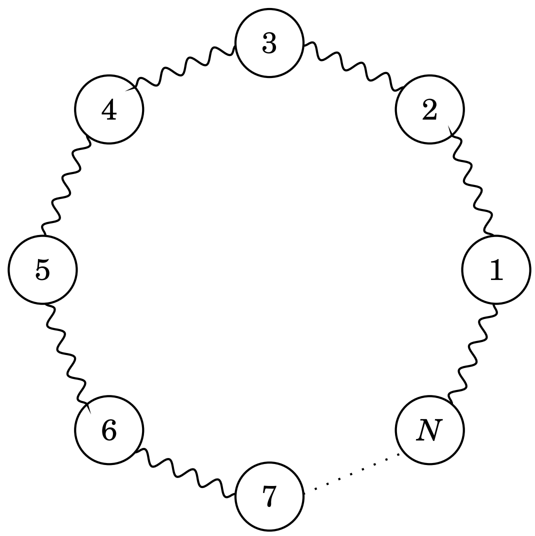
Příklady na kolokvium z variačního počtu

1. Soustava harmonických oscilátorů, její symetrie a přechod od této soustavy ke spojité struně. Tobiáš Poláček.

Uvažujme soustavu N harmonických oscilátorů: každý o hmotnosti m, jež jsou spojeny N pružinami o tuhosti k, tak, že j-tý oscilátor je spojen s $(j+1)$-ním, $j \in \{1,\dots,N-1\}$ a N-tý opět s prvním (viz obrázek 1).



Obrázek 1: Konfigurace soustavy harmonických oscilátorů

(a) Napište lagrangián a účinek pro tuto soustavu oscilátorů a napište rovněž příslušné pohybové rovnice. Využijte maticový zápis soustavy rovnic,

$$\ddot{u} = -\omega^2 A u, \tag{1}$$

kde $\omega^2 = k/m$ a u je vektor výchylek oscilátorů, A je jistá $N \times N$ matice. Můžete využít maticového zápisu i pro potenciální a kinetickou energii soustavy.

(b) Vyřešte soustavu rovnic pro $N = 3$.

(c) Uvažte symetrii soustavy oscilátorů vzhledem k otočení, které přesune první oscilátor do druhého, j-tý do $(j+1)$-ního a N-tý do prvního. Tuto symetrii vyjádřete maticí S.

(d) Skutečnost, že S je symetrií soustavy oscilátorů znamená, že je rovněž symetrií soustavy rovnic (1) a tedy platí, že rovnice

$$S\ddot{u} = -\omega^2 A S u \tag{2}$$

je stejná jako rovnice (1). Z toho plyne $SA = AS$. Ověřte to přímo.

(e) Matice S a A komutují, mají proto shodné systémy vlastních vektorů. Nalezněte vlastní hodnoty a vektory S a tím i vlastní vektory A. Uvědomte si, že $S^N = 1_N$ (jednotková matice).

(f) Ukažte, že vlastní hodnoty A jsou

$$\lambda_k = 2\left(1 - \cos\frac{2\pi k}{N}\right). \tag{3}$$

(g) Proveďte přechod $N \to \infty$ od součtů k integraci přes úhlovou souřadnici φ pro akci z (a) a získejte tím Lagrangeovu hustotu.

(h) Odvoďte a obecně řešte pohybové rovnice pro získanou Lagrangeovu hustotu.

(i) Jaký operátor v tomto spojitém případě odpovídá operátoru S a jaký zákon zachování mu odpovídá?

2. Minimální plochy v $\mathbb{R}^3$. Michal Valentík

Minimální plocha je plocha s okrajem, jejíž každý bod mimo hranici má okolí, které má minimální možnou plochu vzhledem k dané hranici tohoto okolí.

(a) Zformulujte předchozí zadání jako variační úlohu pro jistý variační funkcionál pro funkci $f(x,y)$, jejíž graf $z = f(x,y)$ popisuje plochu.

(b) Spočtěte Euler–Lagrangeovy rovnice příslušné tomuto funkcionálu a tím i nutnou podmínku pro minimální plochu.

