VLASTNOSTI LORENTZOVY GRUPY

Michael Krbek

1. Základní vlastnosti izometrií

Uvažujme vektorový protor V nad polem reálných čísel. Vektorový prostor V je hladkou varietou, jelikož každá volba báze (e_i) určuje na V globální souřadnicový systém

$$V \ni x \mapsto x^i \in \mathbf{R}^n \ ,$$

kde $x = x^i e_i$ je jednoznačný rozklad vektoru x v bázi (e_i). Sčítání a násobení skalárem jsou potom hladká zobrazení.

Na hladké varietě V je zadáno pseudometrické tenzorové pole g. Řekneme, že pseudometrické tenzorové pole je invariantní vůči zobrazení $\varphi\colon V \to V$, platí-li pro všechna vektorová pole $\xi, \eta \in \mathscr{X}(V)$, že $g(T\varphi \circ \xi, T\varphi \circ \eta) = g(\xi, \eta)$, nebo podrobněji: Jestliže ξ v bodě x je dáno dvojicí (x, u), $x \in V$, $u \in T_x V = V$ a podobně η v bodě x jako (x, v), potom musí platit

$$g_{(\varphi(x))}(D_x\varphi \cdot u, D_x\varphi \cdot v) = g_x(u, v),$$

kde $D_x\varphi$ je Jacobiho lineární zobrazení v bodě x.

1.1. Struktura izometrií. Ve všech bodech variety V nechť je g dáno konstantním pseudometrickým tenzorem $(\cdot, \cdot)$, tj. $g_x(u, v) := (u, v)$, pro všechna $x \in V$. Potom z definice invariance dostáváme

$$g_{\varphi(x)}(D_x\varphi \cdot u, D_x\varphi \cdot v) = (D_x\varphi \cdot u, D_x\varphi \cdot v) = (u, v) = g_x(u, v),$$

a z toho plyne, že $D_x\varphi$ je pseudoortogonální lineární zobrazení, označme ho například A. Je-li ovšem $D_x\varphi = A$, potom integrací dostáváme $\varphi(x) = Ax + y$, kde $y \in V$. Za výše uvedených předpokladů tedy můžeme formulovat

Tvrzení 1. *Každá izometrie v pseudometrickém vektorovém prostoru V s invariantním pseudometrickým tenzorovým polem je afinním zobrazením $\varphi = Ax + y$, kde A je pseudoortogonální zobrazení a y je vektor z V.*

1.2. Základní vlastnosti pseudortogonálních zobrazení. Pseudoortogonální zobrazení A se vyznačuje vlastností $(Au, Av) = (u, v)$, pro všechny $u, v \in V$. Označme G matici bilineární formy $(\cdot, \cdot)$ v bázi (e_i), matici lineárního zobrazení A v bázi (e_i) označíme rovněž A. Potom musí platit

$$\begin{aligned} A^t G A &= G \\ \det(A^t G A) &= \det G \\ \det A^t \det A &= 1 \\ (\det A)^2 &= 1 \\ \det A &= \pm 1. \end{aligned}$$

Zobrazení A je tedy zejména regulární.

Mějme nyní dvě pseudoortogonální zobrazení A, B a uvažujme jejich kompozici AB, potom platí

$$(AB\,u, AB\,v) = (B\,u, B\,v) = (u, v).$$

Pro inverzní zobrazení A^{-1} platí

$$(A^{-1}\,u, A^{-1}\,v) = (AA^{-1}\,u, AA^{-1}\,v) = (u, v)$$

a je tedy rovněž pseudoortogonální. Inverzní zobrazení je rovno adjungovanému, protože

$$(u, A^\dagger\,v) = (A\,u, v) = (u, A^{-1}\,v).$$

Kompozice zobrazení je rovněž asociativní. Identická lineární transformace je zřejmě rovněž pseudoortogonální, celkem tedy dostáváme

Tvrzení 2. *Množina všech pseudoortogonálních zobrazení $A\colon V \to V$ tvoří grupu vzhledem k operaci kompozice zobrazení. Množina všech pseudoortogonálních zobrazení A s $\det A = 1$ tvoří její normální podgrupu.*

Poznámka 1. V bázi (e_i) je kompozice dána maticovým násobením, inverzní prvek inverzní maticí a identita jednotkovou maticí.

