Riemannova a Hurwitzova ζ-funkce

Michael Krbek

1. Definice a souvislost s prvočísly. Buď $s \in \mathbf{C}$ komplexní číslo takové, že $\Re s \geq 1 + \delta$, $\delta > 0$. Potom pro $0 < a \leq 1$ definujeme ***Hurwitzovu ζ-funkci*** vztahem

$$\zeta(s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^s}. \tag{1}$$

Nekonečná řada je pro daná s i a absolutně konvergentní; tato skutečnost je zřejmá například využitím integrálního kritéria konvergence

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\mathrm{d}\, n}{(a+n)^s} \right| \;\sim\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, n}{(a+n)^{\Re s}} \;\sim\; \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}\, n}{(a+n)^{\Re s}} \;=\; \frac{a}{\Re s - 1} \;<\; \infty.$$

Riemannova ζ-funkce je speciálním případem ζ-funkce Hurwitzovy pro $a = 1$, $\zeta(s) = \zeta(s, 1)$.

Věta 1. *Platí* $\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-s}}$, *kde součin je přes všechna prvočísla* p.

Důkaz. Z definice máme

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots$$

a tedy

$$\frac{1}{2^s}\zeta(s) = \frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{8^s} + \frac{1}{10^s} + \cdots,$$

odečtením druhého výrazu od prvního máme

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\zeta(s) = 1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} + \cdots.$$

Pro další prvočísla postupujeme obdobně, dostaneme tedy nakonec

$$\dots\left(1-\frac{1}{5^s}\right)\left(1-\frac{1}{3^s}\right)\left(1-\frac{1}{2^s}\right)\zeta(s)=1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{11^s}+\frac{1}{13^s}+\cdots,$$

a protože obě strany rovnosti vždy konvergují, získáme dokazované tvrzení. (Konvergenci nekonečného součinu vyšetříme převodem na nekonečný součet pomocí funkce ln, konverguje-li absolutně nějaká posloupnost, konverguje absolutně i její libovolná podposloupnost.) ■

2. Analytické prodloužení. Definovali jsme $\zeta(s,a)$ pro $\Re s \geq 1+\delta$. Nyní využijeme metody ***analytického prodloužení*** k rozšíření definičního oboru. Analytická funkce na souvislé otevřené podmnožině $U \subset \mathbf{C}$ je určena svými hodnotami v libovolném otevřeném okolí $V \subset U$.

Napřed odvodíme integrální vzorec pro $\zeta(a,s)$.

Věta 2. *Pro* $\Re s > 1+\delta$, $0 < a \leq 1$ *platí*

$$\zeta(s,a)\Gamma(s)=\int_0^\infty \frac{x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-ax}\,\mathrm{d}\,x}{1-\mathrm{e}^{-x}}. \tag{2}$$

Důkaz. V důkazu využijeme vlastností Γ-funkce, především integrální definice

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x,$$

která rovněž platí pro $\Re s > 1+\delta$. Substitucí $t=(n+a)x$ máme

$$(a+n)^{-s}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\,t^{s-1}\,\mathrm{d}\,t=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-(n+a)x}\,x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x$$

a tedy součtem geometrické řady

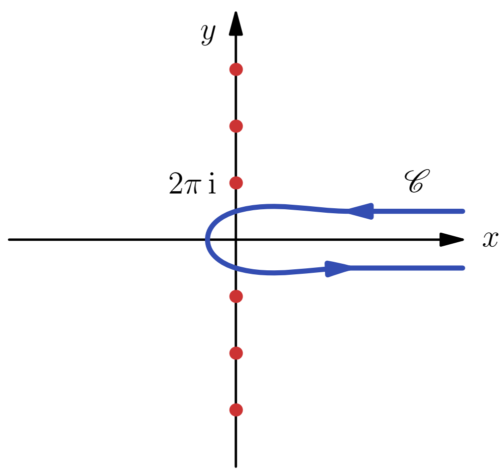
$$\zeta(s)\Gamma(s)=\sum_{n=0}^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(n+a)x}\,x^{s-1}\,\mathrm{d}\,x$$

dostaneme dokazované tvrzení. ■

Věta 3. *Platí*

$$\zeta(s,a) = \frac{\Gamma(1-s)}{2\pi\,\mathrm{i}} \int_{\mathscr{C}} \frac{(-z)^{s-1}\,\mathrm{e}^{-az}\,\mathrm{d}\,z}{\mathrm{e}^{-z}-1}, \tag{3}$$

kde $\mathscr{C}$ je libovolná křivka, která ohraničuje oblast obsahující nezápornou osu x a neobsahující póly $z = 2\pi\,\mathrm{i}\,n$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ (viz. Obrázek 1), ve výrazu $(-z)^{s-1}$ uvažujeme hlavní hodnotu argumentu.



