Příklady z komplexní analýzy

Michael Krbek

4. ledna 2002

Je použito standardní označení funkcí komplexní proměnné

$$w = w(z) = u(z) + \mathrm{i}\, v(z)\,,$$

kde $z = x + \mathrm{i}\, y$ a tedy $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$, popř. v polárních souřadnicích

$$w = \rho(z)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(z)}\,,$$

kde $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$ a tedy $\rho = \rho(r, \varphi)$ a $\theta = \theta(r, \varphi)$.

1 Posloupnosti a řady

Příklad 1.1: Najděte následující součty

$$1 + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx\,,$$
$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin(2n - 1)x\,,$$
$$\sin x - \sin 2x + \ldots + (-1)^{n-1} \sin nx\,,$$
$$\cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) + \ldots + \cos(\alpha + n\beta)\,.$$

Příklad 1.2: Najděte poloměr konvergence řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mathrm{i}\, n\, z^n\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n + a^n) z^n\,.$$

Příklad 1.3: Sečtěte řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{n}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(1 - z^n)(1 - z^{n+1})}\,.$$

Příklad 1.4: Vyšetřete chování řady na hranici kruhu konvergence

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{pn}}{n}\,, \quad p \in \mathbb{N}.$$

2 Funkce komplexní proměnné

2.1 Elementární funkce

Podle definice je $\ln z = \ln r + \mathrm{i}\,\phi + 2\pi\,\mathrm{i}\,k$, kde $k \in \mathbb{Z}$ a $\mathrm{Ln}\, z = \ln r + i\phi$ je *hlavní hodnota*.

Příklad 2.1: Určete

$$\ln 4\,, \quad \ln(-1)\,, \quad \mathrm{Ln}(-1)\,, \quad \ln \mathrm{i}\,, \quad \mathrm{Ln}\,\mathrm{i}\ .$$

Příklad 2.2: Najděte chybu v odvození (Bernoulliho paradox)

$$(-z)^2 = z^2\,, \quad 2\ln(-z) = 2\ln z\,, \quad \ln(-z) = \ln z\,.$$

Příklad 2.3: Dokažte následující rovnosti (berou se všechny hodnoty odmocnin):

$$\arccos z = -\,\mathrm{i}\ln(z + \sqrt{z^2-1})\,,$$
$$\arcsin z = -\,\mathrm{i}\ln \mathrm{i}(z + \sqrt{z^2-1})\,,$$
$$\mathrm{arc\,tg}\, z = \frac{\mathrm{i}}{2}\ln\frac{\mathrm{i}+z}{\mathrm{i}-z}\,.$$

2.2 Komplexní funkce reálné a komplexní proměnné

Příklad 2.4: Určete křivky dané rovnicemi

$$z = t + \mathrm{i}\,t^2\,, \qquad -\infty < t < \infty\,,$$
$$z = t + \frac{\mathrm{i}}{t}\,, \qquad -\infty < t < 0\,,$$
$$z = \mathrm{i}\,a + at - ib\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,, \qquad a > 0\,, \quad b > 0\,.$$

Příklad 2.5: Pro funkci $w = 1/z$ najděte obrazy a vzory křivek $x = C$, $y = C$ a $|z| = R$.

Příklad 2.6: Určete obraz jednotkové kružnice $|z| = 1$ zobrazením

$$w = \frac{z}{1-z^2}\,.$$

Příklad 2.7: Jsou funkce

$$\frac{1}{1-z}\,, \quad \frac{1}{1+z^2}$$

spojité (resp. stejnoměrně spojité) uvnitř jednotkového kruhu $|z| < 1$?

2.3 Regulární a harmonické funkce

Příklad 2.8: Níže je zadána reálná část analytické funkce. Použijte Cauchy–Riemannovy podmínky a určete tvar komplexní funkce.

$$\sin x \cosh y\,, \quad \ln(x^2+y^2) - x^2 + y^2\,, \quad \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos xy\,, \quad \frac{x}{x^2+y^2}\,.$$

Příklad 2.9: Ukažte existenci analytické funkce jejíž modul ρ nebo argument θ je zadán níže ((r,φ) jsou polární souřadnice).

$$\rho = (x^2+y^2)\,\mathrm{e}^x\,, \quad \rho = \mathrm{e}^{r^2\cos 2\varphi}\,, \quad \theta = xy\,, \quad \theta = \varphi + r\sin\phi\,.$$

Příklad 2.10: Ukažte, že reálná a imaginární část analytické funkce splňuje Laplaceovu rovnici. Ukažte, že reálná část tzv. *Žukovského funkce*

$$-E\left(z - \frac{a^2}{z}\right)$$

je elektrostatickým potenciálem uzemněného vodivého nekonečného válce o poloměru a se středem v počátku souřadnic, který je umístěn ve vnějším homogenním elektrickém poli o intenzitě E orientované v kladném směru osy x.

