Příklady do cvičení k přednášce Integrování forem

1 Transformace souřadnic

1. Přechodem k polárním souřadnicím vyčíslit

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde oblast $\mathcal{S}$ je ohraničena listem lemniskáty

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x \geq 0.$$

2. Vyčíslit dvojný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

přes oblast $\mathcal{S}$ ohraničenou elipsou $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ přechodem k zobecněným polárním souřadnicím r, ϕ:

$$\begin{aligned} x/a &= r\cos\phi \\ y/a &= r\sin\phi. \end{aligned}$$

3. Transformovat

$$\int_0^c \mathrm{d}x \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, \mathrm{d}y,$$

$0 < \alpha < \beta$ a $c > 0$, do nových proměnných $u = x + y$ a $uv = y$.

4. Vyčíslit dvojný integrál

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y,$$

kde $\mathcal{S}$ je oblast ohraničená křivkou

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

2 Plochy rovinných obrazců

1. Vypočítat povrch plochy ohraničené křivkami zadanými v polárních souřadnicích rovnicemi

$$r = a(1 + \cos\phi), \quad r = a\cos\phi, \quad (a > 0).$$

2. Vypočítat povrch křivočarého čtyřúhelníka, ohraničeného oblouky parabol $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$ a $y^2 = \beta x$, kde $0 < a < b$ a $0 < \alpha < \beta$.

3 Objemy těles

1. Vyčíslit objem tělesa ohraničeného rovinou XOY, plochou $z = \mathrm{e}^{-\left(x^2+y^2\right)}$ a válcem $x^2 + y^2 = R^2$.

4 Povrchy ploch

1. Najít povrch části válce $y^2 = 4x$ ořízlého sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

2. Najít povrch části kužele $x = \sqrt{x^2 + y^2}$ ořízlého plochou $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

3. Vyčíslit povrch části šroubové plochy $z = \arctan y/x$ ležící v prvním oktantu a uzavřený mezi válci $x^2+y^2 = a^2$ a $x^2+y^2 = b^2$, kde $0 < a < b$.

5 Využití dvojných integrálů v mechanice

1. Najít hmotnost kruhové destičky o poloměru R, jejíž hustota je přímo úměrná vzdálenosti od počátku a rovna δ na okraji destičky.

2. Vyčíslit souřadnice těžiště rovinné plochy ohraničené grafem funkce $y = \sin x$ a úsečkou $[0, 0]$–$[\pi/2, 1]$.

3. Najít souřadnice těžiště kruhové výseče AOB o poloměru $|AO| = |OB| = a$ a $\angle AOB = 2\alpha$.

4. Najít těžiště oblasti ohraničené kardioidou, jejíž rovnice v polárních souřadnicích je $r = a(1 + \cos\phi)$.

5. Vyčíslit moment setrvačnosti homogenní destičky ohraničené jedním obloukem cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ a osou OX vzhledem k ose x.

6 Trojné integrály

1. Vyčíslit
$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z}{(1 + x + y + z)^3},$$
kde $\mathcal{V}$ je oblast ohraničená souřadnicovými rovinami a rovinou $x + y + z = 1$.

2. Vyčíslit objem části válce $x^2 + y^2 = 2ax$ ohraničeného mezi paraboloidem $x^2 + y^2 = 2az$ a rovinou XOY.

3. Najít objem tělesa ohraničeného plochou
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

7 Využití trojných integrálů v mechanice

1. Najít moment setrvačnosti kužele o poloměru podstavy a a výšce h, jehož hustota ρ je přímo úměrná průměru řezu v dané výšce vzhledem k ose symetrie.

2. Dokažte, že gravitační síla mezi koulí a hmotným bodem ležícím vně této koule se nezmění, soustředíme-li celou hmotnost koule v jejím středu.