(c) Nalezněte minimální plochu ve speciálním případě, kdy se jedná o plochu vzniklou rotací křivky kolem jisté osy.

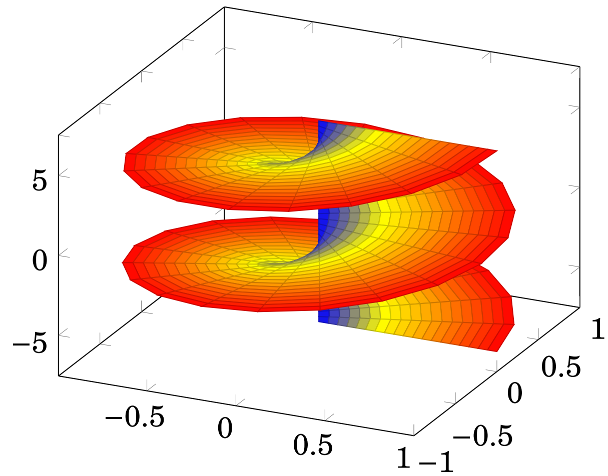
(d) Formulujte a řešte úlohu rovněž pro případ, kdy je plocha zadána parametricky jako $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

(e) Dokažte, že helikoida (viz obrázek 2) je minimální plochou. Parametrické vyjádření helikoidy (tj. její vložení do $\mathbb{R}^3$) je dáno

$$F: \quad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos a\varphi \\ r\sin a\varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \tag{5}$$

kde $a \in \mathbb{R}$ je parametr.



Obrázek 2: Závit helikoidy s parametrem $a = 1$

(f) Ukažte, že Euler-Lagrangeovy rovnice z části (d) jsou ekvivalentní požadavku, aby tzv. střední křivost H byla nulová. Střední křivost je aritmetickým průměrem obou hlavních křivostí, tedy

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2). \tag{6}$$

O střední křivosti se více dovíte na `http://en.wikipedia.org/wiki/Mean_curvature`, o hlavních křivostech potom na `http://en.wikipedia.org/wiki/Principal_curvature`.

3. Hamiltonián z lagrangiánu pomocí řešení variačního problému s vazbou. Jan Rybka

Mějme klasický variační problém, tj. hledáme minimum funkcionálu

$$\min_u \int_a^b L(x, u, u')\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

(a) Ukažte, že výše uvedenou minimalizaci (7) lze ekvivalentně popsat jako variační problém hledání minima

$$\min_{u,v} \int_a^b L(x, u, v)\,\mathrm{d}x \tag{8}$$

doplněného podmínkou $u'(x) = v(x)$.

(b) Tento problém řešte metodou Lagrangeových multiplikátorů (viz. `http://en.wikipedia.org/wiki/Lagrange_multiplier`) adaptovanou pro variační počet. Lagrangeův multiplikátor označíme $p(x)$. Hledáme tedy

$$\min_{u,v} \max_{p} \int_a^b \left[L(x,u,v) - p(u' - v)\right] \mathrm{d}x. \tag{9}$$

(c) Předchozí výraz upravte užitím metody per partes na integrand $pu' \mathrm{d}x$ a dále užijte Max-min nerovnosti `http://en.wikipedia.org/wiki/Max-min_inequality`

(d) Pro nově vzniklý funkcionál napište první variaci. (lagrangián nezávisí na u' ani v'). Získejte p a p' jako funkce u a v.

(e) Z funkcionálu vyloučete funkce p a p'. Co získáme?

(f) Vyloučete funkce u a v. Získáme tzv. duální variační problém vzniklý Legendreovou transformací.

(g) Vyloučete v a p'. Získáme Hamiltonovu formulaci variačního problému.

(h) Předchozí proveďte konkrétně pro lagrangiány příslušné harmonickému oscilátoru a také pohybu částice v homogenním poli.

(i) Na příkladech z (h) ověřte, že Legendreova transformace je involutivní (tj. její aplikace dvakrát po sobě je identita).