2. Lorentzova grupa

Nyní budeme uvažovat situaci, kdy bilineární forma určující pseudoskalární součin má signaturu $(1, 0, n-1)$, je tedy nedegenerovaná a její matice v normální bázi je

$$G = \begin{pmatrix} 1 & & & \emptyset \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ \emptyset & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Grupě pseudoortogonálních zobrazení pro bilineární formu této signatury se říká *Lorentzova grupa* a označuje se $\mathbf{O}(1, n-1)$. Pokud navíc uvažujeme normální podgrupu zobrazení s jednotkovým determinantem, říkáme jí *speciální Lorentzova grupa* a označujeme $\mathbf{SO}(1, n-1)$.

Bude účelné zapisovat čtvercové matice řádu n vyjadřující jak bilineární formy tak i lineární zobrazení $V \to V$ pomocí blokových matic

$$\begin{pmatrix} a & u^t \\ v & A \end{pmatrix},$$

kde $a \in \mathbf{R}$, $u, v \in \mathbf{R}^{n-1}$ jsou sloupcové vektory, A je matice řádu $n-1$. Zapišme například blokově požadavek na to, aby matice L byla prvkem Lorentzovy grupy, tj.

$$L^t G L = G$$
$$\begin{pmatrix} a & v^t \\ u & A^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u^t \\ v & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a^2 - v^t v & au^t - v^t A \\ au - A^t v & uu^t - A^t A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

Z toho je například okamžitě zřejmé, že $a^2 = 1 + v^t v$, a tedy buď $a \geq 1$, nebo $a \leq -1$, neboť $v^t v \geq 0$ jakožto kvadrát euklidovské normy v.

2.1. Polární rozklad Lorentzovy grupy. Jak vyplynulo z předchozího, musí být prvek a matice $L \in \mathbf{O}(1, n-1)$ buď větší než 1 nebo naopak menší mež -1. Nyní si ukážeme, že prvky Lorentzovy grupy s $a > 1$ tvoří její podgrupu. K tomu využijeme polárního rozkladu matice L. Podle věty o polárním rozkladu musí platit

$$L = TR = SU,$$

kde R, S jsou symetrické pozitivně definitní matice a $T, U \in \mathbf{O}(n)$ jsou ortogonální matice a tento rozklad je jednoznačný, jelikož L je vždy regulární matice. Dosaďme

$$\begin{aligned} L^t G L &= G \\ U^t S G S U &= G. \end{aligned}$$

Invertováním předchozí rovnosti dostaneme

$$U^t S^{-1} G S^{-1} U = G$$

a tedy

$$\begin{aligned} S^{-1} G S^{-1} &= SGS \\ GS^2 G &= S^{-2}. \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že S^{-2} je symetrická (a tedy diagonalizovatelná) a pozitivně definitní, existuje jednoznačně její pozitivně definitní odmocnina

$$S^{-1} = GSG$$

Z toho dostáváme, že $SGS = G$ a tedy $S \in \mathbf{O}(1, n-1)$. Z toho již ihned plyne, že i $U \in \mathbf{O}(1, n-1)$. Analogicky dostaneme $T, R \in \mathbf{O}(1, n-1)$.

Dále určíme explicitně tvar matic R, S. Musí platit

$$S = \begin{pmatrix} a & u^t \\ u & A \end{pmatrix},$$

kde $A = A^t$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & u^t \\ u & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & u^t \\ u & A \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a^2 - u^t u & a u^t - u^t A \\ a u - A u & u u^t - A^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Z toho dostáváme $a^2 = 1 + u^t u$. Dále ukažme, že matice $E + uu^t$ je pozitivně definitní. Jednoduchým přímým výpočtem dostaneme

$$\det(E + uu^t - \lambda E) = (1-\lambda)^{n-2}(1 + u^t u - \lambda)$$

Všechny vlastní hodnoty jsou kladné a matice je pozitivně definitní, existuje tedy jednoznačně její pozitivně definitní odmocnina

$$\sqrt{E + uu^t},$$

přičemž u je vlastním vektorem $E + uu^t$ příslušným vlastní hodnotě $a^2 = 1 + u^t u$ a tedy i vlastním vektorem $\sqrt{E + uu^t}$ příslušným vlastní hodnotě $a = \sqrt{1 + u^t u}$. Celkem tedy

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + u^t u} & u^t \\ u & \sqrt{E + uu^t} \end{pmatrix},$$

kde $u \in \mathbf{R}^{n-1}$ je libovolný sloupcový vektor. Ještě lze přímo spočíst odmocninu $\sqrt{E + uu^t}$. Předpokládejme výsledek ve tvaru $E + \alpha uu^t$, potom jednoduchým výpočtem získáme $\alpha = \sqrt{1 + u^t u} - 1$, druhé řešení kvadratické rovnice je nepřípustné, jelikož nevede k pozitivně definitní matici.

