

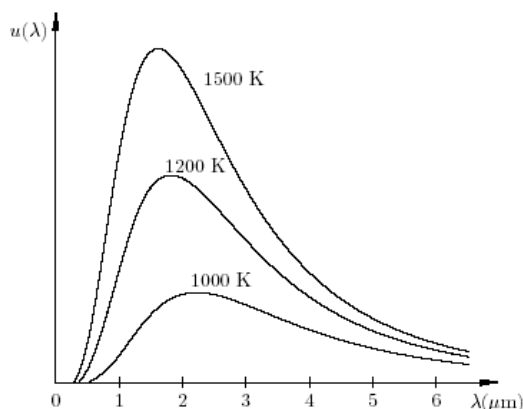
Dodatek k 2. cvičení **Záření černého tělesa**

Každá látka emituje elektromagnetické záření, které závisí na její teplotě. Schopnost vyzařovat úzce souvisí se schopností látky absorbovat záření. V dalším pak budeme zkoumat elektromagnetické pole uzavřené v dutině, jejíž stěny jsou udržovány na konstantní teplotě T . Stěny neustále emitují a současně absorbují záření a tak v dutině vznikne rovnovážný stav – stav, v němž jsou stěny dutiny (látka) v termodynamické rovnováze s elektromagnetickým polem (zářením, které nazýváme zářením černého tělesa). Záření tak přiřadíme teplotu – teplotu, která je rovna teplotě, na níž jsou udržovány stěny dutiny. Záření černého tělesa má spojité spektrum, v němž jsou zastoupeny všechny frekvence, a je projevem chování obrovského počtu „částic“, a pro jeho popis je tedy nutné užít statistické termodynamiky.

Celková energie $U(T, V)$ záření v dutině, která má objem V , je dána vztahem

$$(1) \quad U(T, V) = \sigma VT^4 \quad (\text{Stefanův-Boltzmannův zákon}^1),$$

kde $\sigma = 7,561 \cdot 10^{-16} \text{ J} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{K}^{-4}$. Tato energie je (nerovnoměrně) rozprostřena přes všechny frekvence. Na konci předminulého století (v letech 1895 až 1900) bylo experimentálně získáno spektrální rozdělení energie, které je na obr. 1. Tento výsledek nebylo možné vysvětlit v rámci klasické fyziky.



Obr. 1. Spektrální rozdělení energie záření černého tělesa

¹ Tuto závislost navrhl na základě experimentu J. Stefan (1879) a odvodil na základě obecných termodynamických úvah a s užitím Maxwellovy teorie elektromagnetického pole L. Boltzmann (1884). J. Stefan a jeho žák L. Boltzmann byli oba profesori na vídeňské universitě.

Vztah pro spektrální hustotu energie získal na sklonku roku 1900 Max Planck² na základě předpokladu, že energie je kvantována. Abychom tento vztah odvodili (způsobem, který je dnes běžně užíván), potřebujeme znát

- (1) počet stojatých elektromagnetických vln v dutině s frekvencemi v intervalu $(f, f + df)$,
- (2) střední počet fotonů s energií hf záření o teplotě T .

Ad (1)

Počet stojatých elektromagnetických vln v dutině o objemu V s frekvencemi v intervalu $(f, f + df)$ je dán vztahem

$$N(f) df = V \frac{8\pi}{c^3} f^2 df,$$

(2)

kde $N(f)$ se nazývá hustota stavů. Postup při odvození tohoto vztahu je analogický stanovení počtu stojatých zvukových vln, které mohou vzniknout v uzavřené píšťale varhan. Rozdíly spočívají v tom, že náš problém je trojrozměrný, zatímco problém varhanní píšťaly je jednorozměrný. Podrobný výpočet lze nalézt např. v A. BEISER: Úvod do moderní fyziky. Academia, Praha 1975; R. SERWAY, C. J. MOSES, C. A. MOYER: Modern Physics. Saunders 1989.

Ad (2)

Ve statistické fyzice se odvozuje, že pravděpodobnost, že systém, který je v termodynamické rovnováze s rezervoárem o teplotě T , je ve stavu o energii E , je úměrná $\exp(-E/kT)$, kde k je Boltzmannova konstanta. S užitím tohoto poznatku ukažte, že střední počet fotonů

² Výsledky Planckovy přednášky *Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum*, kterou přednesl 14. prosince 1900 na zasedání Německé fyzikální společnosti, byly publikovány v článku M. Planck: *Über das Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum* v *Annalen der Physik* (Leipzig) **4** (1901), 553-563. Kvantum se tedy rodilo spolu s 20. stoletím.

