Komplexní čísla

Michael Krbek

1. Motivace pro zavedení komplexních čísel. Určujícím důvodem pro studium komplexních čísel byl algoritmus pro řešení kubické rovnice $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ pocházející od *Scipiona del Ferro* a *Tartaglii* publikovaný *Gerolamem Cardanem* v roce 1545. Zde v některých případech v mezivýpočtech vznikala čísla typu

$$a + b\sqrt{-1},$$

přičemž a i b jsou reálná čísla a $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ je číslo, které reálné být nemůže. Reálným násobkům tohoto čísla i se začalo říkat čísla imaginární vzhledem k tomu, že *zdánlivě* neměla žádný význam. Později se však ukázalo, že z matematického hlediska se jedná o velmi silný výpočetní nástroj, a ještě později se ukázalo, že hrají nezastupitelnou roli v popisu fyzikálních jevů na kvantové úrovni. V dalším odstavci krátce naznačíme postup, jakým ke komplexním číslům dospěli jejich původní objevitelé a po této krátké vsuvce již budeme pokračovat v budování teorie komplexních čísel axiomaticky.

2. Cardanovy vzorce. [1] Zajímejme se o řešení kubické rovnice

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Koeficient u x^3 lze bez újmy na obecnosti položit roven 1, je totiž vždy různý od nuly (jinak by rovnice byla nejvýše kvadratická), a proto jím můžeme celou rovnici vydělit. Dále v (1) provedeme substituci $x = t - a/3$, jejímž výsledkem je tvar

$$x^3 + px + q = 0, \tag{2}$$

kde

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \quad q = c + \frac{2a^3 - 9ab}{27}.$$

Dále v (2) provedeme substituci $t = u + v$, dostáváme

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{3}$$

[1] Tento odstavec je zařazen pro zajímavost a není nezbytný pro pochopení dalšího textu.

Všimněme si, že pokud položíme $3uv + p = 0$, druhý sčítanec v (3) vymizí a získáme soustavu rovnic

$$u^3 + v^3 + q = 0, \quad 3uv + p = 0. \tag{4}$$

První rovnici soustavy (4) vynásobíme u^3 a za druhý sčítanec poté dosadíme z rovnice druhé. Celkem máme

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0, \tag{5}$$

což je kvadratická rovnice pro u^3, její řešení známe. Jsou to

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \tag{6}$$

Úplně stejně vyřešíme pro v^3, tj. první rovnici (4) vynásobíme v^3 a za druhý sčítanec dosadíme z druhé rovnice, z níž rovněž plyne, že existují pouze tři různé dvojice $t = u+v$, tj. tři řešení rovnice (2) a tedy i (1). Zajímavý případ nastane, pokud výraz

$$d = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}, \tag{7}$$

zvaný *diskriminant* kubické rovnice, v rovnici (6) je záporný. Řekli bychom, že u^3 a v^3 v tomto případě neexistuje, počítáme-li ovšem formálně dále, dostaneme v tomto případě tři reálná řešení kubické rovnice (1).

Příklad: Vezměme pro jednoduchost kubickou rovnici, u které již předem známe její kořeny, $(x+1)(x-1)(x+2) = 0$, po roznásobení

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0.$$

Po eliminaci kvadratického člene substitucí $x = t - 2/3$ dostáváme

$$t^3 - \frac{7}{3}t - \frac{20}{27} = 0.$$

Pro diskriminant kvadratických rovnic v u^3 a v^3 dostaneme

$$\frac{\left(-\frac{20}{27}\right)^2}{4} + \frac{\left(-\frac{7}{3}\right)^3}{27} = -\frac{1}{3}.$$

Pro u^3 a v^3 dostáváme

$$\frac{10}{27} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{-1},$$

což je zvláštní, jelikož $\sqrt{-1}$ není rovna žádnému reálnému číslu. Pokud ovšem s těmito čísly budeme dále formálně počítat, získáme nakonec

$$t \in \left\{ \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{3} \right\}$$

a po zpětné substituci

$$x \in \{1, -1, -2\}$$

v souhlasu s tím co jsme očekávali. Vidíme tedy, že k získání všech tří řešení této kubické rovnice musíme pracovat s čísly, jež reálná nejsou.

