Geodetiky na sféře s přirozeně indukovanou metrikou

Metrika g na sféře je ve sférických souřadnicích θ, φ dána $g_{\theta\theta} = 1$, $g_{\theta\varphi} = 0$, $g_{\varphi\varphi} = \sin^2\theta$. Levi-Civitova konexe je vyjádřena pomocí Christoffelových symbolů

$$\Gamma^{\theta}_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

a rovnice geodetik jsou

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t^2} + 2\frac{\cos\theta(t)}{\sin\theta(t)}\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,\theta(t)}{\mathrm{d}\,t} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\,\theta(t)}{\mathrm{d}\,t^2} - \sin\theta(t)\cos\theta(t)\left[\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t}\right]^2 = 0. \tag{2}$$

Rovnici (1) můžeme jednou zintegrovat (pokud $\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t} \neq 0$)

$$\ln\left|\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t}\right| = -2\ln|\sin\theta| + \text{konst.}$$

$$\frac{\mathrm{d}\,\varphi(t)}{\mathrm{d}\,t} = \frac{c}{\sin^2\theta}. \tag{3}$$

Tečný vektor ke geodetice je k ní paralelní vzhledem k Levi-Civitově konexi, toto je přímo definice geodetiky. Metrika je vzhledem k Levi-Civitově konexi kovariantně konstantní, což plyne rovnou z definice Levi-Civitovy konexe. Platí tedy obecně

$$g_{ij}\frac{\mathrm{d}\,x^i}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,x^j}{\mathrm{d}\,t} = \text{konst.} \tag{4}$$

Pokud označíme

$$s = \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{g_{ij}\frac{\mathrm{d}\,x^i}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}\,x^j}{\mathrm{d}\,t}}\,\mathrm{d}\,t$$

délku oblouku křivky, dostáváme z (4) $\mathrm{d}\,s/\,\mathrm{d}\,t = \text{konst.}$, tj. $t = as + d$, parametr geodetiky t je tedy afinní reparametrizací délky oblouku. Pro sféru dostáváme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \sin^2\theta\left(\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 = \frac{1}{a^2}. \tag{5}$$

Pokud do rovnice (5) dosadíme z (3), dostáváme

$$\left(\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}\right)^2 + \frac{c^2}{\sin^2\theta} = \frac{1}{a^2}. \tag{6}$$

Pro kontrolu rovnici (6) zderivujme, dostáváme

$$2\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t}\frac{\mathrm{d}^2\,\theta}{\mathrm{d}\,t^2} - \frac{2c^2\cos\theta}{\sin^3\theta}\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} = 0,$$

což za předpokladu $\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} \neq 0$ s využitím (3) dává (2).

Vraťme se nyní k rovnici (6). Úpravou dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{\sin^2\theta}}$$

a s využitím (3) a označením $k = 1/(ac)^2$

$$\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,\varphi} = \frac{\sin^2\theta}{c}\sqrt{\frac{1}{a^2} - \frac{c^2}{\sin^2\theta}} = \sin\theta\sqrt{k\sin^2\theta - 1}. \tag{7}$$

Rovnici (7) lze již zintegrovat separací proměnných a dále upravit.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}\,\theta}{\sin\theta\sqrt{k\sin^2\theta - 1}} &= \varphi + b \\
-\operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{k\sin^2\theta - 1}}\right) &= \varphi + b \qquad (8)\\
\frac{\cos\theta}{\sqrt{k\sin^2\theta - 1}} &= -\frac{\sin(\varphi + b)}{\sqrt{1 - \sin^2(\varphi + b)}} \\
-\sin(\varphi + b) &= \frac{1}{\sqrt{k-1}}\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \\
\sin\varphi\cos b\sin\theta + \cos\varphi\sin b\sin\theta + \frac{1}{\sqrt{k-1}}\cos\theta &= 0, \qquad (9)
\end{aligned}$$

po dosazení $x = \cos\varphi\sin\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = \cos\theta$ dostáváme rovnici roviny procházející počátkem

$$x\sin b + y\cos b + z\frac{1}{\sqrt{k-1}} = 0.$$

Geodetikami jsou tedy hlavní kružnice parametrizované afinní reparametrizací délky oblouku. Speciální případy $\frac{\mathrm{d}\,\theta}{\mathrm{d}\,t} = 0$ a $\frac{\mathrm{d}\,\varphi}{\mathrm{d}\,t} = 0$ jsou triviální.