Pro R je výsledek stejný (ovšem obecně s jiným vektorem $v \in \mathbf{R}^{n-1}$)

$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{1 + v^t v} & v^t \\ v & \sqrt{E + vv^t} \end{pmatrix}.$$

Dále spočtěme T, U. Platí $T, U \in \mathbf{O}(n) \cap \mathbf{O}(1, n-1)$, tedy

$$U^T U = E \qquad\qquad U^T G U = G$$

$$\begin{pmatrix} a & w^t \\ v & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & v^t \\ w & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & w^t \\ v & A^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & v^t \\ w & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^2 + w^t w & av^t + w^t A \\ av + A^t w & vv^t + A^t A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a^2 - w^t w & av^t - w^t A \\ av - A^t w & vv^t - A^t A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}$$

Z rovnic $a^2 + w^t w = 1$ a $a^2 - w^t w = 1$ dostáváme $a^2 = 1$ a $w^t w = 0$, tj. $a = \pm 1$ a $w = 0$. Dále máme $av = A^t w$ a tedy $v = 0$. Nakonec $A^t A = E$, tj. $A \in \mathbf{O}(n-1)$. Celkem tedy

$$U = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}, \quad A \in \mathbf{O}(n-1),$$

podobně

$$T = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad B \in \mathbf{O}(n-1).$$

Dále ukážeme vztah mezi T a U, resp. R a S. Musí platit

$$\begin{aligned} L = TR &= \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1+v^t v} & v^t \\ v & \sqrt{E + vv^t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1+v^t v} & \pm v^t \\ Bv & B\sqrt{E+vv^t} \end{pmatrix} \\ = SU &= \begin{pmatrix} \sqrt{1+u^t u} & u^t \\ u & \sqrt{E+uu^t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1+u^t u} & u^t A \\ \pm u & \sqrt{E+uu^t}A \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Z toho vyplývá $Bv = \pm u$ a $\pm v = A^t u$, tj. $A = B$ a rovněž $T = U$. Můžeme tedy formulovat

Tvrzení 3. *Každý prvek Lorentzovy grupy L má jednoznačný polární rozklad $L = UR = SU$, kde R, S jsou symetrické pozitivně definitní matice a $U \in \mathbf{O}(n)$ je ortogonální matice, tyto matice jsou navíc rovněž prvky Lorentzovy grupy $\mathbf{O}(1, n-1)$.*

Poznámka 2. Ortogonální matice U v rozkladu má význam „prostorové“ ortogonální transformace, která navíc může zrcadlit „časovou“ souřadnici. Význam symetrické pozitivně definitní matice S (stejně pro R) je rovněž zřejmý. Uvažme dvě vztažné soustavy J a K, jimž přísluší souřadnice $(s, x)^t$ a $(t, y)^t$. Nechť platí

$$\begin{pmatrix} s \\ x \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} t \\ y \end{pmatrix}.$$

Počátek soustavy K má souřadnice $(t, 0)^t$ a v soustavě J je dán jako

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{1+u^t u}\, t \\ x &= ut. \end{aligned}$$

Rychlost soustavy J vzhledem k soustavě K je tedy

$$\frac{x}{s} = \frac{u}{\sqrt{1+u^t u}},$$

a velikost této rychlosti je

$$\sqrt{\frac{u^t u}{1+u^t u}}.$$

2.2. Souvislost Lorentzovy grupy. V předchozím jsme dokázali, že každý prvek L Lorentzovy grupy $\mathbf{O}(1,n)$ má jednoznačný polární rozklad

$$L = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S,$$

kde $A \in \mathbf{O}(n)$ je ortogonální a S je symetrická matice. Pro hladké variety je souvislost ekvivalentní následující vlastnosti: *Každé dva body lze spojit spojitou křivkou.* Specielně pro Lieovy grupy zřejmě postačuje: *Každý bod lze spojit spojitou křivkou s jedničkou.* Pro každé $L \in \mathbf{O}(1,n-1)$ tedy existuje spojité zobrazení