3. Algebra komplexních čísel. Uvažme množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, z historických i jiných důvodů takovou dvojici označujeme $z = x + y\mathrm{i}$ a nazýváme ji *komplexním číslem* v tzv. *algebraickém tvaru*. $x = \Re z$ nazýváme *reálnou částí* komplexního čísla z, $y = \Im z$ nazýváme jeho *imaginární částí*.

S komplexními čísly můžeme provádět algebraické operace podobně jako s čísly reálnými. Opačné komplexní číslo ke komplexnímu číslu $z = x + y\mathrm{i}$ je $-z = -x - y\mathrm{i}$. Sčítání komplexních čísel je definováno po složkách: vezměme dvě libovolná komplexní čísla z_1, z_2, $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$. Potom jejich součet je definován jako

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}. \tag{8}$$

Rozdíl dvou komplexních čísel získáme jako $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Komplexní nulu píšeme jako 0 (nikoli $0 + 0\mathrm{i}$), obecněji potom, je-li reálná část komplexního čísla nulová, píšeme jej jako $y\mathrm{i}$ a nazýváme *ryze imaginárním*, je-li naopak imaginární část nulová, píšeme pouze x a nazýváme jej *ryze reálným*.

Další důležitá operace s komplexním číslem je *komplexní sdružení*, $\bar{z} = x - y\mathrm{i}$. Umožňuje definovat *absolutní hodnotu* komplexního čísla $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ a pro nenulové komplexní číslo inverzní komplexní číslo

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}. \tag{9}$$

Násobek komplexních čísel z_1, z_2 definujeme jako

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i}. \tag{10}$$

Všimněme si, že se symbolem i se při násobení operuje jako s výrazem, pro který platí $\mathrm{i}^2 = -1$. V tom také tkví význam použitého označení pro komplexní čísla. Dělení komplexních čísel definujeme jako $z_1/z_2 = z_1 z_2^{-1}$. Neutrálním prvkem vůči násobení je $z = 1$.

Lze jednoduše ukázat dosazením, že takto definované operace sčítání a násobení jsou komutativní, asociativní a splňují obvyklé distributivní zákony, tj.

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \qquad z_1 z_2 = z_2 z_1 \tag{11}$$
$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3) \qquad (z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \tag{12}$$
$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3 \qquad z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3. \tag{13}$$

Množinu dvojic reálných čísel vybavenou výše definovanými operacemi nazýváme *tělesem komplexních čísel* a značíme ji **C**.

Příklady:

(1) Spočtěte

$$\text{(a) } (1-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i}), \quad \text{(b) } (2+3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i}), \quad \text{(c) } \frac{2-\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}, \quad \text{(d) } \frac{2-3\mathrm{i}}{1+3\mathrm{i}}.$$

