Variační počet a jeho aplikace

Michael Krbek

Brno, 2021

revize, 29. dubna 2025

Obsah

1 Přednáška: Úvod **5**

1.1 Úřední záležitosti 5

1.2 Obsah 5

1.3 Použitá literatura 5

1.4 Přehled 6

1.5 Fyzikální příklad 6

1.6 Lokální funkcionály 8

1.7 Eulerova metoda 10

2 Přednáška: Izoperimetrický problém **12**

2.1 Základní pojmy 12

2.2 Přesná formulace a řešení problému 15

3 Přednáška: Formální teorie **17**

3.1 Základní lemmata a odvození nutné podmínky pro minimum 17

3.2 Vektorové prostory s normou a zobrazení mezi nimi 22

3.3 Spojité lineární funkcionály 23

3.4 Variace funkcionálu 24

3.5 Silné a slabé extrémy funkcionálu 25

4 Přednáška: Specializace a zobecnění předchozí úlohy **26**

4.1 Speciální typy integrandů a řešení Euler-Lagrangeovy rovnice 26

4.2 Zobecnění pro případ více závisle proměnných 30

4.3 Úloha s volnými konci 32

5 Přednáška: Nutné a postačující podmínky pro existenci minima **33**

5.1 Kvadratické funkcionály 33

5.2 Druhá variace 34
5.3 Legendreova podmínka 35
5.4 Přidružený variační problém, konjugované body 37

6 Přednáška: Invariance vůči bodovým transformacím 40
6.1 Variační derivace 40
6.2 Invariance vůči bodovým transformacím 40

7 Přednáška: Symetrie a zákony zachování 43
7.1 Symetrie a jejich prodloužení 43
7.2 Rundova-Trautmannova identita 45
7.3 Teorém Noetherové 46

8 Přednáška: Hamiltonovy kanonické rovnice 49
8.1 Legendreova transformace 49
8.2 Komplementární variační úloha 50
8.3 Hamiltonovská formulace stacionarity 52
8.4 Kvadratické hamiltoniány a lineární algebra 54

9 Přednáška: Parametrické variační problémy 57
9.1 Homogenní lagrangiány 57
9.2 Hamiltonovská formulace 59

10 Přednáška: Variační problémy s vícenásobnými integrály 63
10.1 Definice a příklady 63
10.2 První variace funkcionálu účinku 64
10.3 Rozložení teploty v obdélníkové desce 65

11 Přednáška: Ritzova variační metoda 68
11.1 Minimalizující posloupnosti funkcí 68

11.2 Ritzova metoda 69
11.3 Statika tyčí 70

1. Přednáška: Úvod

1.1. Úřední záležitosti. Předmět je hodnocen 4 kredity, podle SZŘ by tedy jeho studiu průměrný student měl věnovat $4 \times 25 = 100$ hodin svého času. Každý student vypracuje během semestru domácí úlohu a zúčastní se podle svých možností cvičení i přednášek. V průběhu semestru bude každému studentovi zadána středně složitá úloha z variačního počtu. Zadání proběhne i na základě preferencí studentů a zadání úlohy musí odsouhlasit přednášející nebo cvičící. Kolokvium proběhne formou rozpravy nad písemným řešením zadané úlohy.

1.2. Obsah. Jarní semestr 2025 má 13 týdnů, každé kapitole skript odpovídá zhruba jedna přednáška s tím, že poslední týdny lze věnovat buď předvedení zadaných úloh, nebo dalším tématům.

1.3. Použitá literatura.

- Calculus of variations, Gelfand I.M., Fomin S.V.
- A first course in the calculus of variations, Mark Kot
- Calculus of Variations, Filip Rindler
- Calculus of Variations, Jurgen Jost, Xianqing Li-Jost
- Calculus of Variations, Lev D. Elsgolc
- Calculus of Variations I., II., Mariano Giaquinta, Stefan Hildebrandt
- Calculus of Variations with Applications, George M. Ewing
- Classical Mechanics With Calculus of Variations and Optimal Control: An Intuitive Introduction, Mark Levi
- Introduction to the Calculus of Variations, Hans Sagan
- The Hamilton-Jacobi theory in the calculus of variations, Hanno Rund
- The Differential Geometry of Finsler Spaces, Hanno Rund
- Vorlesungen über Variationsrechnung, O. Bolza

– Methoden der Mathematischen Physik, Band 1 und Band 2, R. Courant, D. Hilbert

– Lehrbuch der Theoretischen Physik, Vol. 1: Mechanik, L. D. Landau and E. M. Lifschitz

– The Parsimonious Universe Shape and Form in the Natural World, Stefan Hildebrandt, Anthony Tromba

1.4. Přehled. Stručný přehled důležitých oblastí variačního počtu je uveden zde `https://en.wikipedia.org/wiki/Calculus_of_variations`.