$$f\colon [0,1] \ni t \mapsto f(t) \in \mathbf{O}(1,n-1)$$

takové, že $f(0) = \mathrm{id}$ a $f(1) = L$. Symetrickou matici S můžeme převést do diagonálního tvaru

$$S = U^t \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix} U,$$

kde $U \in \mathbf{O}(n)$ je ortogonální matice. Ukážeme, že množina všech symetrických matic je souvislá tím, že zkonstruujeme patřičnou křivku

$$f(t) = U^t \begin{pmatrix} (d_1-1)t+1 & & \\ & \ddots & \\ & & (d_n-1)t+1 \end{pmatrix} U,$$

pro kterou zřejmě platí $f(0) = \mathrm{id}$, $f(1) = S$ a je spojitá. Je zřejmé, že množina $\{\pm 1\}$ má právě dvě souvislé komponenty, patřičné body. Dále ukažme, že $\mathbf{O}(n-1)$ má nejméně dvě souvislé komponenty.

$$\det\colon \mathbf{O}(n-1) \to \{\pm 1\}$$

je spojitá funkce, proto obrazem souvislé komponenty musí být opět souvislá komponenta. Každou ortogonální transformaci A lze zapsat ve vhodné bázi v blokově diagonálním tvaru

$$A = Q^t \begin{pmatrix} R(\varphi_1) & & & & & & & \\ & R(\varphi_2) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & R(\varphi_r) & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} Q,$$

kde Q je ortogonální a $R(\varphi_j) = \begin{pmatrix} \cos\varphi_j & -\sin\varphi_j \\ \sin\varphi_j & \cos\varphi_j \end{pmatrix}$. Nyní můžeme zkonstruovat spojitou křivku $t \mapsto A(t)$, jež spojí A s jednotkovou maticí, nebo s maticí $\begin{pmatrix} 1 & \ddots & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$. a to následovně

$$t \mapsto A = Q^t \begin{pmatrix} R(\varphi_1 t) & & & & & & & \\ & R(\varphi_2 t) & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & R(\varphi_r t) & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \pm 1 \end{pmatrix} Q.$$

Tím jsme dokázali, že $\mathbf{O}(n-1)$ má nejvýše dvě souvislé komponenty. $\mathbf{O}(n-1)$ má tedy právě dvě souvislé komponenty. Celkem tedy:

Tvrzení 4. *Lieova grupa* $\mathbf{O}(1,n)$ *má právě čtyři souvislé komponenty dané prvky s polárním rozkladem*

$$(++) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S, \quad \det A = 1,$$

$$(+-) \quad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S, \quad \det A = -1,$$

$$(-+)\ \ L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S, \quad \det A = 1,$$

$$(--)\ \ L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} S, \quad \det A = -1,$$

přičemž souvislá komponenta obsahující jedničku je $(+,+)$, tato komponenta je Lieovou podgrupou $\mathbf{O}(1, n-1)$.

3. Dodatky

3.1. Diagonalizace symetrické bilineární formy. Zvolme bázi $\{e_i\}$, kde $i = \{1, \dots, n\}$ ve vektorovém prostoru V. Nyní můžeme pro libovolný vektor $x = x^i e_i$ a symetrickou bilineární formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ s označením

$$g_{ij} = \tfrac{1}{2} \langle e_i, e_j \rangle$$

zkonstruovat tzv. kvadratickou formu g

$$g(x) = \tfrac{1}{2} \langle x, x \rangle = g_{ij} x^i x^j. \tag{1}$$

Věta 5. *Každou symetrickou bilineární formu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ lze vyjádřit v takové bázi, kde je tato forma dána součtem čtverců souřadnic svého argumentu, tj. matice g_{ij} má diagonální tvar.*

Důkaz. Důkaz je konstruktivní a platí jak pro reálná, tak i komplexní čísla. Nechť jsou tedy dána čísla g_{ij} libovolně.

(a) Předpokládejme napřed, že alespoň jedno z čísel $g_{11}, g_{22}, \dots, g_{nn}$ je různé od nuly. Permutací prvků báze jednoduše dosáhneme toho, že toto nenulové číslo bude g_{11}. Uvažujme kvadratickou formu

$$g_1 = g - \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + \dots + g_{1n} x^n)^2,$$

která již explicitně nezávisí na souřadnici x^1. provedeme-li transformaci

$$y^1 = g_{11} x^1 + g_{12} x^2 + \dots + g_{1n} x^n,$$

dostáváme

$$g = \frac{1}{g_{11}}(y^1)^2 + g_1,$$

přičemž g_1 je kvadratickou formou v souřadnicích $x^2, \dots, x^n$. dále můžeme postupovat uplatněním výše uvedeného postupu na kvadratickou formu g_1 na vektorovém prostoru v_1.

