Kombinatorika

Michael Krbek

1. Základní pojmy. Kombinatorika pracuje se spočitatelnými (tedy obvykle konečnými) strukturami a patří kvůli tomu mezi nejstarší oblasti matematiky. Je těžké podat přesný výčet toho, čím se kombinatorika zabývá, uvedeme si pro začátek pár příkladů, které nám pomůže kombinatorika řešit.

(1) Ve volném čase si studentka může zvolit, že buď vypracuje domácí úkol z jednoho ze tří předmětů, nebo půjde do kina na jeden z pěti filmů, které se hrají. Z kolika možností si může vybrat?

(2) Pavel má doma tři košile, čtvery kalhoty a dva páry bot. Kolika různými způsoby může své oblečení zkombinovat?

(3) Kolik možných výsledků dají tři po sobě následující hody (šestistrannou) kostkou?

(4) DNA má přibližně 3×10^9 základních párů aminokyselin. Kolik možných genomů lze tedy vytvořit?

(5) Kolik SPZ existuje s třemi písmeny následovanými čtveřicí čísel?

(6) Kolik slov existuje s méně než pěti písmeny?

(7) Do batohu je vhozeno devět knih. Kolika způsoby lze pět z nich uložit na poličku?

(8) Na poličce je devět knih. Kolika způsoby lze pět z nich hodit do batohu?

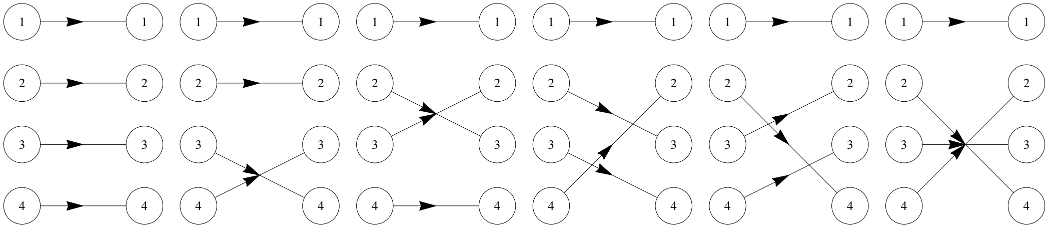
(9) Kolik existuje (i nesmyslných) palindromů délky n?

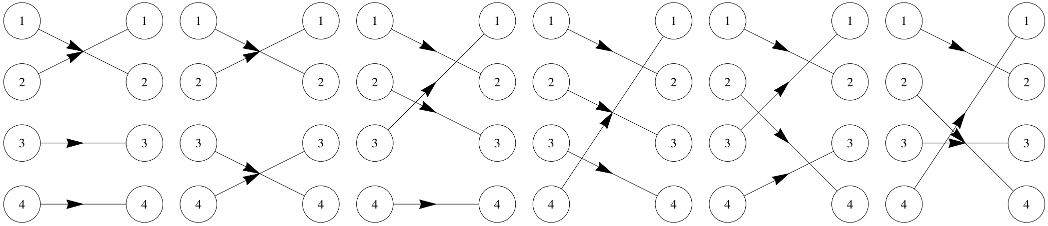
(10) Kolik je možných výsledků ve hře Sportka? Tahá se šest čísel z 49 a nezáleží na pořadí.

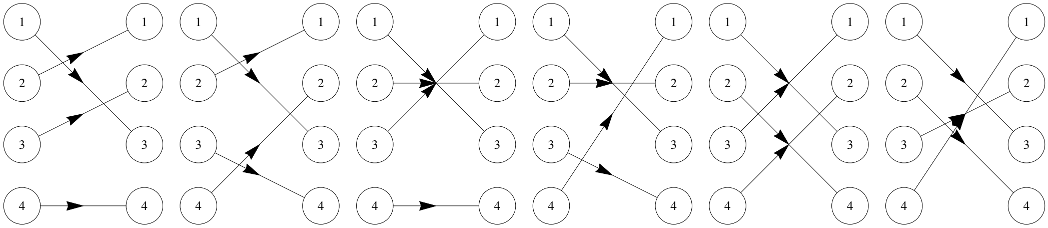
2. Permutace. Jedním ze zcela základních kombinatorických pojmů je pojem permutace. Matematická definice následuje. Mějme n-prvkovou množinu M, bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $M = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Uvažujme všechna prostá (injektivní) zobrazení množiny M na (tj. surjektivní) sebe samu. Každé takové zobrazení (bijekce) nazveme permutací množiny M.

