Lemma 1. *Uzavřený podprostor kompaktního topologického prostoru je kompaktní.*

Důkaz. Nechť $Y \subset X$ je uzavřená a X kompaktní. Vezměme pokrytí $\mathscr{P}$ množiny Y množinami otevřenými v X. Zkonstruujme z $\mathscr{P}$ pokrytí $\mathscr{Q}$ celého X přidáním $X \setminus Y$, tj. $\mathscr{Q} = \mathscr{P} \cup \{X \setminus Y\}$. X je kompaktní, proto lze z pokrytí $\mathscr{Q}$ vybrat konečné podpokrytí $\mathscr{R}$ pokrývající X. Pokud $\mathscr{R}$ obsahuje $X \setminus Y$, vezmeme $\mathscr{S} = \mathscr{R} \setminus \{X \setminus Y\}$, jinak $\mathscr{S} = \mathscr{R}$. Podpokrytí $\mathscr{S}$ je konečné a pokrývá Y. ■

Lemma 2. *Kompaktní podprostor Hausdorffova prostoru je uzavřený.*

Důkaz. Buď Y kompaktní podprostor Hausdorffova prostoru X. Dokážeme, že $X \setminus Y$ je otevřená. Buď $z \in X \setminus Y$. Ukážeme, že existuje otevřené okolí bodu z ležící v $X \setminus Y$. Pro každé $y \in Y$ lze vybrat disjunktní okolí U_y bodu z a V_y bodu y. $\{V_y | y \in Y\}$ je pokrytí Y otevřenými množinami a lze z něj podle předpokladu vybrat konečné podpokrytí $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Otevřená množina $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ je hledaným okolím bodu z. ■

Lemma 3. *Jsou-li X a Y kompaktní, pak i $X \times Y$ je kompaktní.*

Důkaz. První část: Buď $z \in X$ a N otevřená množina v $X \times Y$ obsahující $\{z\} \times Y \subset X \times Y$. Dokážeme, že existuje otevřené okolí W bodu z takové, že N obsahuje $W \times Y$. Pokryjme $\{z\} \times Y$ otevřenými množinami $U \times V$ ležícími v N. Ale $\{z\} \times Y$ je kompaktní; můžeme tedy z tohoto pokrytí vybrat konečné podpokrytí $\{U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n\}$. Zde předpokládáme, že $U_i \times V_i \cap N \neq \emptyset$. Uvažme $W = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Systém množin $\{U_i \times V_i\}$ ve skutečnosti pokrývá $W \times Y$. Uvažme bod $(x, y) \in W \times Y$. Potom $(z, y) \in U_i \times V_i$ pro nějaký index i, tj. $y \in V_i$. Ale $x \in U_j$ pro všechna j a tedy $(x, y) \in U_i \times V_i$.

Druhá část: Buď $\mathscr{P}$ otevřené pokrytí $X \times Y$ a $z \in X$. Pak $\{z\} \times Y$ je kompaktní, jelikož je homeomorfní Y. Lze ji tedy pokrýt konečným podpokrytím $\{A_1, \dots, A_m\}$ z $\mathscr{P}$. Jejich sjednocení $N = A_1 \cup \dots \cup A_m$ je množina obsahující $\{z\} \times Y$ a podle první části důkazu obsahuje N množinu $W \times Y$, kde W je otevřené okolí $z \in X$ a $W \times Y$ je pokryta konečným systémem $\{A_1, \dots, A_m\}$.

Pro každé $x \in X$ lze zvolit W_x tak, že $W_x \times Y$ je pokryta konečně mnoha prvky $\mathscr{P}$. Ale $\{W_x | x \in X\}$ je pokrytí X a kvůli kompaktnosti X musí existovat konečné podpokrytí $\{W_1, \dots, W_k\}$. Každou z množin $W_i \times Y$ lze pokrýt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$, tedy i $X \times Y = \bigcup_i W_i \times Y$ lze pokrýt konečným počtem množin z $\mathscr{P}$. ■

Věta 4. *Buď X úplně uspořádaný prostor, ve kterém každá množina má nejmenší horní závoru. V topologii dané uspořádáním je každý (konečný) uzavřený interval kompaktní.*

Důkaz. První část: Buď $a < b$ a $\mathscr{P}$ pokrytí $[a, b]$ pomocí množin otevřených v $[a, b]$. Chceme ukázat, že v $\mathscr{P}$ existuje konečné podpokrytí. Dokažme napřed:

> Nechť $x \in [a, b)$. Pak existuje $y > x \in [a, b]$ tak, že interval (x, y) je pokryt nejvýše dvěma množinami z $\mathscr{P}$.