(b) nastala tedy situace, ve které platí, že $g_{11} = g_{22} = \dots = g_{nn} = 0$. pokud žádný z ostatních koeficientů není nenulový, jsme hotovi. předpokládejme tedy, že alespoň jeden z těchto koeficientů je nenulový. permutací prvků báze opět jednoduše docílíme toho, že tento koeficient je g_{12}. teď položíme

$$g_2 = g - \frac{2}{g_{12}}(g_{21}x^1 + g_{23}x^2 + \dots + g_{2n}x^n)(g_{12}x^2 + g_{13}x^3 + \dots + g_{1n}x^n).$$

Forma g_2 zřejmě explicitně nezávisí na souřadnicích x^1 a x^2. Položme tedy nyní

$$\begin{aligned} y^1 + y^2 &= g_{21}x^1 + g_{23}x^2 + \dots + g_{2n}x^n, \\ y^1 - y^2 &= g_{12}x^2 + g_{13}x^3 + \dots + g_{1n}x^n, \end{aligned}$$

a v nových souřadnicích y^1 a y^2 dostáváme

$$g = \frac{2}{g_{12}}\left((y^1)^2 - (y^2)^2\right) + g_2,$$

kde g_2 je kvadratickou formou v souřadnicích $x^3, \dots, x^n$.

Pokud budeme opakovaně uplatňovat postupy (a) a (b) na formy g_1 a g_2, dostaneme po nejvýše n opakováních formu g do tvaru

$$g = a_1(y^1)^2 + a_2(y^2)^2 + \cdots a_n(y^n)^2.$$

Pokud byla čísla g_{ij} reálná, jsou zřejmě i čísla a_i reálná. Tím je tvrzení dokázáno. ∎

V reálném případě ještě můžeme každý bázový vektor e_i vydělit $\sqrt{|a_i|}$ a po přeskládání získáme matici symetrické bilineární formy v diagonálním tvaru

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Trojici (p, q, r), kde p je počet 1, q počet 0 a r počet -1, nazýváme signaturou symetrické bilineární formy $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Pokud $q = 0$ nazýváme formu *nedegenerovanou* a jako její signaturu uvádíme jen dvojici (p, r). V případě Lorentzovy grupy je důležitá nedegenerovaná forma se signaturou $(1, n-1)$.

3.2. Polární rozklad lineárního zobrazení. Nechť V, $\dim V = n$ je vektorový prostor nad polem reálných čísel $\mathbf{R}$ (resp. komplexních čísel $\mathbf{C}$) a $(\cdot,\cdot)$ je pozitivně definitní bilineární (resp. seskvilineární) forma a nechť $A\colon V \to V$ je lineární operátor. Existuje právě jeden operátor $A^\dagger$ *sdružený* k A tak, že $(Av, w) = (v, A^\dagger w)$ pro všechna $v, w \in V$. Pokud $A = A^\dagger$ nazýváme takový operátor *samosdružený* (resp. *symetrický*). Samosdružený (resp. symetrický) operátor A nazýváme *pozitivní*, platí-li $(Av, v) \geq 0$ pro všechna $v \in V$.

Věta 6. *Nechť $A\colon V \to V$ je lineární operátor. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(a) A je pozitivní.

(b) A je samosdružený a všechny jeho vlastní hodnoty jsou nezáporná reálná čísla.

(c) A má pozitivní odmocninu.

(d) A má samosdruženou odmocninu.

(e) Existuje operátor $B\colon V \to V$ tak, že $A = B^\dagger B$.

Důkaz. Dokážeme implikace (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a).

Předpokládejme tedy, že platí (a) a operátor A je pozitivní. Z definice je i samosdružený. Vezměme λ libovolnou vlastní hodnotu A a jí příslušný vlastní vektor v. Pak platí $0 \leq (Av, v) = \lambda(v, v)$ a tedy $\lambda \geq 0$, což je obsahem (b).