Obrázek 1: Integrační křivka ve Větě 3

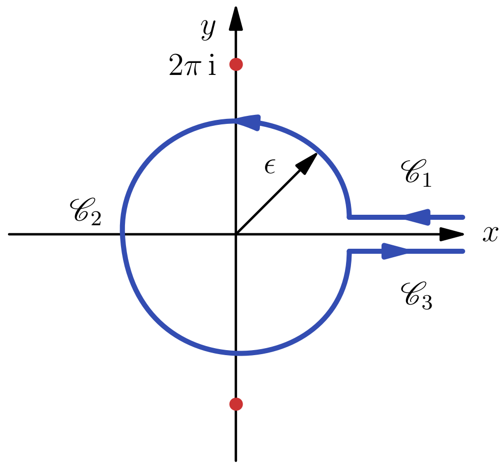
Důkaz. Integrační křivku můžeme zdeformovat podle Obrázku 2, čímž dostaneme ($\epsilon \to 0$, $\rho \to \infty$)

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{C}} \frac{(-z)^{s-1}\,\mathrm{e}^{-az}\,\mathrm{d}\,z}{1-\mathrm{e}^{-z}} &= \int_{\mathscr{C}_1} + \int_{\mathscr{C}_2} + \int_{\mathscr{C}_3} = \int_{\rho}^{\epsilon} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi(s-1)}\,t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}\,t}{1-\mathrm{e}^{-t}} + \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\,\epsilon^{s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,s\varphi}\,\mathrm{e}^{a\epsilon(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}\,\mathrm{d}\,\varphi}{1-\mathrm{e}^{\epsilon(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}} + \int_{\epsilon}^{\rho} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi(s-1)}\,t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}\,t}{1-\mathrm{e}^{-t}} = \\ &= -2\,\mathrm{i}\sin\pi s \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}\,t}{1-\mathrm{e}^{-t}}.\end{aligned}$$

Dále je možno využít vztahu

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)},$$

pomocí něhož získáme dokazované tvrzení. ■



Obrázek 2: Deformace integrační křivky v důkazu Věty 3

Věta 4. *Funkci $\zeta(s,a)$ lze analyticky rozšířit na* $\mathbf{C}\setminus\{1\}$. *V bodě $s=1$ má $\zeta(s,a)$ jednoduchý pól, platí*

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta(s,a)=1.$$

Důkaz. Integrál na pravé straně (3) dává analytickou funkci, můžeme tedy analyticky rozšířit $\zeta(s,a)$ na všechny hodnoty s kromě $s=1$. Zde je jednoduchý pól, protože zde má jednoduchý pól $\Gamma(1-s)$. Ostatní póly $\Gamma(1-s)$ v $s=\{2,3,\dots\}$ nehrají roli, zde je totiž $\zeta(s,a)$ již dobře definována pomocí (1). Dále platí

$$\lim_{s\to 1}\frac{\zeta(s,a)}{\Gamma(1-s)}=\frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{\mathscr{C}}\frac{\mathrm{e}^{-az}\,\mathrm{d}\,z}{\mathrm{e}^{-z}-1}=\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\mathrm{e}^{-az}}{\mathrm{e}^{-z}-1}=-1.$$

a $\operatorname{Res}_{s=0}\Gamma(1-s)=-1$, z toho dostaneme poslední část tvrzení. ■

3. Hermiteův vzorec. Po dokázání pomocného tvrzení odvodíme tzv. Hermiteův vzorec, který přímo zapíše $\zeta(s,a)$ pro všechny hodnoty s (kromě $s=1$).