3 Taylorova řada, Cauchyův vzorec, výpočty integrálů

Příklad 3.1: Určete Taylorovu řadu v bodě 0 a poloměr konvergence následujících funkcí:

$$\frac{\sin^2 z}{z^2}\,, \quad \ln(z^2 - 3z + 2)\,, \quad \int_0^z \frac{sinw}{w}\,\mathrm{d}\,w\,.$$

Příklad 3.2: Dokažte, že koeficienty c_n rozvoje

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

splňují pro $n \geq 2$ vztahy $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ (tzv. *Fibonacciho čísla*).

Příklad 3.3: Ověřte, že funkce $f(z) = \operatorname{Ln} z$ (hlavní hodnota) je holomorfní pro $\Re z > 0$ a lze ji tam vyjádřit jako

$$\operatorname{Ln} z = \int_1^z \frac{\mathrm{d}\, w}{w}\,.$$

Příklad 3.4: Vypočtěte

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{z}{z^*} dz\,,$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je dána jako kladně orientovaná hranice oblasti, která je dána průnikem horní poloroviny Gaussovy roviny a mezikruží s vnitřním poloměrem r, vnějším poloměrem R a středem v počátku souřadnicového systému.

Příklad 3.5: Vypočtěte integrál

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z+2)}\, \mathrm{d}\, z\,,$$

kde uzavřená křivka $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná jednotková kružnice.

Příklad 3.6: Nechť $n, k \in \mathbb{N}$ a $r > 0$. Pro křivku

$$\mathcal{C} : t \mapsto \begin{cases} r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} & \text{pro} \quad 0 \le t \le 2n\pi \\ \frac{r}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t}\right) & \text{pro} \quad 2n\pi \le t \le 2(n+k)\pi \end{cases}$$

vypočítejte index bodu $\operatorname{ind}_{\mathcal{C}} r/2$.

4 Klasifikace singularit, Laurentova řada

4.1 Klasifikace singularit

Příklad 4.1: Klasifikujte singularity následujících funkcí z:

$$z^2 \sin\frac{z}{z+1}\,, \quad \mathrm{e}^{\operatorname{cotg}\frac{\pi}{z}}\,, \quad \frac{z^2-1}{z^3-z^2+z-1}\,, \quad \frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1}\,.$$

4.2 Laurentova řada

V následujících příkladech rozviňte funkci $f(z)$ do Laurentovy řady se středem v bodě z_0:

Příklad 4.2:

$$f(z) = \frac{2z^2 - 6z - 2\,\mathrm{i}}{z(z-\mathrm{i})(z+2)}\,, \quad z_0 = 0\,.$$

Příklad 4.3:

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}\,, \quad z_0 = \mathrm{i}\,.$$

Příklad 4.4:

$$f(z) = \frac{1}{(z-a)^k}\,, \quad k \in \mathbb{N}\,, \quad z_0 = 0\,.$$

Příklad 4.5:

$$f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}\,, \quad z_0 = 0\,.$$

Příklad 4.6:

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)^2}\,, \quad z_0 = 1\,.$$

Příklad 4.7:

$$f(z) = \mathrm{Ln}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\,, \quad z_0 = 0\,.$$

5 Reziduová věta a její důsledky, výpočty integrálů

Příklad 5.1: Najděte póly následujících funkcí a spočtěte reziduum v každém pólu:

$$\frac{z+1}{z^2}\,, \quad \frac{\mathrm{e}^{-z}}{z^4}\,, \quad \frac{\sin^2 z}{z^6}\,, \quad \mathrm{cotg}\, z\,.$$

V následujících příkladech spočtěte integrály

Příklad 5.2:

$$\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z-3)(z^5-1)}\,,$$

kde po křivce obíháme jednou v kladném smyslu.

Příklad 5.3:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\,z}{\sqrt{z^2+z+1}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je kružnice $|z| = r$ obíhaná jednou v kladném směru.

Příklad 5.4:

$$\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\mathcal{C}} \frac{\mathrm{d}\,z}{(z^4+1)\sqrt{z^2+1}}\,,$$

kde $\mathcal{C}$ je parabola $y^2 = x$ v komplexní rovině, která je procházena ve směru rostoucího y.

V následujících příkladech spočtěte určité integrály. Jedná-li se o integrál nevlastní a divergující, určete jeho hlavní hodnotu (pokud tato existuje).