Je-li A samosdružený, existuje ortonormální báze, v níž je A diagonální (věta o spektrálním rozkladu samosdruženého operátoru), navíc vlastní hodnoty na diagonále jsou nezáporná čísla λ_i, $1 \leq i \leq n$. Ve stejné bázi nyní můžeme definovat diagonální operátor B s vlastními hodnotami $\sqrt{\lambda_i}$, zjevně platí $B^2 = A$. B je tedy pozitivní odmocnina z A a (c) platí.

(d) plyne z (c) z definice, protože B je pozitivní a tedy samosdružený.

(e) je rovněž z (d) zřejmé: platí $A = B^2 = B^\dagger B$, protože $B = B^\dagger$.

Předpokládejme, že platí (e), tedy existuje B tak, že $A = B^\dagger B$. Potom $A^\dagger = (B^\dagger B)^\dagger = B^\dagger B = A$ a A je tedy samosdružený. Dále pro každé $v \in V$ platí $(Av, v) = (B^\dagger Bv, v) = (Bv, Bv) \geq 0$ a A je tudíž pozitivní operátor. ■

Věta 7 (o polárním rozkladu)**.** *Existuje izometrie U, že*

$$A = S\sqrt{A^\dagger A}.$$

Důkaz. Vezměme libovolný $v \in V$, potom

$$\|Av\|^2 = (Av, Av) = (A^\dagger Av, v) = (\sqrt{A^\dagger A}\sqrt{A^\dagger A}v, v) = \\ = (\sqrt{A^\dagger A}v, \sqrt{A^\dagger A}v) = \|\sqrt{A^\dagger A}v\|^2.$$

Nyní definujme lineární zobrazení $S_1\colon\ \operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A} \to \operatorname{im} A$ předpisem

$$S_1(\sqrt{A^\dagger A}v) = Av$$

a ukážeme, že S_1 lze rozšířit na izometrii ve V. Napřed musíme ukázat, že S_1 je dobře definován. Vezměme $v, w \in V$ takové, že $\sqrt{A^\dagger A}v = \sqrt{A^\dagger A}w$. Musíme ukázat, že potom $Av = Aw$. Ale platí

$$\|Av - Aw\| = \|A(v - w)\| = \|\sqrt{A^\dagger A}(v - w)\| = \|\sqrt{A^\dagger A}v - \sqrt{A^\dagger A}w\| = 0,$$

takže předpoklad platí. Linearita zobrazení S_1 je zřejmá. Zjevně platí, že $\|S_1 u\| = \|u\|$ pro všechna $u \in \operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A}$ a S_1 je tedy injektivní, z toho

$$\dim\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A} = \dim\operatorname{im} A, \quad \dim(\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A})^\perp = \dim(\operatorname{im} A)^\perp.$$

To znamená, že můžeme zvolit ortonormální báze $(e_1, \dots, e_m$ v $(\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A})^\perp$ a $(f_1, \dots, f_m)$ v $(\operatorname{im} A)^\perp$ (mají *stejnou* délku) a definovat lineární zobrazení $S_2\colon (\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A})^\perp \to (\operatorname{im} A)^\perp$ předpisem

$$S_2(a^1 e_1 + \cdots + a^m e_m) = a^1 f_1 + \cdots + a^m f_m.$$

Definujme S jako operátor, jež je roven S_1 na im im $\sqrt{A^\dagger A}$ a S_2 na $(\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A})^\perp$. Přesněji řečeno, každý vektor $v \in V$ můžeme jednoznačně zapsat jako přímý součet $v = u + w$, kde $u \in \operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A}$ a $w \in (\operatorname{im}\sqrt{A^\dagger A})^\perp$ a $Sv = S_1 u + S_2 w$. Pro každé $v \in V$ potom máme

$$S(\sqrt{A^\dagger A} v) = S_1(\sqrt{A^\dagger A} v) = Av,$$

čili $A = S\sqrt{A^\dagger A}$. Zbývá dokázat, že S je izometrie, což ale jednoduše plyne z Pythagorovy věty

$$\|Sv\|^2 = \|S_1 u + S_2 w\|^2 = \|S_1 u\|^2 + \|S_2 w\|^2 = \|u\|^2 + \|w\|^2 = \|v\|^2.$$

■

Podobně lze ukázat i existenci polárního rozkladu $A = \sqrt{AA^\dagger} S'$, tedy operátory jsou v opačném pořadí.