Cvičení z elektrodynamiky a teorie relativity

1. Ukažte pro úplně antisymetrický tenzor 3. řádu

$$\begin{aligned}
&\text{a) } \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta^i_{\ m}\,\delta^j_{\ n} - \delta^i_{\ n}\,\delta^j_{\ m}\\
&\text{b) } \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ljk} = 2\delta^i_{\ l}\\
&\text{c) } \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6.
\end{aligned}$$

   Platí Einsteinova konvence, že se tvoří součet přes každou dvojici stejných kovariantních a kontravariantních indexů, např. $\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{nmk} \equiv \sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk}$. (V plochém prostoru není nutné rozlišovat kovariantní a kontravariantní indexy.)

2. Ukažte pomocí ϵ-tenzoru

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = \vec{b}\,(\vec{a}\vec{c}\,) - \vec{c}\,(\vec{a}\vec{b}\,)\\
&(\vec{a} \times \vec{b}\,)(\vec{c} \times \vec{d}\,) = (\vec{a}\vec{c}\,)(\vec{b}\vec{d}\,) - (\vec{a}\vec{d}\,)(\vec{b}\vec{c}\,)\\
&\mathrm{rot}\,\mathrm{rot} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div} - \triangle\\
&\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0.
\end{aligned}$$

3. Vypočtěte vzájemnou sílu dvou nábojů o velikosti 1C ve vzdalenosti 1m.

4. Ukažte, že dvojrozměrné silové pole

$$\vec{K} = -\gamma\,\frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2}$$

   je bezvírové ($\mathrm{rot}\,\vec{K} = 0$) a že dráhový integrál

$$\oint \vec{K}\,\mathrm{d}\vec{x} = 0.$$

   Vyberte za uzavřenou trajektorii v rovině (x, y)
   a) obdélník rovnoběžný se souřadnicovými osami
   b) kružnici kolem počátku souřadnic.

5. Uvěřte Gaussovu větu pro vektorové pole $\vec{v} = (ax, by, cz)$ a kouli $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$.

6. Vypočtěte Greenovu funkci Laplaceova operátoru pomocí Fourierovy transformace a Fourierovy representace δ-funkce

$$\begin{aligned}
&G(\vec{x}, \vec{x}') = G(\vec{x} - \vec{x}') =: G(\vec{y}),\\
&\tilde{G}(\vec{k}) = \int G(\vec{y})\,e^{i\vec{k}\vec{y}}\,\mathrm{d}^3 y,\\
&\delta(y) = \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{d}k\,e^{iky}.
\end{aligned}$$

7. Ukažte

$$\int_K \triangle \ln r\,\mathrm{d}^2 r = 2\pi$$

   pomoci Gaussovy věty, kde K je kružnice.

8. Použijte vzorec

$$\vec{E}(\vec{x}) = k \int \frac{\rho(\vec{x}')(\vec{x}-\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}\, \mathrm{d}^3x'$$

pro vypočet pole homogenně nabitého, nekonečného drátu.

9. Podobně vypočtěte pole homogenně nabité, nekonečné, rovné desky.

10. Lze vytvořit elektrostatické pole $\vec{E}$ konstantního směru, jehož absolutní velikost se mění kolmo na $\vec{E}$?

11. Vyjádřete následující rozložení náboje pomocí Diracovy δ-funkce ve tvaru prostorové hustoty náboje $\rho(\vec{x})$ ve vhodných souřadnicích.
a) Náboj Q, rozložený rovnoměrně po povrchu koule s poloměrem R (kulové souřadnice).
b) Rovnoměrně rozložený náboj na povrchu válce s poloměrem b, přičemž náboj na jednotkovou délku je λ (válcové souřadnice).
c) Náboj Q, rozložený rovnoměrně po infinitesimálně tenkém kruhovém disku (válcové souřadnice).
d) Totéž v kulových souřadnicích.

12. Vypočtěte Laplaceův operátor v kulových souřadnicích.

13. Dosaďte rozvoj $P_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ do Legendrovy rovnice

$$(1-x^2)P_\ell(x)'' - 2xP_\ell(x)' + \ell(\ell+1)P_\ell(x) = 0$$

a určete rekursivní vztah pro koeficienty a_n. Jaká je podminka, aby počet nenulových koeficientů byl konečný, t.j. aby řešením byl polynom?

14. Pomocí integrálu

$$\int_{-1}^{1} \left\{ P_\ell(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_{\ell'}(x)\right] - P_{\ell'}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_\ell(x)\right]\right\} \mathrm{d}x$$

ukažte ortogonalitu Legendrových polynomů, t.j.

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{pro} \qquad \ell \neq \ell'.$$

15. Vypočtěte magnetické pole z potenciálu

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{\imath}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\, \mathrm{d}^3x'.$$

16. Vypočtěte magnetické pole lineárního vodiče (Biotův-Savartův zákon).

17. Vypočtěte energii homogenně nabité koule o poloměru a.

18. Dvě soustředné koule o poloměrech a a b tvoří kulový kondenzátor. Vypočtěte jeho kapacitu.

19. Deskový kondenzátor (obsah plochy A, vzdálenost desek d) nese náboj Q. Jak se mění intensita pole a rozložení náboje na deskách, když je do kondenzátoru vloženo dielektrikum (dielektrická konstanta ϵ) o šířce a?