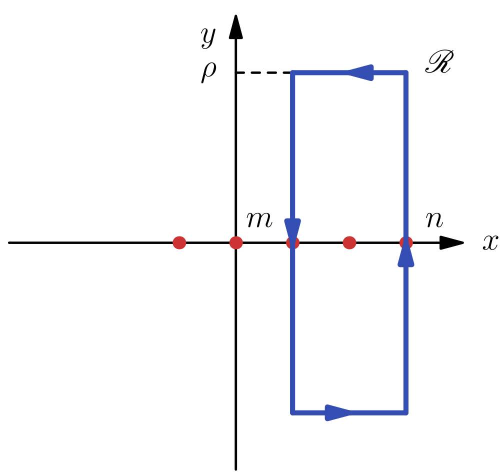
Lemma 5. *Nechť $m, n \in \mathbf{Z}$ jsou celá čísla, $f(z)$ analytická funkce, omezená na pásu $m \leq \Re z \leq n$. Pak*

$$\tfrac{1}{2}f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n-1) + \tfrac{1}{2}f(n) = \\ = \int_m^n f(z)\,\mathrm{d}\,z + \frac{1}{\mathrm{i}} \int_0^\infty \frac{f(n+\mathrm{i}\,y) - f(n-\mathrm{i}\,y) - f(m+\mathrm{i}\,y) + f(m-\mathrm{i}\,y)}{\mathrm{e}^{2\pi y} - 1}\,\mathrm{d}\,y. \tag{4}$$

Důkaz. Integrační křivku $\mathscr{R}$ vybereme podle Obrázku 3. Integrujme po ní ($\rho \to \infty$) a pomocí reziduové věty získáme

$$\int_{\mathscr{R}} \frac{f(z)\,\mathrm{d}\,z}{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,z} - 1} = \int_0^\rho \frac{f(n+\mathrm{i}\,y) - f(n-\mathrm{i}\,y) - f(m+\mathrm{i}\,y) + f(m-\mathrm{i}\,y)}{\mathrm{e}^{2\pi y} - 1}\,\mathrm{d}\,y + \\ + \int_n^m \frac{f(x+\mathrm{i}\,\rho)\,\mathrm{d}\,x}{\mathrm{e}^{2\pi(\rho - \mathrm{i}\,x)} - 1} + \int_m^n \frac{f(x-\mathrm{i}\,\rho)\,\mathrm{d}\,x}{\mathrm{e}^{2\pi(-\rho - \mathrm{i}\,x)} - 1} = 2\pi\,\mathrm{i} \sum_{j=m}^{n} \operatorname*{Res}_{z=j} \left(\frac{f(z)}{\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,z} - 1} \right),$$

přičemž v bodech m a n, kterými prochází integrační křivka, je nutno vzít polovinu rezidua. Druhý sčítanec je v limitě nulový, třetí je roven $-\int_m^n f(z)\,\mathrm{d}\,z$, vzhledem k analytičnosti $f(z)$ je integrační křivka libovolná. Po spočtení reziduí získáme dokazované tvrzení. ■



Obrázek 3: Integrační křivky v důkazu Lemmatu 5

Věta 6. *Platí*

$$\zeta(s,a) = \tfrac{1}{2}a^{-s} - \frac{a^{1-s}}{1-s} + 2\int_0^\infty \frac{(a^2+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{atg}\frac{y}{a}\right) \mathrm{d}\, y}{\mathrm{e}^{2\pi y} - 1}. \tag{5}$$

Důkaz. Lemma 5 aplikujeme na $f(z) = (a+z)^{-s}$, kde opět uvažujeme hlavní hodnotu argumentu, dále vezmeme $m = 0$, $n \to \infty$. Platí

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left[f(x+\mathrm{i}\,y) - f(x-\mathrm{i}\,y)\right] = -\left[(a+x)^2 + y^2\right]^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{atg}\frac{y}{a+x}\right).$$

Všimněme si, že limita $\lim_{x\to\infty}$ předchozího výrazu je nula. Celkem dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) - \tfrac{1}{2}f(0) = \int_0^\infty (a+z)^{-s}\,\mathrm{d}\,z + \\ + 2\int_0^\infty \frac{(a^2+y^2)^{-\frac{s}{2}} \sin\left(s \operatorname{atg}\frac{y}{a}\right) \mathrm{d}\, y}{\mathrm{e}^{2\pi y} - 1} + 0,$$

z čehož po integraci získáme dokazované tvrzení. ∎