1662	Pierre de Fermat	Princip šíření světla
1687	Isaac Newton	Optimální profil tělesa
1690	Christiaan Huygens	Traité de la lumiére
1696	Johann Bernoulli	Úloha o brachistochroně
1705	Gottfried Leibniz	Princip nejmenšího účinku
1733	Leonhard Euler	První ucelený text
1755	Joseph-Louis Lagrange	Analytická metoda
1756	Leonhard Euler	Elementa Calculi Variationum
1786	Adrien-Marie Legendre	Postačující podmínky
1835	William Hamilton	Varying action
1837	Carl Gustav Jacobi	Konjugované body
1872	Felix Klein	Grupy a geometrie
1887	Karl Weierstrass	Vorlesungengen über die Variationsrechnung
1890	Sophus Lie	Infinitezimální symetrie
1900	David Hilbert	19., 20. a 23. problém
1912	Constantin Caratheodóry	Souvislost s PDE 1. řádu
1918	Paul Finsler	Parametrické problémy
1918	Emmy Noether	Symetrie a zákony zachování
1918	Henri Lebesgue	Integrál a míra
1922	Jacques Hadamard	Evoluční úlohy
1934	Marston Morse	Globální aspekty
1936	Jesse Douglas	První Fieldsova medaile
1942	Richard Feynman	The Principle of Least Action in QM
1953	Richard Bellmann	Dynamické programování
1956	Lev Pontrjagin	Optimální kontrola

1.5. Fyzikální příklad. Při psaní první části těchto skript jsem shodou okolností seděl pod tímto rámem.

Idealizovaný řetěz, který má danou délku ℓ a hmotnost m, má konstantní hustotu. Visí ve svislé rovině xy v gravitačním poli Země, které budeme považovat za homogenní, tíhové zrychlení nechť je g. Řetěz zaujme takový tvar, aby gravitační potenciální energie soustavy Země–řetěz měla minimální možnou hodnotu. Předpokládejme, že tvar řetězu je možno vyjádřit grafem jisté funkce $y = y(x)$. Souřadnice jednoho upevněného konce řetězu označíme (a, A), souřadnice druhého upevněného konce (b, B). Délka malého kousku řetězu, jehož x-ová souřadnice nabývá hodnot v intervalu $(x, x + \mathrm{d}x)$ je z Pythagorovy věty

$$\sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Délka celého řetězu tedy potom je

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hmotnost původního malého kousku řetězu je tedy

$$\frac{m}{\ell}\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

a jeho gravitační potenciální energie je

$$\frac{mg}{\ell}y(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Celková gravitační potenciální energie U tedy závisí na funkčním předpisu $y = y(x)$ a je dána integrálem

$$U[y] = \frac{mg}{\ell}\int_a^b y(x)\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Hledaná funkce $x \mapsto y(x)$ je minimem tohoto výrazu, přičemž musí platit, že délka řetězu je neměnná.

Výše formulovaná úloha je typickou úlohou ve variačním počtu, kterému se budeme věnovat v této a dalších přednáškách. Tvar řetězu se pokusil uhodnout Galileo Galilei (hádal, že se jedná o parabolu). Odvození tvaru řetězu provedli samostatně Johann Bernoulli, Leibniz a Huygens v roce 1691 poté, co je k tomu vyzval Jakob Bernoulli.

1.6. Lokální funkcionály. Zobrazení, které funkci, jejímu grafu popř. parametrizované křivce přiřazuje reálné nebo komplexní číslo, říkáme funkcionál. Dalo by se tedy říct, že se jedná o funkci, jejímž argumentem je opět funkce. Tento koncept není důležitý jenom v matematice a přírodních vědách obecně, ale např. také v programování (viz. `https://en.wikipedia.org/wiki/Functional_programming`). Ve variačním počtu nás budou zajímat pouze tzv. lokální funkcionály, tedy takové, pro které je jejich vyjádření pro jednotlivé části grafu funkce případně části parametrizované křivky dáno součtem vyjádření pro jednotlivé části. Takové funkcionály jsou vyjádřeny pomocí integrálu. Uveďme si příklady funkcionálů:

Příklad 1 (Funkcionály). V tomto příkladu si uvedeme některé, povětšinou lokální, funkcionály.

(a) Uvažme všechny rektifikovatelné[1] křivky v rovině. S každou křivkou je spojeno reálné číslo, její délka. Délka křivky je tedy lokálním funkcionálem.

(b) Představme si, že křivka (např. v rovině) je tvořena tenkým homogenním drátem. Potom souřadnice středu hmotnosti jsou funkcionály, které ovšem nejsou lokální! Souřadnice středu hmotnosti křivky jsou totiž podílem dvou lokálních funkcionálů a takový podíl obecně nedává lokální funkcionál.

(c) Uvažme dva dané body (např. v rovině) A, B a všechny křivky, které je spojují. Předpokládejme, že bodová částice se může pohybovat podél každé z těchto křivek tak, že velikost její rychlosti je $v(x,y)$ (směr rychlosti je dán tečnou ke křivce) v bodě o souřadnicích (x,y). Dostáváme lokální funkcionál, který každé křivce přiřadí čas, za který se částice, která se po takové křivce pohybuje, dostane z bodu A do bodu B.

(d) Buď $x\colon t \mapsto x(t)$ spojitě diferencovatelná funkce na intervalu $[a,b]$. Potom klasický účinek pro částici na přímce

$$I[x] = \int_a^b \mathrm{d}t \left[\tfrac{1}{2} m \left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \right)^2 - U(x(t)) \right]$$

je lokálním funkcionálem.

[1] Křivku aproximujeme stále přesněji lomenými čarami. Pokud má každá taková posloupnost součtů délek úseček tvořících aproximace limitu, nazýváme takovou křivku rektifikovatelnou.

(e) Obecněji uvažme libovolnou funkci $y\colon x \mapsto y(x)$ a spojitou funkci tří proměnných $L(x,y,z)$. Potom

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, L\left(x, y(x), \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right),$$

kde $y(x)$ je libovolná spojitě diferencovatelná funkce na $[a,b]$, je lokální funkcionál.

V dalším budeme chtít zkoumat chování takových lokálních funkcionálů, protože tyto se často vyskytují v přírodních i jiných vědách.