20. Ukažte
$$\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\vec{D} - \vec{D} \times \mathrm{rot}\vec{E}\right]_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i D_j - \tfrac{1}{2}\delta_{ij}\vec{E}\vec{D}\right)$$
za předpokládu, že $\vec{D}$ a $\vec{E}$ jsou úměrná.

21. Ukažte
$$\int_V \vec{r} \times (\vec{\nabla} \times \vec{M})\,\mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{r} \times (\vec{n} \times \vec{M})\,\mathrm{d}S - \int_V (\vec{M} \times \nabla) \times \vec{r}\,\mathrm{d}V$$

22. Vypočtěte impedanci zadaného obvodu:

23. Vypočtěte vektorový potenciál
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \int \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}(s)}{\mathrm{d}s}\, \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}(s)|}$$
konstantního proudu I v kruhové smyčce $\vec{\xi}(s)$, $\xi_1(s) = R\cos\frac{s}{R}$, $\xi_2(s) = R\sin\frac{s}{R}$, $\xi_3 = 0$ ve velké vzdálenosti $|\vec{x}| \gg R$. Udejte magnetický moment $\vec{m}$, pomocí něhož je $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m}\times\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$.

24. Podle Larmorova vzorce je intensita záření zrychleného náboje q
$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0}\frac{q^2 a^2}{c^3}$$

kde a je zrychlení.
Jak dlouho může nerelativistický elektron obíhat okolo jádra vodíku po spirálové dráze, než je jádrem pohlcen? Odvoď'te diferenciální rovnici pro $r(t)$ ze závislosti energie $E(r)$ na r a ze vztahu $P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. (Náboj $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, poloměr atomu $r(0) = 10^{-10}$m, hmotnost elektronu $m_e = 10^{-30}$kg, $\epsilon_0 = 10^{-11}$F/m.)

25. a) Ukažte, že po elektromagnetických potenciálech $\vec{A}$ a Φ lze žádat kalibrační podmínku

$$f(\vec{x}, t) := \mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0$$

(Lorentzova kalibrace).
b) Jsou pak potenciály jednoznačně určeny pomocí intensit $\vec{E}$ a $\vec{B}$?

26. Model dielektrika: Elektrony jsou vázany harmonicky vůči elektrickým silám. Pod vlivem periodického elektrického pole $\propto e^{i\omega t}$ platí

$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}) = e\,\vec{E}(\vec{x}, t) \approx e\,\vec{E}(\vec{0}, t)$$

(ω_0 ... vlastní frekvence oscilátoru, γ ... konstanta tlumení, $\vec{E}$ se mění malo ve srovnání s amplitudou $\vec{x}$). Vypočtěte indukovaný elektrický dipolový moment $\vec{P} = N\,e\,\vec{x}$ (N je počet elektronů v jednotkovém objemu) a dielektrickou konstantu $\epsilon(\omega)$ ze vztahu $\epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

27. Lorentzova transformace (matice L) spolu s translací danou vektorem $\vec{a}$ tvoří Poincarého transformaci. Složení dvou Poincarého transformací $P = (\vec{a}, L)$ a $P' = (\vec{a}', L')$ je zase takto transformace s Lorentzovou maticí $L'L$ a s translačním vektorem $\vec{a}' + L'\vec{a}$. Ukažte, že množina $\mathcal{P} = \{(\vec{a}, L)\}$ se součinem

$$(\vec{a}', L') \circ (\vec{a}, L) = (\vec{a}' + L'\vec{a}, L'L)$$

je grupa (Poincarého grupa).

28. Dokažte pomocí vzorce $\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$, $\bar{x} = \gamma(x - vt)$, že Lorentzova kontrakce je recipročním jevem, t.z. i měřítko v klidu v soustavě (t, x) se jeví zkrátceno faktorem $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, když je pozorovano z pohybující se soustavy $(\bar{t}, \bar{x})$.

29. V systému I je měřena délka pohybujícího se měřítka. K tomu účelu je spouštěna řada bleskových světel, tak že měřítko vrhá stín na fotografickou desku. Dokažte, že pozorovatel, jenž se pohybuje spolu s měřítkem, vysvětluje Lorentzovu kontrakci tak, že blesky z jeho hlediska nejsou spouštěny současně.

30. Člověk, který nese žebřík o délce 2,1m před sebou, běží rychlostí $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ do pokoje o délce 1m a zavře za sebou dveře. (Pozor na numerické hodnoty!)
a) Proč je to možné?
b) Jak vypadá situace z hlediska tohoto člověka?
c) Co se stane potom?
d) Nakreslete prostoročasový diagram.