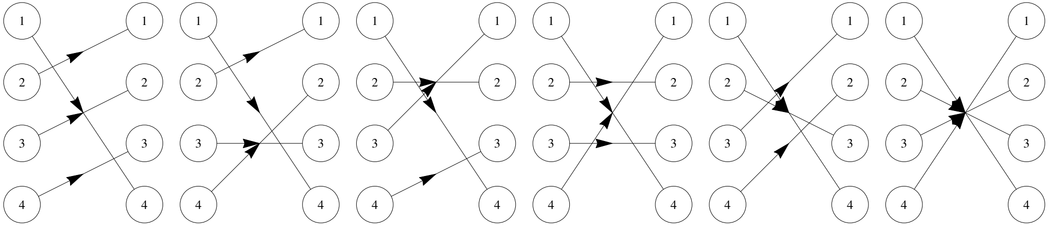
Intuitivní význam permutace je "přeskládání"n-tice objektů. Příklady využití permutací následují.

(1) Mějme za sebou položeny čtyři kuličky — červenou, zelenou, modrou a bílou. Kolika způsoby je možno seřadit? Množinu M v tomto příkladě reprezentuje množina čtyř barevných kuliček. Tedy např. prvek 1 reprezentuje červenou kuličku, 2 zelenou, 3 modrou a 4 bílou. Libovolné jiné pořadí kuliček získáme pomocí permutací.


1
2
3
4


1
2
3
4


1
2
3
4


1
2
3
4

(2) Míchání balíčku karet, zde množinu M reprezentuje právě balíček karet. Každé zamíchání balíčku reprezentuje nějakou permutaci balíčku.

Tento druhý příklad dobře ilustruje jednu ze základních vlastností permutací, tou je možnost permutace skládat, tedy vlastně zamíchat balíček vícekrát po sobě. Z matematického hlediska se jedná o prostou kompozici zobrazení.

Ještě jsme si neukázali, kolik takových permutací celkem je. K tomu se nejlépe dá přijít rekurzí. Počet permutací prázdné množiny je z definice dán jako $P_0 = 1$. Počet permutací jednoprvkové a dvouprvkové množiny též jednoduše zjistíme jako $P_1 = 1$ a $P_2 = 2$. Předpokládejme, že známe počet permutací $(n-1)$-prvkové množiny, označme jej P_{n-1}. Potom pokud přidáme ještě jeden prvek a dostaneme n-prvkovou množinu, můžeme zvolit pořadí tohoto jednoho dalšího prvku pro každé pořadí $(n-1)$-prvkové množiny před 1. jejím prvkem, 2. jejím prvkem, ..., $(n-1)$. jejím prvkem a konečně i za $(n-1)$. jejím prvkem. Tedy celkem máme $P_n = nP_{n-1}$. Této rekurentní definici vyhovuje faktoriál, tj.

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

3. Variace (bez opakování). Zobecněním pojmu permutace získáme tzv. k-členné variace bez opakování z n-prvkové množiny. Pro jejich počet P_k^n dostaneme