Historicky prvním variačním problémem je starověký Didonin problém, též nazývaný izoperimetrický problém. První konkrétní variační problémy byly řešeny významnými matematiky koncem 17. století. Jedná se například o problém nalezení profilu projektilu, který při pohybu klade nejmenší odpor (řešeno Newtonem) a problém o brachistochroně (problém položený a vyřešený Johannem Bernoullim a vyřešený Jacobem Bernoullim, Leibnizem, von Tschirnhausem, l'Hôpitalem a jedním anonymem – Newtonem). Obecné metody řešení takových problémů vznikaly až v 18. století. Uvedeme si typické příklady takových úloh:

Příklad 2 (Variační problémy). V tomto příkladu zmíníme některé z prvních variačních problémů.

(a) Nalezněte křivku, která spojuje dva body A a B v rovině nejkratší možnou spojnicí, tj. nalezněte takovou funkci $y\colon x \mapsto y(x)$, že funkcionál

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

nabývá svého minima. Ukazuje se, že řešením je úsečka spojující body A a B.

(b) Buďte A a B dva pevné body ve svislé rovině. Čas, za který hmotný bod bez tření sklouzne z bodu A do bodu B vlivem homogenního gravitačního pole ale bez uvážení tření je lokální funkcionál a příslušná minimalizující křivka, tzv. brachistochrona, je částí cykloidy.

(c) Izoperimetrický problém v rovině. Mezi všemi rovinnými křivkami předepsané délky nalezněte křivku, která ohraničuje největší možnou plochu. Hledanou minimalizující křivkou je kružnice.

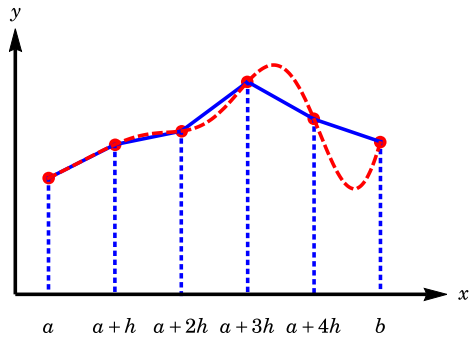
(d) Odpor prostředí při dostatečně pomalém pohybu tělesa je přímo úměrný kvadrátu velikosti rychlosti. Nalezněte tvar profilu rotačně symetrického tělesa (kolem vodorovné osy x), které se pohybuje ve směru osy x. Vypočtěte (až na kladný faktor) úbytek odporu oproti tělesu, které má tvar válce, jehož osou je osa x:

$$I[x] = \int_a^b \frac{y\mathrm{d}y}{1 + \left(\frac{\mathrm{d}x(y)}{\mathrm{d}y}\right)^2}.$$

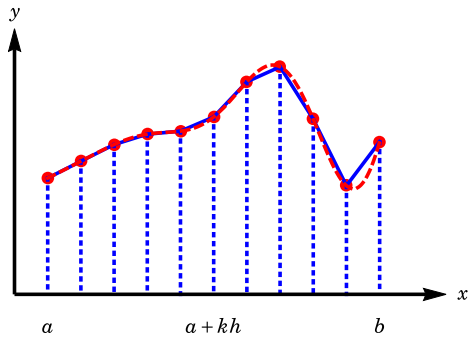
1.7. Eulerova metoda. Leonhard Euler v první polovině 18. století popsal první obecnou metodu řešení variačních problémů. Tato metoda ukazuje, jak lze za určitých okolností převést variační problémy na problémy hledání stacionárních bodů a extrémů funkce n proměnných. Uvažme funkcionál

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, L\left(x, y(x), \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right), \quad y(a) = A, y(b) = B, \tag{1}$$

kde $L(x,y,z)$ je spojitě diferencovatelná funkce tří proměnných.



Rozdělení na $n+1=5$ dílků



Rozdělení na $n+1=10$ dílků

Interval $[a,b]$ rozdělíme na $(n+1)$ stejně dlouhých podintervalů délky $h=(b-a)/(n+1)$. Okrajové body podintervalů označíme $x_0=a$, $x_k=a+kh$, $x_{n+1}=b$. Integrál nahradíme např. levým Riemannovým součtem a derivaci konečnou dopřednou diferencí. Hodnoty $y(x_0)=A$ a $y(x_{n+1})=B$ jsou dané, hodnoty $y(x_i)=y_i$, $i\in\{1,\dots,n\}$ nejsou předem určeny. Dostaneme aproximaci funkcionálu I

$$I_n(y_1,\dots,y_n) = \sum_{k=0}^{n} hL\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)$$

jako funkci n proměnných, na kterou můžeme použít analytické metody známé pro zkoumání funkcí více proměnných. Např. stacionární body I_n získáme jak známo tak, že položíme $\partial I_n/\partial y_k = 0$ pro $k\in\{1,\dots,n\}$. Počítejme

$$\begin{aligned} 0 = \frac{\partial I_n}{\partial y_\ell} = \sum_{k=0}^{n} h \Bigg[& \frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial y}\delta_{k\ell} + \frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial z}\frac{1}{h}\delta_{(k+1)\ell} - \\ & - \frac{\partial L\left(a+kh, y_k, \frac{y_{k+1}-y_k}{h}\right)}{\partial z}\frac{1}{h}\delta_{k\ell}\Bigg] = \\ = h \Bigg[& \frac{\partial L\left(a+\ell h, y_\ell, \frac{y_{\ell+1}-y_\ell}{h}\right)}{\partial y} + \frac{\partial L\left(a+(\ell-1)h, y_{\ell-1}, \frac{y_\ell-y_{\ell-1}}{h}\right)}{h\partial z} - \frac{\partial L\left(a+\ell h, y_\ell, \frac{y_{\ell+1}-y_\ell}{h}\right)}{h\partial z}\Bigg]. \end{aligned}$$

