Příklad: V unitárním prostoru komplexních $n$-tic se standardním skalárním součinem $\mathrm{U}^n$ určete matici ortogonální projekce na podprostor generovaný vektory

$$a = (1, \dots, 1), \quad b = (1, \mathrm{i}, -1, -\mathrm{i}, \dots, (\mathrm{i})^{n-1}).$$

Řešení:

1. Systém vektorů $(a, b)$ ortogonalizujeme na systém $(c, d)$, zvolme např. $c = a$ a $d = \alpha c + b$.

$$\alpha = -\frac{(b,a)}{(a,a)} a + b = \begin{cases} 0 & n = 0 \mod 4 \\ -\frac{1}{n} & n = 1 \mod 4 \\ -\frac{1+\mathrm{i}}{n} & n = 2 \mod 4 \\ -\frac{\mathrm{i}}{n} & n = 3 \mod 4. \end{cases}$$

2. Ortogonalizované vektory normujeme

$$(c, c) = n$$

$$(d, d) = \begin{cases} n & n = 0 \mod 4 \\ \frac{n^2-1}{n} & n = 1 \mod 4 \\ \frac{n^2-2}{n} & n = 2 \mod 4 \\ \frac{n^2-1}{n} & n = 3 \mod 4. \end{cases}$$

3. Spočteme matici projekce $P = (p_{kj})$.

$$p_{kj} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(c,c)}} & \frac{1}{\sqrt{(d,d)}} \left((-\mathrm{i})^{k-1} + \alpha^*\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{(c,c)}} \\ \frac{1}{\sqrt{(d,d)}} \left(\mathrm{i}^{j-1} + \alpha\right) \end{pmatrix}$$

Z toho plyne

$$p_{kj} = \begin{cases} \frac{1}{n} + \frac{1}{n}(-1)^k \mathrm{i}^{j+k} & n = 0 \mod 4 \\ \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2-1}\left[(-1)^k \mathrm{i}^{j+k} - \frac{1}{n}\left((-\mathrm{i})^{k-1} + \mathrm{i}^{j-1}\right) + \frac{1}{n^2}\right] & n = 1 \mod 4 \\ \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2-2}\left[(-1)^k \mathrm{i}^{j+k} - \frac{1}{n}\left((-\mathrm{i})^{k-1} + \mathrm{i}^{j-1} - (-\mathrm{i})^k - \mathrm{i}^j\right) + \frac{2}{n^2}\right] & n = 2 \mod 4 \\ \frac{1}{n} + \frac{n}{n^2-1}\left[(-1)^k \mathrm{i}^{j+k} - \frac{1}{n}\left(\mathrm{i}^j - (-\mathrm{i})^k\right) + \frac{1}{n^2}\right] & n = 3 \mod 4. \end{cases}$$