Existuje-li pro x prvek y, který po x bezprostředně následuje, je $[x, y]$ tvořen dvěma body, takže ho lze pokrýt nejvýše dvěma množinami z $\mathscr{P}$.

Neexistuje-li prvek, který po x bezprostředně následuje, vyberme $A \in \mathscr{P}$ tak, že $x \in A$, $x \neq b$. Množina A je otevřená a obsahuje tedy interval $[x, c)$, kde $c \in [a, b]$. Vyberme nyní $y \in (x, c)$. Interval $[x, y]$ je nyní pokryt jedinou množinou $A \in \mathscr{P}$.

Druhá část: Buď B množina všech bodů $y \in (a, b]$ takových, že interval $[a, y]$ je pokryt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$. Uplatněním první části na $x = a$ ukážeme, že existuje alespoň jedno takové y, množina B je tedy neprázdná. Buď $c \in B$ nejmenší horní závora B. Pak $a \leq c \leq b$.

Třetí část: Ukážeme sporem, že $c \in B$. Zvolme $A \in \mathscr{P}$ tak, že $c \in A$. A je otevřená a obsahuje interval $(d, c]$, $d \in [a, b]$. Pokud $c \notin B$, musí existovat $e \in (d, c)$, jinak by totiž d bylo menší horní závorou než c. Jelikož $e \in B$, lze $[a, e]$ pokrýt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$ (nechť je jich n). $[e, c]$ leží právě v jednom prvku $A \in \mathscr{P}$, tím pádem $[a, c] = [a, e] \cup [e, c]$ lze rovněž pokrýt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$ (bude jich $n + 1$). Tím dostáváme $c \in B$ a rozpor s předpokladem.

Čtvrtá část: Ukážeme, že $c = b$. Předpokládejme sporem, že $c < b$. Použijme teď první část pro případ $x = c$, zjistíme, že existuje $y > c \in [a, b]$ tak, že $[c, y]$ lze pokrýt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$. Ve třetí části jsme ukázali, pro $c \in B$ lze $[a, c]$ pokrýt konečně mnoha množinami z $\mathscr{P}$. To znamená, že $y \in B$, což je spor s předpokladem, že c je horní závora B. ∎

Důsledek 5. *Buďte $a < b$ reálná čísla. Potom uzavřený interval $[a, b]$ je kompaktní.*

Věta 6 (Kritérium kompaktnosti v $\mathbf{R}^n$)**.** *Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená a omezená vzhledem k euklidovské mterice d nebo manhattanské metrice ρ.*

Důkaz. Omezenost stačí ukázat vzhledem k ρ, jelikož platí nerovnosti

$$\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq \sqrt{n}\rho(x, y).$$

Směr "$\Rightarrow$": Předpokládejme, že A je kompaktní. Potom je A podle lemmat 1 a 2 uzavřená. Uvažme systém otevřených koulí $\{B_\rho(0, m) | m \in \mathbf{N}\}$, které pokrývají $\mathbf{R}^n$. Jejich konečné podpokrytí pokrývá A. Musí tedy existovat $M \in \mathbf{N}$ takové, že $A \subset B_\rho(0.M)$. Pro libovolná $x, y \in A$ dostáváme z trojúhelníkové nerovnosti $\rho(x, y) \leq 2M$. A je tedy omezená.

Směr "$\Leftarrow$". Nechť A je uzavřená a omezená vzhledem k ρ. Předpokládejme tedy, že $\rho(x, y) \leq N$ pro všechna $x, y \in A$. Zvolme $z \in A$ a označme $\rho(z, 0) = b$. Z trojúhelníkové nerovnosti potom plyne $\rho(x, 0) \leq N + b$ pro všechna $x \in A$. Označme $P = N + b$. Potom $A \subset [-P, P]^n$, což je kompaktní množina, podle důsledku 5 a opakovaným užitím lemmatu 3. Vzhledem k platnosti lemmatu 1 je A kompaktní. ∎