Poslední dva sčítance v hranaté závorce se dají napsat jako zpětná diference v bodě y_ℓ a dostaneme

$$\frac{1}{h}\frac{\partial I_n}{\partial y_\ell} = \frac{\partial L\left(a+\ell h, y_\ell, \frac{y_{\ell+1}-y_\ell}{h}\right)}{\partial y} - \frac{1}{h}\left[\frac{\partial L\left(a+\ell h, y_\ell, \frac{y_{\ell+1}-y_\ell}{h}\right)}{\partial z} - \frac{\partial L\left(a+(\ell-1)h, y_{\ell-1}, \frac{y_\ell-y_{\ell-1}}{h}\right)}{\partial z}\right],$$

což po provedení limitního přechodu dá podmínku pro existenci stacionárního bodu platnou za předpokladu, že všechny potřebné limity existují a funkce L je spojitě diferencovatelná.

$$\frac{\partial L\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{\partial L\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z}\right] = 0. \qquad \text{(Euler-Lagrangeova rovnice)}$$

Poznámka 1. Eulerova metoda, také nazývaná metoda konečných diferencí, převede tedy daný variační problém na problém hledání stacionárního bodu funkce n proměnných, pokud tedy interval $[a,b]$ rozdělíme na $n+1$ podintervalů. Pro fungování této metody není příliš podstatné, že všechny podintervaly mají stejnou délku. Pouze to zjednodušuje zápis a odvození. Tuto metodu lze dobře zobecnit pro větší počet závislých i nezávislých proměnných.

2. Přednáška: Izoperimetrický problém

2.1. Základní pojmy. Izoperimetrický problém je slovně zadán následovně: najděte křivku v rovině, která při dané délce ohraničuje co možná největší plochu. Toto zadání není úplně přesné; není úplně jasné, co se rozumí pojmy křivka, délka křivky, ohraničuje, atd.

Definice 1 (Jednoduchá uzavřená křivka). Rovinná křivka $c\colon [a,b]\to\mathbb{R}^2$ se nazývá *jednoduchá*, je-li c injektivní, tj. platí-li $c(s)=c(t)$ pro $a<s<b$, $a<t<b$, pak $s=t$. Rovinná křivka c se nazývá *uzavřená*, platí-li $c(a)=c(b)$.

Příklad 3 (Jednoduchost a uzavřenost křivky). Uvedeme několik příkladů týkajících se uzavřenosti, resp. jednoduchosti křivky. Další příklady se dají získat např. restrikcí, či naopak rozšířením definičního oboru.

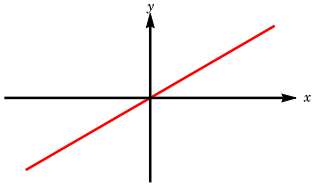
(a) Přímka $c\colon t\mapsto(t,t)$, $t\in\mathbb{R}$ je jednoduchá, ale není uzavřená.

(b) Elipsa $c\colon t\mapsto(2\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ je jednoduchá a uzavřená.

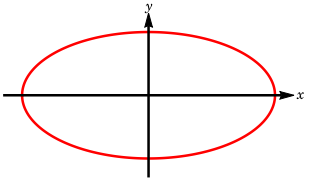
(c) Hypotrochoida

$$c\colon t\mapsto\left(2\cos t+4\cos\frac{2t}{3},2\sin t-4\sin\frac{2t}{3}\right),\quad t\in[0,6\pi]$$

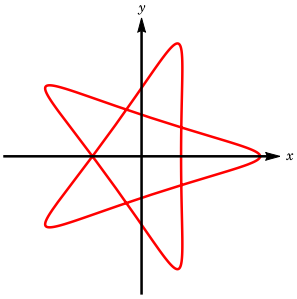
není jednoduchá, ale je uzavřená.



Přímka



Elipsa



Hypotrochoida

Definice 2 (Délka křivky, rektifikovatelnost). *Délkou* křivky $c\colon[a,b]\mapsto\mathbb{R}^2$ rozumíme

$$\ell(c)=\sup\{\sum_{i=1}^{n}d(c(t_{i-1}),c(t_i)),a=t_0<t_1<\cdots<t_i<\cdots<t_n=b\},$$

kde supremum uvažujeme pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a všechna dělení $t_0 < t_1 < \cdots < t_i < \cdots < t_n$ intervalu $[a,b]$ a $d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y}))$ je euklidovská vzdálenost dvou bodů v rovině

$$d((x,y),(\tilde{x},\tilde{y})) = \sqrt{(x-\tilde{x})^2 + (y-\tilde{y})^2}.$$

Je-li $\ell(c) < \infty$, říkáme, že křivka je *rektifikovatelná*.

