Stacionární stavy Klein-Gordonovy rovnice v Coulombově potenciálu

1. Sféricky symetrický potenciál. Klein-Gordonovu rovnici lze obecně zapsat

$$[(\mathrm{i}\partial_\nu - eA_\nu)\, g^{\mu\nu}\, (\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)]\, \Psi(x^\kappa) = m^2 \Psi(x^\kappa),$$

kde $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ jsou derivace podle prostoročasových souřadnic, e je elementární náboj, $eA_\mu = (V(r), 0, 0, 0)$, $r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ je potenciál, $g^{\mu\nu}$ je metrický tenzor se signaturou $(1, 3)$, $\Psi(x^\kappa)$ je vlnová funkce, m je klidová hmotnost částice. Předpokládejme stacionární stav, tedy $\Psi(x^\kappa) = \psi(x^i)\exp(-\mathrm{i}\epsilon x^0)$ a zaveďme sférické souřadnice. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$\left\{[\epsilon - V(r)]^2 + \Delta - m^2\right\} \psi(r, \theta, \phi) = 0,$$

kde

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

je Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích. Provedeme separaci proměnných $\psi(r, \theta, \phi) = u(r) Y(\theta, \phi)$ a dostaneme

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}u(r)}{\mathrm{d}r}\right) + \left\{[\epsilon - V(r)] - m^2 - \frac{\Lambda}{r^2}\right\} u(r) = 0$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial Y(\theta,\phi)}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\phi)}{\partial\phi^2} + \Lambda Y(\theta, \phi) = 0$$

Regulárními řešeními druhé rovnice jsou sférické funkce

$$Y_{\ell m}(\theta, \phi), \quad \ell \in \{0, 1, 2, \ldots\}, \quad m \in \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\},$$

separační parametr musí splňovat podmínku $\Lambda = \ell(\ell + 1)$. V první rovnici provedeme substituci $u(r) = R(r)/r$ a celkem získáme

$$\frac{\mathrm{d}^2 R(r)}{\mathrm{d}r^2} + \left[q^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R(r) = 0,$$

kde $q^2 = [\epsilon - V(r)]^2 - m^2$.

2. π^--mezon v Coulombově potenciálu. π^--mezon vyhovuje Klein-Gordonově rovnici, jedná se o částici s nábojem $-e$, spinem 0, klidovou hmotností $m = 140$ MeV a poločasem rozpadu 2.6×10^{-8} s (mechanismem slabé interakce). Budeme studovat zachycení tohoto mezonu jádrem, které budeme považovat za bodové, popíšeme ho pomocí Coulombova potenciálu $V(r) = -Ze^2/r$, kde Z je protonové číslo. Po dosazení získáme

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} + \frac{Z^2e^4 - \ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2\epsilon Ze^2}{r} + \epsilon^2 - m^2\right] R(r) = 0.$$

Zavedeme následující substituce

$$\begin{aligned}\rho &= 2r\sqrt{m^2-\epsilon^2},\\ \lambda &= \frac{\epsilon Ze^2}{\sqrt{m^2-\epsilon^2}},\\ \mu &= \sqrt{(\ell+\tfrac{1}{2})^2 - Z^2e^4},\end{aligned}$$

s kterými rovnice přejde na tvar

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{\rho^2} + \frac{\lambda}{\rho} - \frac{1}{4}\right) R(\rho) = 0.$$

V řešení rovnice postupujeme dále standardním způsobem. Rovnice má dva póly 0 a ∞. Pro $\rho \to \infty$ dostáváme rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{1}{4}\right) R(\rho) = 0,$$

jejímž řešením jsou $\exp(\pm\rho/2)$, znaménko plus vede k neomezené vlnové funkci. Pro $\rho \to 0$ dostáváme rovnici

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} - \frac{\mu^2-\frac{1}{4}}{\rho^2}\right) R(\rho) = 0,$$

jejímž řešením je $\rho^{\frac{1}{2}\pm\mu}$, přičemž je třeba vzhledem na požadavek omezenosti vlnové funkce v okolí 0 vzít znaménko plus. Předpokládejme řešení ve tvaru $R(\rho) = \rho^{\frac{1}{2}+\mu}\exp(-\rho/2)f(\rho)$. Po dosazení a úpravě dostáváme

$$f'' + \left(\frac{2\mu+1}{\rho} - 1\right) f' + \frac{\lambda-\mu-\frac{1}{2}}{\rho} f = 0.$$

Označme $a = 2\mu + 1$ a $b = \mu + 1/2 - \lambda$.

3. Kvantování energie. Řešení hledáme Frobeniovou metodou pomocí mocninné řady

$$f(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \rho^k$$

a po dosazení dostáváme podmínky na koeficienty (bez újmy na obecnosti můžeme položit $a_0 = 1$)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b}{a} a_0 \\ a_2 &= \frac{b+1}{a+1} \frac{a_1}{2} \\ &\vdots \\ a_k &= \frac{k+b-1}{k+a-1} \frac{a_k}{k} \end{aligned}$$

a s označením $(a)_k = a(a+1)(a+2)\cdots(a+k-1)$ vyřešíme rekurzi a celkem

$$f(\rho) = \sum \frac{(b)_k}{(a)_k} \frac{\rho^k}{k!}.$$

Uvedené funkci se říká konfluentní hypergeometrická funkce ${}_1F_1(b, a; \rho)$ a pomocí její integrální reprezentace lze získat asymptotický rozvoj ${}_1F_1(b, a; \rho) \approx \exp(\rho)\rho^(b - a)$. Získali bychom tedy opět neomezenou radiální část vlnové funkce. Jedinou možnost jak získat omezenou vlnovou funkci představuje volba $b = -n$, kde $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. V tomto případě je $a_k = 0$ pro $k > n$ a jako řešení dostaneme polynom stupně n. Musí tedy platit $\lambda - \mu - 1/2 = n$, z toho po zpětné substituci máme

$$\epsilon = -m \left\{ 1 + \frac{Z^2 e^4}{\left[n + \frac{1}{2} + \sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2 - Z^2 e^4} \right]^2} \right\}^{-\frac{1}{2}},$$

znaménko minus plyne ze skutečnosti, že pro $Z = 0$ (tj. nulový potenciál) musíme získat $\epsilon = -m$.