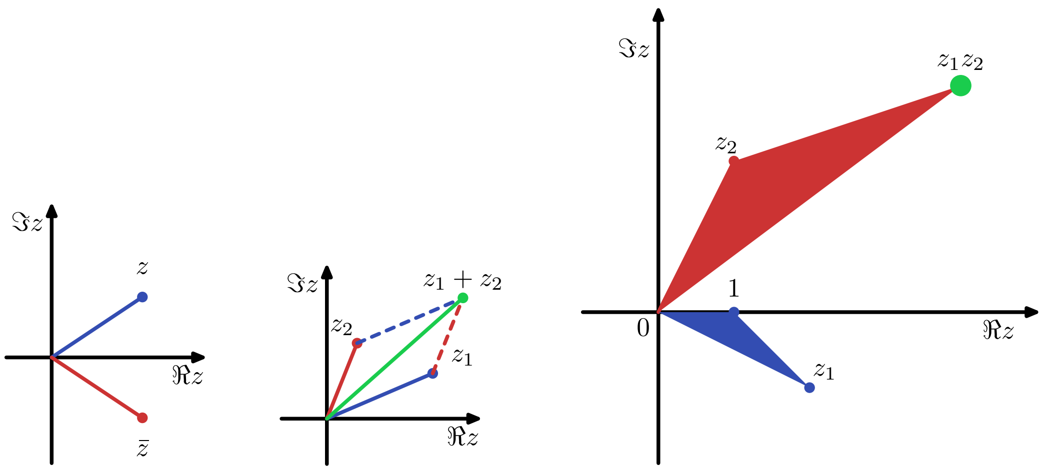
(2) Řešte rovnice

$$\text{(a) } (3-\mathrm{i})z = 1, \quad \text{(b) } (2-3\mathrm{i})z = 1+\mathrm{i}, \quad \text{(c) } z^2 = -\mathrm{i}, \quad \text{(c) } z^2+z+1 = 0.$$

(3) Řešte soustavy rovnic

$$\text{(a) } \begin{aligned} (1+\mathrm{i})z + (2-\mathrm{i})w &= 1 \\ \mathrm{i}z + (1-2\mathrm{i})w &= 1-\mathrm{i} \end{aligned} \qquad \text{(b) } \begin{aligned} (1-\mathrm{i})z + (-1+2\mathrm{i})w &= 1+\mathrm{i} \\ (1+\mathrm{i})z + (1+2\mathrm{i})w &= \mathrm{i} \end{aligned}$$

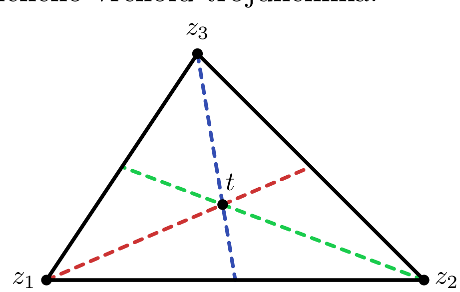
4. Geometrická interpretace komplexních čísel. Geometricky si lze komplexní čísla představit jako body v kartézské rovině, kde jedna souřadnice (obvykle vodorovná) určuje reálnou čast komplexního čísla, druhá souřadnice (obvykle svislá) jeho imaginární část. Této rovině říkáme *Gaussova* nebo *Argandova*. Na prvním obrázku je znázorněn geometrický význam komplexního sdružení, jedná se o zrcadlení vzhledem k ose $\Re z$. Absolutní hodnota komplexního čísla z je rovna euklidovské vzdálenosti bodu z od počátku soustavy souřadnic, zřejmě je $|z| = |\bar{z}|$. Na druhém obrázku je osvětlen geometrický význam sčítání dvou komplexních čísel, na třetím geometrický význam násobení, zde podotkněme, že modrý trojúhelník $01z_1$ a červený trojúhelník $0z_2(z_1z_2)$ jsou si podobné, tento výsledek se plně objasní v příštím odstavci.



Příklady:

(1) Nakreslete v komplexní rovině graf funkce $\mathbf{R} \ni t \mapsto t - \mathrm{i}t + 1 \in \mathbf{Z}$.

(2) V Gaussově rovině je zadán trojúhelník $z_1z_2z_3$. Ukažte, že těžnice trojúhelníka se protínají v jediném bodě, těžišti t; určete také toto těžiště. Ukažte rovněž, že těžnice se protínají ve dvou třetinách svých délek měřených od patřičného vrcholu trojúhelníka.



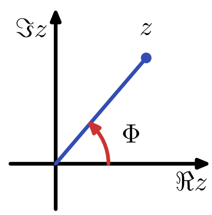
5. Goniometrický a exponenciální tvar komplexního čísla. Je-li komplexní číslo $z = x + y\mathrm{i}$ různé od nuly, potom každé reálné číslo ϕ, které vyhovuje vztahům

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Re z}{|z|}, \quad \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\Im z}{|z|}, \tag{14}$$

nazveme *hodnotou argumentu* komplexního čísla z. Každé komplexní číslo má nekonečně mnoho hodnot argumentu. Opravdu, je-li $\Phi = \operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ jedna hodnota argumentu (této hodnotě říkáme *hlavní hodnota*), potom i

$$\phi = \arg z \; = \Phi + 2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$$

je hodnotou argumentu. Geometrický význam hodnoty argumentu komplexního čísla z je dán úhlem, který svírá spojnice počátku Gaussovy roviny a bodu odpovídajícího komplexnímu číslu z s kladnou poloosou $\Re z$.