Příklad 4 (Délka křivky, rektifikovatelnost). Pro po částech diferencovatelné křivky v rovině lze získat délku křivky pomocí (případně nevlastního) Riemannova integrálu. Má-li diferencovatelná křivka c parametrické vyjádření $c\colon t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$, potom její délku získáme jako

$$\ell(c) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Uvažujme změnu parametrizace křivky $\varphi\colon [a,b] \to [\varphi(a), \varphi(b)]$, diferencovatelné zobrazení s diferencovatelnou inverzí φ^{-1}, které parametrizované křivce $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ přiřadí parametrizovanou křivku $c \circ \varphi^{-1}\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \to \mathbb{R}^2$. Potom platí $\ell(c) = \ell(c \circ \varphi^{-1})$. Pro mnohé účely je výhodné parametrizovat křivku $c\colon t \mapsto (x(t), y(t))$ její délkou nebo konstantním násobkem její délky

$$s = \varphi(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}\right)^2}\,\mathrm{d}\tau.$$

(a) Kružnice $c\colon t \mapsto (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ má délku

$$\ell(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2\pi.$$

Jedná se o parametrizaci délkou, jelikož

$$s = \int_0^t \mathrm{d}\tau = t.$$

(b) Elipsa $c\colon t \mapsto (2\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$ má délku

$$\ell(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 3\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\,\mathrm{E}(\sqrt{3}),$$

kde

$$\mathrm{E}(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + k^2 \sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

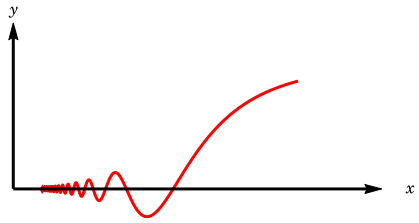
je úplný eliptický integrál gruhého druhu. Délka křivky je ($k = \sqrt{3}$)

$$s = \int_0^t \sqrt{1 + k^2 \sin^2 \tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathrm{E}(t,k),$$

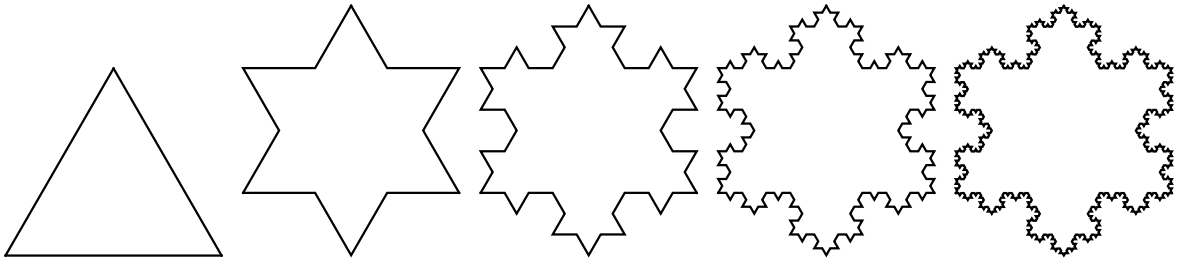
což je neúplný eliptický integrál druhého druhu a parametrizace délkou je tedy

$$s \mapsto (2\cos \mathrm{E}^{-1}(s,k), \sin \mathrm{E}^{-1}(s,k)).$$

(c) Topologova sinusovka je diferencovatelná křivka daná grafem funkce $x \mapsto x^2 \sin(1/x^2)$. Tato křivka není rektifikovatelná.



(d) Kochova vločka je uzavřená křivka zkonstruovaná iterativně počínajíc rovnostranným trojúhelníkem v rovině, kdy každou ze stran rozdělíme na tři stejné díly, potom nakreslíme rovnostranný trojúhelník se základnou danou prostředním dílem a protějším vrcholem směřujícím ven a nakonec odstraníme prostřední díl, jež tvořil základnu trojúhelníka zkonstruovaného v předchozím kroku. Kochova vločka má nekonečnou délku křivky, pokud je obvod počátečního trojúhelníka 3, pak s každou další iterací obvod vzrůstá s faktorem 4/3. Získáme geometrickou posloupnost s kvocientem větším než 1, jejíž limita je nekonečno. Křivka tedy není rektifikovatelná. Její Haussdorffova dimenze je $\ln 4/\ln 3 \approx 1{,}2618595\ldots$.



Dále budeme potřebovat vypočíst plochu $A(c)$, již uzavírá jednoduchá uzavřená rektifikovatelná křivka $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$. K výpočtu využijeme Greenovu větu

$$A(c) = \int_{A(c([a,b]))} \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{\partial A(c([a,b]))=c([a,b])} x\mathrm{d}y = \\ = -\int_{\partial A(c([a,b]))=c([a,b])} y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\partial A(c([a,b]))=c([a,b])} (x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x).$$

Nejužitečnější pro nás bude poslední rovnost, která je nejvíce symetrická. Z ní máme ihned

$$A(c) = \frac{1}{2}\left|\int_a^b \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right|.$$

Absolutní hodnotou jsme definici opatřili kvůli změně známenka plochy, při změně orientace ohraničující křivky.

Příklad 5. Následující příklady ukazují plochu uzavřenou jednoduchou křivkou.

(a) Plocha uzavřená elipsou $c\colon t \mapsto (a\cos t + b\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, je

$$A(c) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\mathrm{d}t = \pi ab.$$

(b) Plocha uzavřená Kochovou vločkou z příkladu 2 (d) je $2\sqrt{3}/5$, dostaneme ji jako součet patřičné geometrické řady.

