoriál zahrneme do koeficientů

$$B^{J_1 \dots J_k}_{\sigma_1 \dots \sigma_k j_{k+1} \dots j_{n-1}}.$$

Pro řešení vytyčeného problému je nutno zobecnit aparát neúplných derivací pro teorii pole. Platí

$$d_i = d'_i + y^{\sigma}_{Ji} \frac{\partial}{\partial y^{\sigma}_J}, \quad (4.6)$$

kde $|J| = r$ pro neúplnou derivaci na $j^r\mathcal{Y}$. Dosazením (4.6) do (4.5) dostaneme polynom řádu n v proměnných y^{ν}_I, kde $|I| = r+1$. Aby triviální lagrangián $\lambda = hd\eta \in \Omega^r_n$ musí se všechny koeficienty polynomu kromě absolutního členu $d'_i H^i$ anulovat.

Příklad: Podrobněji zpracujeme[1] problém pro $\dim \mathcal{X} = 2 = n$. Koeficient L u (4.5) nabývá tvaru

$$L = \underbrace{d'_i H^i}_{\in \Omega^r_0} + \left(\frac{\partial H^j}{\partial y^{\sigma}_J} - d'_k B^J_{\sigma} \epsilon^{jk} \right) y^{\sigma}_{Jj} - \frac{\partial B^J_{\sigma}}{\partial y^{\nu}_K} \epsilon^{jk} y^{\sigma}_{Jj} y^{\nu}_{Kk}. \quad (4.7)$$

Aby lagrangián byl řádu r musí evidentně platit rovnice

$$\left(\frac{\partial B^J_{\sigma}}{\partial y^{\nu}_K} - \frac{\partial B^K_{\nu}}{\partial y^{\sigma}_J} \right) y^{\sigma}_{J1} y^{\nu}_{K2} = 0 \quad (4.8)$$

a

$$\left(\frac{\partial H^1}{\partial y^{\sigma}_J} + d'_2 B^J_{\sigma} \right) y^{\sigma}_{J1} + \left(\frac{\partial H^2}{\partial y^{\sigma}_J} - d'_1 B^J_{\sigma} \right) y^{\sigma}_{J2} = 0. \quad (4.9)$$

Věnujme se nejdříve rovnici (4.8). Počet možností volby součinu $y^{\sigma}_{J1} y^{\nu}_{K2}$ je $[m(r+1)]^2$. Koeficienty pro které platí, že $K = J$ a zároveň $\sigma = \nu$ se anulují automaticky (takových je $m(r+1)$ koeficientů).

[1] Příklad je zpracován také v [12]

V ostatních případech rozlišujeme dvě možnosti:

- $(J1) = (K2)$
- $(J1) \neq (K2)$.

Věnujme se nejdříve prvnímu případu. Definujeme $\|J\| = j_1 + \dots j_r$ pro $J = (j_1 \dots j_r)$. Pro první případ platí $\|K\| = \|J\| - 1$. Možností realizace takové shody je r. Celkově v takovém případě dostaneme $r(m^2 - m)$ rovnic, kde $\sigma \neq \nu$ typu

$$\left(\frac{\partial B^J_\sigma}{\partial y^\nu_K} - \frac{\partial B^K_\nu}{\partial y^\sigma_J}\right) + \left(\frac{\partial B^J_\nu}{\partial y^\sigma_K} - \frac{\partial B^K_\sigma}{\partial y^\nu_J}\right) = 0. \tag{4.10}$$

Věnujme se nyní případu druhému. Z něho plynou rovnice

$$\left(\frac{\partial B^J_\sigma}{\partial y^\nu_K} - \frac{\partial B^K_\nu}{\partial y^\sigma_J}\right) = 0. \tag{4.11}$$

Těchto rovnic je pochopitelně doplňkový počet a to $m(r+1)[m(r+1)-1]$. Faktický počet rovnic je poloviční, protože záměna $\sigma \leftrightarrow \nu$ vede k ekvivalentní rovnici. Jsou-li splněny rovnice (4.11), jsou identicky splněny také rovnice (4.10). Rovnice (4.11) jsou vlastně podmínky integrability pro B^J_σ. Musí tedy existovat funkce $C \in \Omega^r_0$ taková, že

$$B^J_\sigma = \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_J}. \tag{4.12}$$

Tímto způsobem identicky splníme sadu rovnic (4.8). Věnujme se nyní zbývající sadě rovnic (4.9). Z těch po dosazení získáme

$$\left(\frac{\partial H^1}{\partial y^\sigma_J} + d'_2 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_J}\right) y^\sigma_{J1} + \left(\frac{\partial H^2}{\partial y^\sigma_J} - d'_1 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_J}\right) y^\sigma_{J2} = 0. \tag{4.13}$$