Příklad 5.5:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,t}{a+\cos t}\,, \quad a > 1\,.$$

Příklad 5.6:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{(x^2+4x+13)^2}\,.$$

Příklad 5.7:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+1)^n}\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad 5.8:

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^n}\,, \quad n \geq 2\,, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

Příklad 5.9:

$$\int_0^{\pi} \operatorname{cotg}(x-a)\,\mathrm{d}\,x\,,$$

kde $a = \alpha + \mathrm{i}\,\beta$.

Příklad 5.10:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\,x}{1-2p\cos x+p^2}\,,$$

kde $0 < p < 1$.

Příklad 5.11:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x \,\mathrm{d}\, x}{(x^2+4)(x-1)} \,.$$

Příklad 5.12: Spočtěte

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \cos ax \,\mathrm{d}\, x \,, \quad a>0\,, \quad 0<p<1$$

a

$$\int_0^{\infty} x^{p-1} \sin ax \,\mathrm{d}\, x \,, \quad a>0\,, \quad -1<p<1\,.$$

Pomůcka: Integrujte $\int_{\mathcal{C}} z^{p-1}\,\mathrm{e}^{-az}\,\mathrm{d}\,z$, kde $\mathcal{C}$ je uzavřená křivka v prvním kvadrantu komplexní roviny ohraničená kružnicemi o poloměrech $r \to 0$ a $R \to \infty$.

Příklad 5.13:

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x \,\mathrm{d}\, x}{x^2+a^2} \,, \quad a>0\,.$$

Příklad 5.14: Nechť $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, mz}\, F(z)$, kde $m>0$ a funkce $F(z)$ nechť má následující vlastnosti:

- má konečný počet singulárních bodů $a_1, \dots, a_n$ v horní polorovině komplexní roviny
- je analytická ve všech bodech na reálné ose s vyjímkou bodů $x_1, \dots, x_m$, kde má jednoduché póly
- $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ \Im z \geq 0}} F(z) = 0$.

Dokažte, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}\, x = 2\pi\,\mathrm{i} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mathrm{res}_{a_k} f(z) + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \mathrm{res}_{x_l} f(z) \right\},$$

kde integrál bereme ve smyslu hlavní hodnoty jak vzhledem k pólům x_l, $l = 1, \dots, m$, tak vzhledem k ∞.

Příklad 5.15:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 \,\mathrm{d}\, x}{(x^2+a^2)^2} \,, \quad a>0\,.$$

Příklad 5.16:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,, \quad a,b>0\,.$$

Příklad 5.17:

$$\int_0^\infty \frac{(x^2+1)\,\mathrm{d}\,x}{x^6+1}\,.$$

Příklad 5.18:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,\mathrm{d}\,x}{x^2+b^2}\,, \quad a,b>0\,.$$

Příklad 5.19:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin ax\,\mathrm{d}\,x}{x^2+b^2}\,, \quad a,b>0\,.$$

Příklad 5.20:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos tx\,\mathrm{d}\,x}{1+x^3}\,, \quad t\in\mathbb{R}\,.$$

Příklad 5.21:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}\,x}{x^2}\,.$$

Příklad 5.22:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x\,\mathrm{d}\,x}{x^2-2x+10}\,.$$

Příklad 5.23:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,\mathrm{d}\,x}{x(x^2+b^2)^2}\,, \quad a,b>0\,.$$

Příklad 5.24:

$$\int_0^1 \ln\left(\frac{1}{x}-x\right)\frac{\mathrm{d}\,x}{1+x^2}\,.$$

Příklad 5.25:

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(x+a)(\ln^2 x+\pi^2)}\,, \quad a>0\,.$$

6 Laplaceova transformace

Příklad 6.1: Najděte inverzní Laplaceovu transformaci funkcí

$$\frac{1}{z-\alpha}\,, \quad \frac{1}{z^n}\,, \quad \frac{z}{z^2-\alpha^2}\,, \quad \frac{z}{z^2+\alpha^2}\,,$$

kde $n \in \mathbb{N}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$.

Příklad 6.2: Využitím Laplaceovy transformace řešte diferenciální rovnici

$$y' + y = \mathrm{e}^{-t} + \sin t$$

s počáteční podmínkou $y(0_+) = 1$.

Příklad 6.3: Využitím Laplaceovy transformace řešte soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} x' + x + y &= f(t) \\ y' - 3x + y &= 0\,, \end{aligned}$$

kde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 1 \\ \mathrm{e}^{-t} & \text{pro } t \geq 1 \end{cases}$$

a počátečními podmínkami $x(0_+) = 0$ a $y(0_+) = 0$.