2.2. Přesná formulace a řešení problému. Nyní jsme již připraveni formulovat izoperimetrický problém přesně a rovněž přesně popsat jeho řešení. Mezi jednoduchými uzavřenými rektifikovatelnými křivkami v rovině hledáme takovou křivku c, jež při dané délce $\ell(c)$ uzavírá maximální obsah $A(c)$. Řešení problému poskytuje následující věta:

Věta 1 (Izoperimetrická nerovnost)**.** *Buď $c\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená rektifikovatelná křivka v $\mathbb{R}^2$, označme*

$$\ell(c) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

délku této křivky a

$$A(c) = \frac{1}{2}\left|\int_a^b \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right|.$$

plochu, kterou tato křivka uzavírá. Potom platí

$$4\pi A(c) \le \ell^2(c),$$

přičemž rovnost nastává tehdy a jen tehdy, je-li c kružnice.

Důkaz (Hurwitz, 1901). Křivku reparametrizujeme tak, aby byla parametrizovaná násobkem délky oblouku v mezích $[0, 2\pi]$, nově tedy máme $c\colon t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [0, 2\pi]$ a navíc

$$\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \frac{\ell(c)}{2\pi}.$$

Reálné funkce x a y můžeme rozvinout do Fourierových řad

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \quad y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt},$$

přičemž $\overline{a_n} = a_{-n}$ a $\overline{b_n} = b_{-n}$. Potom máme

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}na_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}nb_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

Pro délku křivky dostáváme

$$\frac{\ell^2(c)}{2\pi} = \int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overline{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}\right)\mathrm{d}t = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2(|a_n|^2+|b_n|^2).$$

Dále máme

$$2A(c)=\left|\int_0^{2\pi}\left(x\overline{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}-\overline{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t\right| = 4\pi\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n\overline{b_n}\right| \le 4\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n||a_n||b_n| \le$$
$$\le 4\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|a_n||b_n| \le 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2\left(|a_n|^2+|b_n|^2\right) = \frac{\ell^2(c)}{2\pi}.$$

Celkem tedy dostáváme, že $4\pi A(c)\le\ell^2(c)$. Dále vyšetříme, kdy v nerovnostech platí rovnost. Druhá nerovnost výše přejde v rovnost pro $|n|=n^2$ a to platí pouze pro $n\in\{-1,0,1\}$ a tedy

$$x(t)=a_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+a_0+a_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\quad y(t)=b_{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}+b_0+b_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Poslední nerovnost výše přejde v rovnost pro $|a_1|=|b_1|$ a tedy $a_1=\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ a $b_1=\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$, $r>0$. První nerovnost výše přejde v rovnost pro

$$2\left|a_{-1}\overline{b_{-1}}+a_1\overline{b_1}\right| = |a_{-1}|^2+|b_{-1}|^2+|a_1|^2+|b_1|^2.$$

Odtud dostáváme $\beta=\alpha+\pi/2+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ a rovnost nastává pro křivku $c_0\colon[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ danou předpisem

$$x(t)=a_0+r\cos(t+\alpha),\quad y(t)=b_0\pm r\sin(t+\alpha),$$

což je kladně či záporně orientovaná kružnice. Zřejmě je potom $\ell(c_0)=2\pi r$ a $A(c_0)=\pi r^2$. ■

Poznámka 2. Zdánlivě zvláštní nápad použít k důkazu izoperimetrické nerovnosti v rovině Fourierovu řadu lze dobře motivovat a to využitím symetrie úlohy. Délka i plocha každé (jednoduché) uzavřené křivky parametrizované fixním násobkem délky jejího oblouku jsou invariantní vůči translacím v prostoru parametru (násobku délky oblouku). Jinými slovy: je jedno, od kterého bodu na křivce začneme měřit její délku, alespoň pro jednoduché uzavřené křivky. Teorie reprezentací této jednorozměrné abelovské Lieovy grupy translací na kružnici v prostoru parametrů je teorie Fourierových řad. Symetrie úlohy je tedy klíčem k jejímu řešení.

Poznámka 3. Zdánlivě podobná následující úloha zřejmě nemá řešení: Nalezněte jednoduchou uzavřenou křivku, která má pro danou jí ohraničenou plochu A co možná největší délku L. Např. pro vhodně naškálovanou Kochovu vločku můžeme dosáhnout nekonečné délky $L\to\infty$. Pro předem zvolenou libovolně velkou hodnotu L délky křivky vždy nalezneme dokonce hladkou křivku, která ohraničuje danou plochu A a jejíž délka je L.

3. Přednáška: Formální teorie

3.1. Základní lemmata a odvození nutné podmínky pro minimum. Napřed uvedeme varovný příklad, který je připisován Perrónovi a ilustruje nesprávnou logiku, kdy předpokládáme existenci řešení předtím, než byla dokázána.

Příklad 6 (Perrón). Nalezneme největší přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že n je ono největší číslo. Ale pro $n > 1$ platí nerovnost $n^2 > n$ a tedy n^2 je ještě větší než n, což je spor s předpokladem. Proto $n = 1$.

Podobně jsme při Eulerově metodě odvození Euler-Lagrangeovy rovnice předpokládali, že řešení existuje a až na základě jeho existence jsme odvodili podmínku, kterou musí splňovat, tj. (Euler-Lagrangeova rovnice).