Opět je nutno anulovat nezávislé koeficienty u y^σ_{J1} a y^σ_{J2}. V rm případech budou $(J1)$ a $(J2)$ udávat stejné multiindexy a dostaneme rovnice

$$\frac{\partial H^1}{\partial y^\sigma_J} + d'_2 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_J} + \frac{\partial H^2}{\partial y^\sigma_K} - d'_1 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_K} = 0, \tag{4.14}$$

kde $\|K\| = \|J\| - 1$. Ve zbylých $2m$ případech $J = (1 \dots 1)$, $K = (2 \dots 2)$ dostaneme oddělené rovnice

$$\frac{\partial H^1}{\partial y^\sigma_J} + d'_2 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_J} = 0 \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial H^2}{\partial y^\sigma_K} - d'_1 \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_K} = 0 \tag{4.16}$$

Budeme potřebovat vzorce pro záměnu neúplných a parciálních derivací. Zavedeme výhodnější značení indexů. Nechť

$$J_q = \left(\underbrace{1 \dots 1}_{q} \underbrace{2 \dots 2}_{r-q} \right)$$

pro multiindexy délky $|J_q| = r$ a

$$L_q = \left(\underbrace{1 \dots 1}_{q} \underbrace{2 \dots 2}_{r-1-q} \right)$$

pro multiindexy délky $|L_q| = r - 1$. S tímto značením dostanu pro záměnu parciálních derivací vzorce

$$\frac{\partial}{\partial y^\sigma_{J_q}} d'_2 C = d'_2 + \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_{J_q}} \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_{L_q}} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial}{\partial y^\sigma_{J_q}} d'_1 C = d'_1 + \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_{J_q}} \frac{\partial C}{\partial y^\sigma_{L_{q-1}}} \tag{4.18}$$

V případech $q = r$ pro (4.17) a $q = 0$ pro (4.18) jsou neúplné a r-té parciální derivace záměnné. Zavedeme nová označení $F^1 = H^1 + d'_2 C$ a $F^2 = H^2 - d'_1 C$. S tímto značením dostanu pro nové neznámé $F^1, F^2 \in \Omega^r_0$ rovnice

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \frac{\partial F^2}{\partial y^\sigma_{J_0}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_0}} & + & \frac{\partial F^2}{\partial y^\sigma_{J_1}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_1}} & + & \frac{\partial F^2}{\partial y^\sigma_{J_2}} & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_q}} & + & \frac{\partial F^2}{\partial y^\sigma_{J_{q+1}}} & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_{r-1}}} & + & \frac{\partial F^2}{\partial y^\sigma_{J_r}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_r}} & + & & = & 0
\end{array} \tag{4.19}$$

Z první rovnice vyplývá nezávislost F^2 na $y^\sigma_{J_0}$, z poslední rovnice zase nezávislost F^1 na $y^\sigma_{J_r}$. V dalším budeme označovat funkce na $j^{r-1}\mathcal{Y}$ kaligrafickým písmem. Když uvážíme zbylé rovnice, pak z nich plyne, že

$$\frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_0}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y^\sigma_{J_q}} \frac{\partial F^1}{\partial y^\sigma_{J_0}} = 0 \tag{4.20}$$

pro $0 \leq q \leq r$. Analogicky postupujeme pro F^2. Celkově tedy platí

$$F^1 = \mathcal{F}_\sigma^{1,0} y_{J_0}^\sigma + F^1_{]0,r[} \tag{4.21}$$

a

$$F^2 = \mathcal{F}_\sigma^{2,r} y_{J_r}^\sigma + F^2_{]0,r[}. \tag{4.22}$$

Indexem $]0,r[$ označujeme nezávislost na $y_{J_0}^\sigma$ a $y_{J_r}^\sigma$. Rovnice tedy přejdou na tvar

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & = & 0 \\
\mathcal{F}_\sigma^{1,0} & + & \frac{\partial F^2_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_1}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_1}} & + & \frac{\partial F^2_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_2}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_2}} & + & \frac{\partial F^2_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_3}} & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\frac{\partial F^1_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_q}} & + & \frac{\partial F^2_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_{q+1}}} & = & 0 \\
 & \vdots & & \vdots & \\
\frac{\partial F^1_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_{r-2}}} & + & \frac{\partial F^2_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_{r-1}}} & = & 0 \\
\frac{\partial F^1_{]0,r[}}{\partial y^\sigma_{J_r}} & + & \mathcal{F}_\sigma^{1,r} & = & 0 \\
0 & & & = & 0
\end{array} \tag{4.23}$$