31. Napište Lorentzovu transformaci $t \to t'$, $\vec{x} \to \vec{x}'$ když se pohybuje soustava $(t', \vec{x}')$ rychlostí $\vec{v}$ v libovolném směru vůči soustavě $(t, \vec{x})$.

32. Odvod'te transformaci složek rychlosti $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t \;\; \to \;\; v^{i'} = \mathrm{d}x^{i'}/\mathrm{d}t'$, když se pohybuje čárkovaná soustava vůči nečárkované rychlostí $\vec{u} = (u, 0, 0)$.

33. Vysvětlujte vzorec

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix}$$

a odvod'te z toho výrazy pro $\epsilon^{iklm}\epsilon_{prlm}$, $\epsilon^{iklm}\epsilon_{pklm}$ a $\epsilon^{iklm}\epsilon_{iklm}$.

34. Ukažte

$$**T = (-1)^{p-1}T$$

pro antisymetrický tenzor T p-tého řádu. (Antisymetrické tenzory 0-tého a prvního řádu jsou prostě skaláry a vektory.)

35. Najděte takovou rychlost, že po Lorentzově transformaci pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou rovnoběžná. (Máte-li takový systém, pak to platí i ve všech systémech, které se pohybují s libovolnou rychlostí podél $\vec{E}$ a $\vec{B}$ - můžete vybrat nejjednodušší případ.)

36. Kovariantní tvar Maxwellových rovnic skrývá skutečnost, že rovnice $\mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho$ a $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ nezahrnují derivaci podle času a tak jsou vlastně počátečními podmínkami. Dokažte, že zbývající rovnice časového vývoje tyto podmínky prodlužují, t. z. že platí vždy, pokud platí jednou.

37. Bud' $A_j(x) = \mathrm{Re}\left(a_j\, e^{-ik_l x^l}\right)$ čtyřpotenciál rovinné elektromagnetické vlny ve vakuu s komplexní amplitudou a a vlnovým vektorem k.
a) Jaké podmínky pro a a k plynou z rovnic pole a z Lorentzovy kalibrace?
b) Tenzor elektromagnetického pole má tvar $F_{mn} = \mathrm{Re}\left(f_{mn}\, e^{-ik_l x^l}\right)$. Vypočtěte komplexní amplitudu f_{mn} a ukažte

$$f^{mn}\, k_n = 0 = *f^{mn}\, k_n \qquad\qquad f^{mn}\, f_{nm} = 0 = f^{mn}\, *f_{nm}$$

$$F^{mn}\, k_n = 0 = *F^{mn}\, k_n \qquad\qquad F^{mn}\, F_{nm} = 0 = F^{mn}\, *F_{nm}.$$

Zapište tyto rovnice ve třírozměrné podobě $(k^0, \vec{k})$, užitím popřípadě $\vec{E}$ a $\vec{B}$.
c) Ukažte, že vlna je kruhově polarisována, právě když je $*f_{mn} = \pm i f_{mn}$. Které znaménko odpovídá pravotočivé nebo levotočivé polarisaci?

38. Ukažte pro tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole

$$T^i_i = 0, \qquad\qquad T^j_i = \tfrac{1}{2\mu_0}(F_{ik}\, F^{kj} + *F_{ik}\, *F^{kj}).$$

39. Ukažte, že $\mathcal{E}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{S}^2 \geq 0$ je invariantní, kladnou veličinou ($\mathcal{E}$ = hustota energie, $\vec{S}$ = Poyntingův vektor elektromagnetického pole). Jaký je fyzikální význam této nerovnosti?

40. Odvoďte vzorce

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 - c^{-2}(\vec{r}\times\vec{u})^2}}, \qquad \vec{A} = \Phi\,\vec{u}$$

ze vzorců $\Phi' = e/4\pi\epsilon_0 r'$, $\vec{A} = 0$, které platí v klidovém systému S' náboje e, tím, že použijete transformace

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}\,x\right), \qquad x' = \gamma(x - ut), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

41. Udejte inverzní transformaci k infinitezimální Lorentzově transformaci

$$x'_i = (\delta_{ik} + \omega_{ik})\,x_k.$$

42. Odvoďte pohybové rovnice pro vektorový potenciál

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left(\vec{a}_{\vec{k}}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t - i\vec{k}\vec{x}} + \vec{a}^*_{\vec{k}}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t + \vec{k}\vec{x}}\right)$$

z Hamiltoniánu $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\vec{P}^2_{\vec{k}} + \omega^2_{\vec{k}}\,\vec{Q}^2_{\vec{k}}\right)$ proměnných

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\epsilon_0 V}\left(\vec{a}_{\vec{k}}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \vec{a}^*_{\vec{k}}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t}\right)$$

a

$$\vec{P}_{\vec{k}} = i\omega_{\vec{k}}\sqrt{\epsilon_0 V}\left(-\vec{a}_{\vec{k}}\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t} + \vec{a}^*_{\vec{k}}\,e^{i\omega_{\vec{k}}t}\right).$$