4. Variační funkcionál pro zobecněnou Poissonovu rovnici. Uvažujte variační funkcionál

$$\int_\Omega [\langle K(\nabla u), \nabla u\rangle - fu] \,\mathrm{d}x \tag{10}$$

pro dostatečně hladkou funkci

$$u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \tag{11}$$

$$x \mapsto u(x) \tag{12}$$

na regulární oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ve funkcionálu (10) je dále K v každém bodě x oblasti Ω lineární, symetrický a pozitivní operátor, (K je zadáno jako $n \times n$ matice funkcí na Ω), ∇ je gradient, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ značí skalární součin a f je zadaná funkce.

(a) Odvoďte Eulerovu–Lagrangeovu rovnici pro výše uvedený funkcionál (10).

(b) Jakou volbou K a f dostaneme standardní Poissonovu rovnici?

(c) Jaký je fyzikální význam K a f?

(d) Uvažte rovinný problém, tedy $n = 2$, a polární souřadnice. Dále zvolte K diagonální a závisející pouze na polární souřadnici r. Napište a obecně řešte Lagrangeovy rovnice pro tento případ. Objasněte zase fyzikální význam rovnice.

(e) Diskutujte jednoznačnost Dirichletovy úlohy pro rovnici z (a). Dirichletova úloha je rovnice (a) doplněná okrajovou podmínku $u = g$ na $\partial\Omega$.

5. Hmotná kladka a řetěz. Amin Nakhlé

Na hmotnou stacionární kladku ve tvaru bubnu o hmotnosti M a poloměru R je namotán řetěz délky ℓ, jehož délková jednotka má hmotnost μ. Soustava je umístěna v homogenním gravitačním poli. Tření v ose kladky zanedbejte. Na počátku je odvinuto délka ℓ_0 řetězu a soustavu uvolníme z klidu.

(a) Napište Lagrangián pro soustavu těles.

(b) Využijte zákon zachování k formální integraci pohybových rovnic.

(c) Vypočtěte (např. s pomocí počítače) časovou závislost polohy volného konce řetězu a úhlu otočení kladky na čase.

(d) Vypočtěte čas, za který se odvine z kladky celý řetěz.

6. Tlumené kmity v jedné, dvou a třech dimenzích modelované pomocí soustavy harmonických oscilátorů.

7. Variační počet a vyhlazování pomocí metody nejmenších čtverců a kubických splajnů. Je zadána množina bodů v kartézské rovině $\{(x_i, y_i)\}$, $i \in \{1, \ldots, N\}$. Body chceme proložit splajn, tak, aby křivka byla co nejvíce hladká. Použijte metodu nejmenších čtverců kombinovanou s minimalizací integrálu čtverce křivosti dané křivky.

8. Geodetiky na paraboloidu.

9. Geodetiky na sféře a jejich minimalita, konjugované body, Jacobiho metoda. Zdeněk Pekař

Zjistěte geodetiky na sféře, Jacobiho metodou potom určete, zda a kdy tyto geodetiky minimem funkcionálu délky. Možná bude výhodné minimalizovat odlišný ale ekvivalentní funkcionál, tzv. akci, ekvivalenci ale je třeba dokázat.

10. Ritzova variační metoda, srovnání s exaktním řešením. Samuel Peťura

Vyberte funkcionál, u něhož je možné vypočíst exaktně řešení Euler-Lagrangeových rovnic, např.

$$I[u]=\int_0^1 \mathrm{d}t\left(\tfrac{1}{2}\dot{u}^2-\tfrac{1}{2}u^2+atu\right),\quad u(0)=0,u(1)=0.$$

Toto řešení určete a dokažte, že se jedná o minimum. Následně se pokuste zjistit minimum funkcionálu Ritzovou variační metodou. Zvolte vhodnou posloupnost funkcí, pro výše uvedený funkcionál např. $u_n=t^n(1-t)$. Obě řešení porovnejte.

11. Možnost vymyšlení a navržení vlastní úlohy pro kolokvium, vyžaduje souhlas zkoušejícího.