Je již vidět jak budeme postupovat dál. V dalším kroku dostaneme řešení pro $F^1_{]0,r[}$ a $F^2_{]0,r[}$

$$F^1_{]0,r[} = -\mathcal{F}_\sigma^{1,r} y^\sigma_{J_{r-1}} + F^1_{]0(r-1)r[} \tag{4.24}$$

a

$$F^2_{]0,r[} = -\mathcal{F}_\sigma^{1,0} y^\sigma_{J_1} + F^2_{]01r[}. \tag{4.25}$$

Konečný výsledek získáme ve tvaru

$$F^1 = \sum_{q=0}^{p-1} \mathcal{F}_\sigma^{1,r-q} y^\sigma_{J_q} - \sum_{g=p}^{r-1} \mathcal{F}_\sigma^{2,q} y^\sigma_{J_q} + \mathcal{G}^1 \tag{4.26}$$

a

$$F^2 = -\sum_{q=1}^{p} \mathcal{F}_\sigma^{1,r-q} y^\sigma_{J_q} + \sum_{g=p+1}^{r} \mathcal{F}_\sigma^{2,q} y^\sigma_{J_q} + \mathcal{G}^2, \tag{4.27}$$

kde $p = r/2$ pro r sudé a $p = (r+1)/2$ pro r liché. Lagrangeovu funkci dostaneme jako

$$L = d_1' H^1 + d_2' H^2 = d_1' \left(H^1 + d_2' C \right) + d_2' \left(H^2 - d_1' C \right) = d_1' F^1 + d_2' F^2, \tag{4.28}$$

protože $d_1' d_2' = d_2' d_1'$. Provedením neúplných derivací získáme výraz s následující — srovnej s (4.7) — strukturou, jakou musí mít každý triviální lagrangián pro $n = 2$ a r libovolné,

$$L = d_1 H^1 + d_2 H^2 + \left(d_k B_\sigma^J \right) \epsilon^{jk} y_{Jj}^\sigma, \tag{4.29}$$

kde $H^1, H^2, B_\sigma^J \in \Omega_0^{r-1}$ a $|J| = r - 1$. Tento závěr platí pro libovolný řád r. Tím je příklad vyřešen.

Literatura

[1] Krupka, D.: *Lectures on Variational Sequences (Mechanics)*, Open Education & Sciences, Opava, 1995, 1-86

[2] Krupka, D.: *Variational Sequences on Finite Order Jet Spaces*, in: Differential Geometry and its Applications, Proc. Conf., J. Janyška and D. Krupka, editors, Brno, Czechoslovakia, 1989; World Scientific, Singapore, 1990, 236-254

[3] Krupka, D.: *The Geometry of Lagrange Structures*, Preprint, Opava, 1997, 1-82

[4] Krupka, D.: *Of the Structure of the Euler Mapping*, Arch. Math. 1, Scripta Fac. Sci. Nat. UJEP Brunensis, Brno, 1974, Vol. 10, 55-62

[5] Krupka, D.: *On the Local Structure of the Euler-Lagrange Mapping of the Calculus of Variations*, On Differential Geometry and its Applications, Proc. Conf. (ČSSR, GDR, Poland), 1980, 181-188

[6] Krupka, D.: *Geometry of Lagrangian Structures. 1.*, Arch. Math. 3, Brno, 1986, Vol. 22, 159-174

[7] Krupka, D.: *Geometry of Lagrangian Structures. 2.*, Arch. Math. 4, Brno, 1986, Vol. 22, 211-228

[8] Krupka, D., Musilová, J.: *Trivial Lagrangians in Field Theory*, Preprint, Brno, 1991, 1-15

[9] Landau, L. D., Lifschitz, E. M.: *Lehrbuch der theoretischen Physik*, Band I – Mechanik, Band II – Klassische Feldtheorie, Band VII – Elastizitätstheorie, Akademie-Verlag, Berlin, 1990, 1-231, 1-480, 1-223

[10] Misner, C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.: *Gravitation*, W. H. Freeman and Company, New York, 1995, 1-1279

[11] Musilová, J.: *Variational Sequence in Higher Order Mechanics*, in: Differential Geometry and Applications, Proc. Conf., Brno, 1996, 611-624

[12] Krupka, D., Musilová, J.: Trivial Lagrangians in Field Theory, Preprint Series in Global Analysis, Silesian Univ. Opava, 1997, 1-15