Každé komplexní číslo $z = x+y\mathrm{i}$ lze tedy psát ve tvaru $z = |z|(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)$. Tomuto tvaru říkáme *goniometrický tvar* komplexního čísla, přičemž

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \phi = \operatorname{atg}\frac{y}{x}.$$

Leonhard Euler dokázal následující rovnost

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = \cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi, \tag{15}$$

kde $\mathrm{e} = 2.718282009182842009 59\ldots$ je tzv. *Eulerovo číslo*, základ přirozených logaritmů, ϕ je libovolné reálné číslo. Proto můžeme zapsat libovolné komplexní číslo z rovněž v tzv. *exponenciálním tvaru*

$$z \; = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} = |z|\exp(\mathrm{i}\phi). \tag{16}$$

Násobení komplexních čísel z_1, z_2 zapsaných v exponenciálním tvaru je obzvlášť jednoduché, lze totiž využít vlastností exponenciální funkce. Je-li

$$z_1 = |z_1|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_1}, \quad z_2 = |z_2|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi_2},$$

potom

$$z_1 z_2 = |z_1|e^{i\phi_1}|z_2|e^{i\phi_2} = |z_1||z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)} = |z_1 z_2|e^{i(\phi_1+\phi_2)}.$$

Z toho také okamžitě plyne geometrické pravidlo pro násobení dvou komplexních čísel z předchozího odstavce.

Příklady:

(1) Určete exponenciální tvary následujících komplexních čísel v algebraickém tvaru

$$\text{(a) } 1+\mathrm{i}, \quad \text{(b) } -1+\mathrm{i}, \quad \text{(c) } \sqrt{3}-\mathrm{i}, \quad \text{(d) } -\mathrm{i}.$$

(2) Určete algebraické tvary následujících komplexních čísel v exponeciálním tvaru

$$\text{(a) } 2\exp\left(\frac{\pi \mathrm{i}}{4}\right), \quad \text{(b) } 4\exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}\right), \quad \text{(c) } \exp(2\pi \mathrm{i} k),\ k \in \mathbf{Z}.$$

(3) Z platnosti Eulerovy rovnosti odvoďte součtové vzorce pro goniometrické funkce, tj.

$$\begin{aligned} \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b, \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \cos a \sin b, \\ \mathrm{tg}(a \pm b) &= \frac{\mathrm{tg}\, a \pm \mathrm{tg}\, b}{1 \mp \mathrm{tg}\, a\, \mathrm{tg}\, b}. \end{aligned}$$

6. Moivrova věta. Vlastností exponenciální funkce pro komplexní čísla v exponenciálním tvaru lze využít k umocňování komplexních čísel. S využitím Eulerovy rovnosti totiž platí

$$(\cos\phi + \mathrm{i}\sin\phi)^n = [\exp(\mathrm{i}\phi)]^n = \exp(\mathrm{i}n\phi) = \cos(n\phi) + \mathrm{i}\sin(n\phi). \qquad (17)$$

Tomuto tvrzení se říká *Moivrova věta* a uplatní se především při řešení jednoduchých polynomiálních rovnic typu

$$z^n = w, \quad z, w \in \mathbf{C}.$$

Příklady:

(1) Umocněte komplexní čísla

$$\text{(a) } (1+\mathrm{i})^2, \quad \text{(b) } (-1+\mathrm{i})^{10}, \quad \text{(c) } (\sqrt{3}-\mathrm{i})^{20}, \quad \text{(d) } (-\mathrm{i})^{101}.$$

(2) Užitím Moivrovy věty vyjádřete $\cos 4\phi$ a $\sin 5\phi$ pomocí $\cos\phi$ a $\sin\phi$.

(3) Řešte v $\mathbf{C}$ rovnice

$$\text{(a) } z^3 = 1, \quad \text{(b) } z^4 = -1, \quad \text{(c) } z^6 = \mathrm{i}.$$