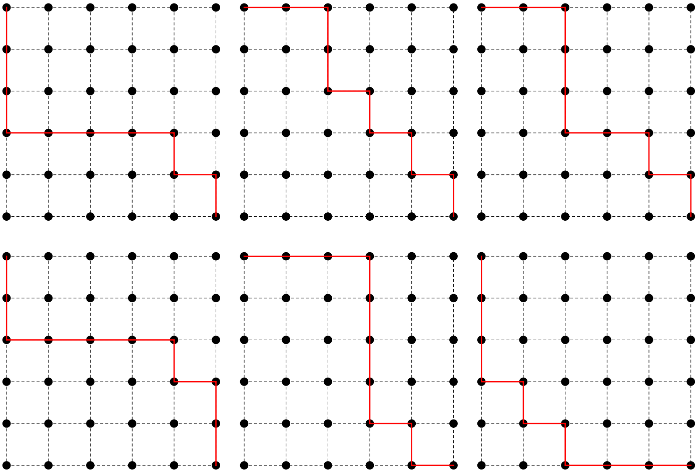
$$P_k^n = n(n-1)\dots(n-k+1).$$

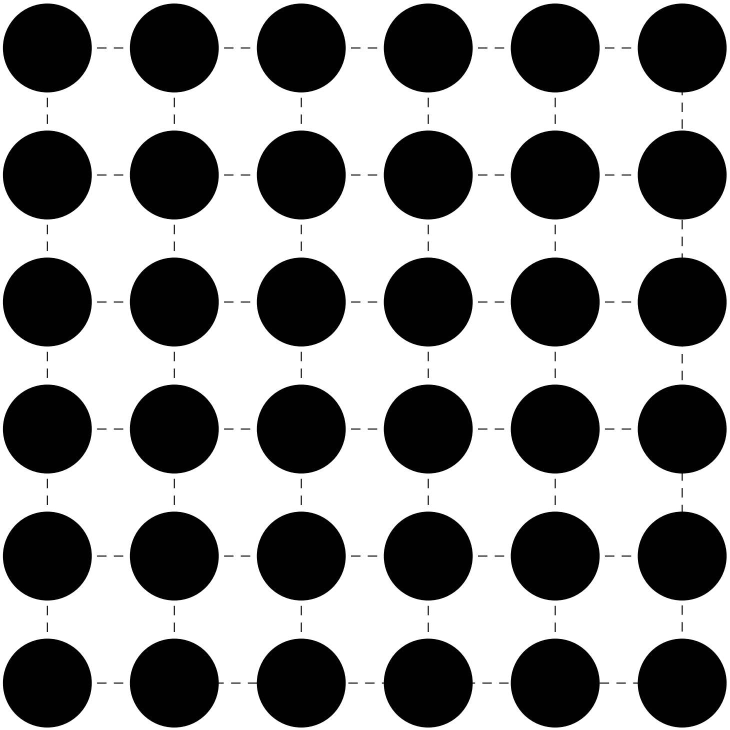
4. Variace (s opakováním). Jiný název je uspořádaná k-tice z n-prvkové množiny. Jejich počet je

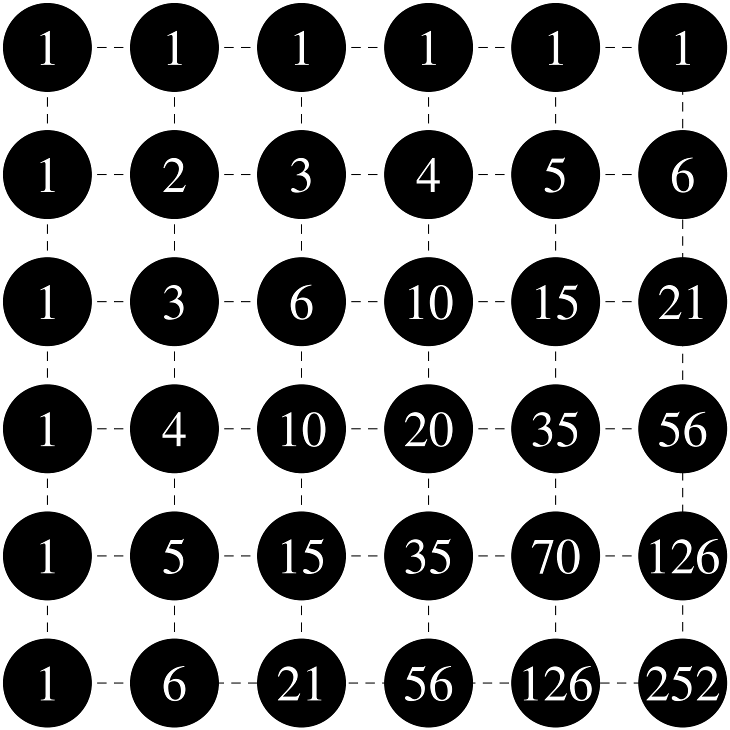
$$V_k^n = n^k.$$

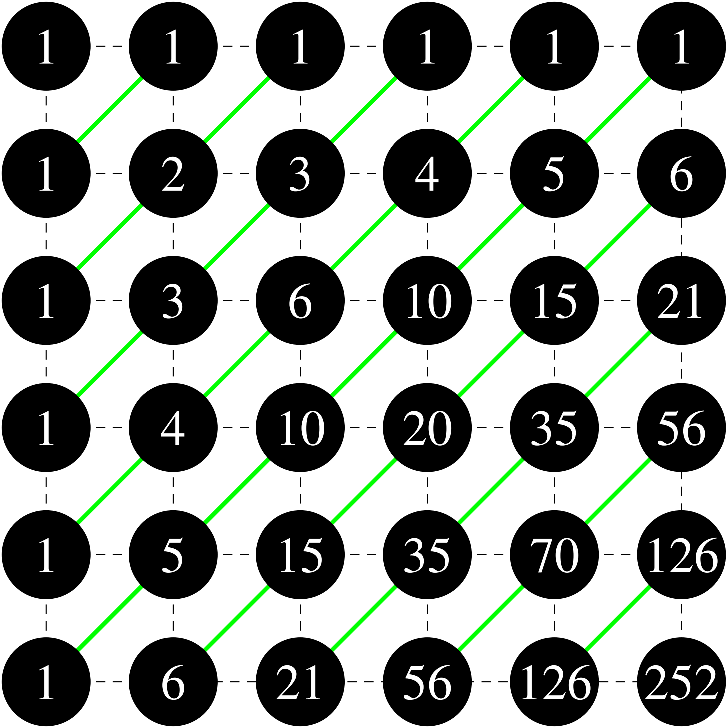
5. Kombinace. Problematiku kombinací uveďme příkladem. Představme si, že se pohybujeme ve městě s přesně čtvercovou sítí bloků budov a ulic a z výchozí pozice se chceme dostat o 5 bloků na východ a o 5 bloků na jih. Kolik je různých takových nejkratších cest?