Planck vyšel z předpokladu, že látka je tvořena souborem nabitých harmonických oscilátorů (elektrických dipólů), které náhodně kmitají. (Připomeňme, že v té době neexistoval žádný experimentální důkaz o diskrétní atomové struktuře látky.) Nejprve našel vztah mezi střední hodnotou energie (nabitého) oscilátoru a hustotou energie jeho záření, které je s daným oscilátorem v termodynamické rovnováze. Poté, za předpokladu, že energie oscilátoru je kvantována, teoreticky zdůvodnil vyzařovací zákon, jenž nese jeho jméno. Planckova argumentace je založena na hlubokých fyzikálních úvahách o entropii. (M. Planck uvádí: „Šest let jsem zápasil s problémem záření černého tělesa, ..., znal jsem vzorec, který souhlasil s experimentem. Teoretické zdůvodnění muselo být nalezeno za každou cenu. Klasická fyzika nemohla nabídnout řešení... . Byl jsem ochoten se vzdát všeho. Jediné, co ale musí zůstat, jsou zákony termodynamiky.“)

Zdůrazněme, že Planck vyslovil předpoklad o kvantování mechanického oscilátoru. Představu o kvantování elektromagnetického pole samého vyslovil (nezávisle na Planckovi, ale opět na základě termodynamických úvah o entropii) až roku 1905 A. Einstein. Podnětem k Einsteinovým úvahám byla zřejmá asymetrie ve fyzice – zásadní formální rozdíl mezi Maxwellovou teorií elektromagnetického pole, které je spojitě rozloženo v prostoru, a diskrétním atomovým modelem látky. Foton [byť pokřtěn později (slovo foton použil poprvé G. N. Lewis v dopisu do časopisu *Nature* v roce 1926 - Vol. 118, Part 2, p. 874)] se zrodil 18. března 1905, kdy do redakce předního fyzikálního časopisu *Annalen der Physik* byl doručen rukopis práce A. Einsteina „Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt“. (viz http://physics.fme.vutbr.cz/files/61/fulltext_ID=109924447&PLACEBO=IE.pdf). Zásilku s Einsteinovým rukopisem tehdy doručila pošta z Bernu do Lipska za jeden den!

monochromatického záření o frekvenci f , které je v termodynamické rovnováze s rezervoárem o teplotě T , je dán vztahem [při výpočtu užitje: $\sum_{n=0}^{\infty} n \exp(-n\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n\alpha)$]

$$\langle n \rangle \equiv n(f, T) = \frac{1}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (3)$$

Nyní již snadno získáme spektrální hustotu energie záření v dutině při teplotě T :

$$u(f, T) = hf \langle n \rangle N(f) = V \frac{8\pi h}{c^3} \frac{f^3}{\exp(hf/kT) - 1} \quad (\text{Planckův vyzařovací zákon}). \quad (4)$$

Spektrální hustotu energie může být vyjádřena buď jako funkce frekvence, nebo jako funkce vlnové délky. Ukažte, že

$$E(\lambda, T) = V \frac{8\pi h c}{\lambda^5} \frac{1}{\exp(hc/k\lambda T) - 1}.$$

Na závěr s užitím Planckova vyzařovacího zákona odvoďte Stefanův-Boltzmannův zákon. Při výpočtu dojdete k integrálu

$$\int_0^{\infty} x^3 (e^x - 1)^{-1} dx = \pi^4/15.$$



MAX PLANCK zavedl kvantování energie oscilátoru jako čistě formální předpoklad pro odvození vyzařovacího zákona. Ve své vědecké autobiografii později (1945) uvádí: „Moje marné pokusy nějak včlenit kvantum akce do klasické fyziky trvaly řadu let a stály mne mnoho práce. Mnozí kolegové v tom spatřovali určitý druh tragiky. Mám o tom jiné mínění. Neboť pro mne byl tím cennější zisk, který jsem si tak důkladným objasněním odnesl. Vždyť nyní jsem věděl jistě, že kvantum akce je pro fyziku mnohem významnější, než jak jsem byl nakloněn zpočátku předpokládat, a získal jsem tím plné porozumění pro nutnost zavést při řešení atomistických problémů zcela nové pozorovací a početní metody. K vypracování takových metod, jehož jsem se už ovšem nemohl účastnit, sloužily především práce NIELSE BOHRA a ERWINA SCHRÖDINGERA.“ (viz Čs. čas. fyz. A 28 (1978), 610)