Bez újmy na obecnosti budeme v dalším předpokládat, že hledáme minimum funkcionálu I, pro hledání maxima stačí vzít funkcionál $-I$ a hledat jeho minimum. To je potom maximem I. Uvažme tedy obecný lokální funkcionál

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, L\left(x, y(x), \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right),$$

a rozmysleme, pro jaké funkce $y\colon x \mapsto y(x)$ a $(x,y,v) \mapsto L(x,y,v)$ dává funkcionál smysl a zejména v jaké třídě funkcí chceme minimum funkcionálu $y \mapsto I[y]$ hledat. Je možné uvažovat o tom, že řešení $y\colon x \mapsto y(x)$ je dvakrát spojitě diferencovatelná funkce, označujeme $y \in C^2([a,b])$. To ale ihned vede k otázce, zda v nějaké širší třídě funkcí nenabývá funkcionál I ještě menší hodnoty. Můžeme třeba předpokládat, že funkce L je spojitá v y a v a měřitelná v x a funkce y je absolutně spojitá, tj. platí pro ni základní věta diferenciálního a integrálního počtu

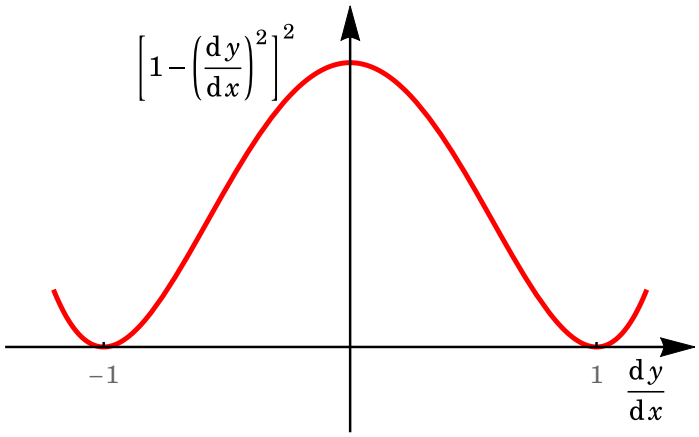
$$y(b) - y(a) = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Potom nějakou přímou metodou najdeme minimum y_0 a nakonec teprve ukážeme, že právě kvůli tomu, že se jedná o minimum, je y_0 regulárnější, např. skutečně $y_0 \in C^2([a,b])$.

Příklad 7 (Sombrero). Uvažme funkcionál

$$I[y] = \int_{-1}^{1} \left[1 - \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^2 \mathrm{d}x$$

s okrajovými podmínkami $y(-1) = y(1) = 1$, kde integrand je znázorněn v grafu níže.

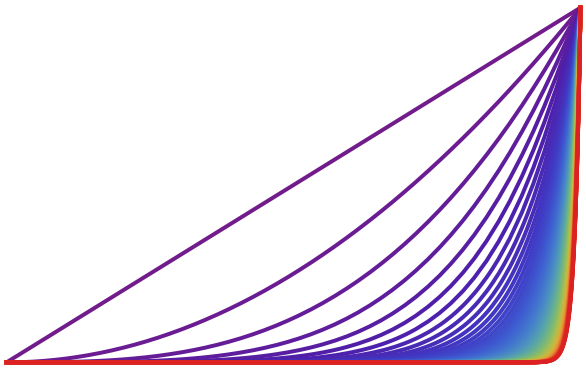


Minimum funkcionálu (rovné nule) dostaneme pro $y_0(x) = |x|$ a také pro $y_0(x) = 2 - |x|$. Ani jedna z těchto funkcí není diferencovatelná v $x = 0$. Právě takové lomené čáry jsou aproximacemi hledané funkce při Eulerově metodě řešení úlohy.

Příklad 8 (Infimum, nikoli minimum). Uvažme funkcionál

$$I[y] = \int_0^1 \mathrm{d}x \frac{y^2}{\left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$$

s okrajovými podmínkami $(a,A) = (0,0)$ a $(b,B) = (1,1)$ a posloupnost funkcí $y_k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$. Potom máme $I[y_k] = \frac{1}{k^2}$ a $\inf_{k\in\mathbb{N}} I[y_k] = 0$. Minimum pro spojitou funkci nenastane, zejména jej nezískáme řešením Euler-Lagrangeovy rovnice.



Snažme se nyní nepřímo odvodit nutnou podmínku pro existenci minima v bodě (funkci) y_0. Potom pro všechny funkce $\eta \in C_0^1([a,b])$, tj. diferencovatelné a splňující $\eta(a) = \eta(b) = 0$, a pro všechna $\epsilon \in \mathbb{R}$ musí platit

$$I[y_0 + \epsilon\eta] \geq I[y_0].$$

Dále můžeme dosadit do

$$I[y_0+\epsilon\eta]=\int_a^b L\left(x,y_0+\epsilon\eta,\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}+\epsilon\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Předpokládejme, že L, y_0 i η jsou diferencovatelné. Pro fixní η a dané y_0 je $I[y_0+\epsilon\eta]$ funkcí jedné proměnné ϵ. Stacionární bod této funkce získáme položením její derivace podle ϵ v $\epsilon=0$ za rovnou nule. Derivaci provedeme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}I[y_0+\epsilon\eta]\bigg|_{\epsilon=0}=\int_a^b\left[\frac{\partial L\left(x,y_0,\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial y}\eta+\frac{\partial L\left(x,y_0,\frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right]\mathrm{d}x=0 \tag{2}$$

a toto musí platit pro všechna přípustná $\eta\in C_0^1([a,b])$. Pro další postup budeme potřebovat základní lemmata variačního počtu.