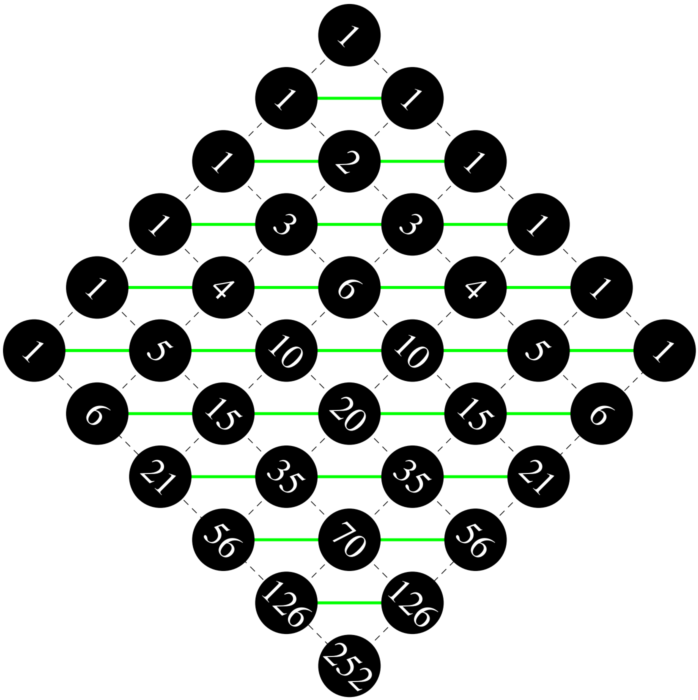
Pro lepší pochopení je níže zakresleno několik náhodných cest tohoto typu.






1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6
1 3 6 10 15 21
1 4 10 20 35 56
1 5 15 35 70 126
1 6 21 56 126 252


1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6
1 3 6 10 15 21
1 4 10 20 35 56
1 5 15 35 70 126
1 6 21 56 126 252


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
6 15 20 15 6
21 35 35 21
56 70 56
126 126
252

Jistě si každý již všiml, že počty cest vytváří tzv. Pascalův trojúhelník

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Zkusme ještě odvodit základní vlastnosti čísel, jež tyto tzv. binomické koeficienty musí splňovat. Musí platit

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Proč? Pokud cílové místo je o libovolný počet míst pouze na východ, nebo pouze na jih, je jen jedna cesta, která je nejkratší. Dále platí

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Proč? V celé úvaze lze prohodit slova jih a východ a nic se nemůže změnit. Na závěr musí platit

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Proč? Do každého bodu v síti bloků a ulic se dá přijít buď shora nebo zleva. Počet způsobů jak do tohoto bodu dojít je dán součtem počtu způsobů, jak dojít do bodu nad daným bodem a počtu způsobů, jak dojít do bodu nalevo od původního bodu.

Dále lze již velice jednoduše ukázat, že aby platily předchozí tři vzorce, musí být

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Existují ještě jiné interpretace binomických koeficientů, mezi nejběžnější patří, že číslo $\binom{n}{k}$ určuje počet k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny. To jednoduše souvisí s výše uvedeným. Rovněž k explicitnímu vzorci pro kombinační čísla se dá dojít jednoduchou úvahou přes variace a permutace.

6. Další součásti kombinatoriky.

– vše, o čem jsme doteď mluvili, byla tzv. enumerativní kombinatorika. Do ní ale dále patří např. multimnožiny, Fibonacciho čísla, ...

– matematická analýza v kombinatorice (Fibonacciho čísla, ...)

– teorie grafů (Good Will Hunting, ...)

– geometrická kombinatorika: "Na kolik částí rozdělí rovinu n přímek v obecné poloze?", ...

– teorie rozkladů: "Kolika způsoby lze napsat přirozené číslo n jako součet menších přirozených čísel?", ...

– ...