Lemma 2 (du Bois-Reymond)**.** *Nechť $f\in C([a,b])$ je spojitá funkce a nechť pro každou jednou spojitě diferencovatelnou funkci $\eta\in C_0^1([a,b])$ s $\eta(a)=\eta(b)=0$ platí*

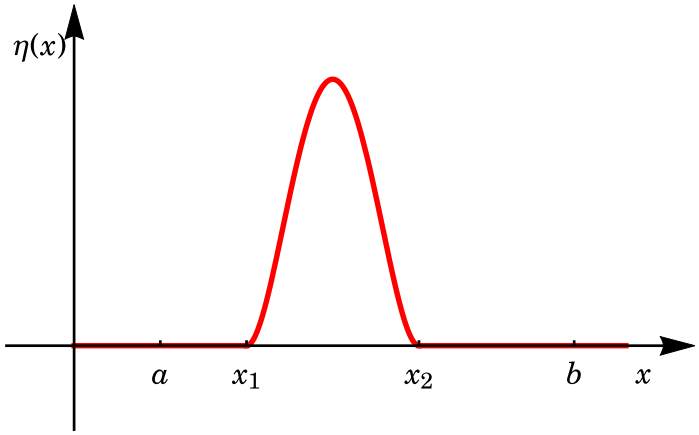
$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0. \tag{3}$$

Potom $f(x)=0$ pro všechna $x\in[a,b]$.

Důkaz. Lemma dokážeme sporem. Předpokládejme tedy, že existuje nenulová spojitá funkce f, pro kterou platí (3). Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že v nějakém bodě $x_0\in(a,b)$ je f kladná. Ze spojitosti potom plyne, že je kladná i v uzavřeném intervalu $[x_1,x_2]$ obsahujícím x_0. Definujme nyní

$$\eta(x)=\begin{cases}(x-x_1)^2(x-x_2)^2, & \text{pro } x\in[x_1,x_2]\\ 0, & \text{pro } x\notin[x_1,x_2].\end{cases}$$

Tato funkce je jednou spojitě diferencovatelná a je zobrazena níže



Dostáváme tedy

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)(x-x_1)^2(x-x_2)^2\mathrm{d}x,$$

ale druhý integrál je z funkce, která je kromě hraničních bodů kladná. Integrál z kladné funkce je kladné reálné číslo, což je spor s předpokladem. ■

Jednoduše lze ukázat i obecnější verzi lemmatu pro dvě funkce.

Lemma 3. *Nechť $f, g \in C([a,b])$ jsou spojité funkce a nechť pro každou jednou spojitě diferencovatelnou funkci $\eta \in C_0^1([a,b])$ s $\eta(a) = \eta(b) = 0$ platí*

$$\int_a^b \left[f(x)\eta(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Potom $f(x) = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$ pro všechna $x \in [a,b]$.

Důkaz. Napřed ukážeme, že pokud

$$\int_a^b f(x)\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 0,$$

pak $f(x)$ je konstantní funkce. Označme

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

střední hodnotu funkce f na intervalu $[a,b]$ a vezměme

$$\eta(x) = \int_a^x [f(\xi) - c]\,\mathrm{d}\xi.$$

Potom platí $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Podle předpokladu musí být

$$0 = \int_a^b f(x)\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)[f(x) - c]\,\mathrm{d}x = \int_a^b [f(x) - c]^2\,\mathrm{d}x.$$

Odtud je již požadované tvrzení zřejmé. Nyní položme

$$F(x) = \int_a^x f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

Integrací per partes dostaneme pro první sčítanec v integrandu

$$\int_a^b f(x)\eta(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b F(x)\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$$

a podmínku (4) tedy můžeme napsat také jako

$$\int_a^b [-F(x)+g(x)]\frac{\mathrm{d}\eta(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = 0.$$

Nyní můžeme použít tvrzení ukázané v předchozím odstavci a dostaneme

$$g(x)-F(x) = \text{konst.}$$

odkud derivováním získáme požadované lemma. ■

Poznámka 4. Poznamenejme, že pro $g \equiv 0$ dostáváme lemma 2. U funkcí f a g nemusíme požadovat spojitost, potom ale tvrzení budou platit skoro všude, tj. mimo zanedbatelnou množinu na intervalu $[a,b]$. Naopak testovací funkci η stačí vzít z množiny $C_0^\infty([a,b])$ nekonečněkrát spojitě diferencovatelných funkcí nulových v okrajových bodech intervalu.

Nyní se vraťme k úpravě rovnosti (2). Použijeme lemma 3, přičemž

$$f(x) = \frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial y} \quad \text{a} \quad g(x) = \frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z}$$

Jako nutnou podmínku existence minima tedy dostáváme opět (Euler-Lagrangeova rovnice). Můžeme také dostat Euler-Lagrangeovu rovnici v integrálním tvaru

$$\int \frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial y}\mathrm{d}x - \frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z} = \text{konst.} \tag{5}$$

Z (5) můžeme derivováním podle x získat

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial y}$$

a pomocí věty o implicitní funkci můžeme za splnění podmínky

$$\frac{\partial^2 L\left(x, y_0, \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}x}\right)}{\partial z^2} \neq 0 \tag{6}$$

v okolí stacionárního bodu vyjádřit $\mathrm{d}z/\mathrm{d}x = \mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2$ jako funkci ostatních výrazů v rovnici. Z toho nazřeme, že z je jednou spojitě diferencovatelnou funkcí a tedy y je dvakrát spojitě diferencovatelná. Celkem tedy máme následující tvrzení: Je-li jednou spojitě diferencovatelná funkce y stacionárním bodem variačního problému a platí-li (6), potom je y dvakrát spojitě diferencovatelná.

3.2. Vektorové prostory s normou a zobrazení mezi nimi. Uvažujme vektorový prostor V na tělesem $\mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$). Pro každý vektor $v \in V$ nechť je zadáno nezáporné reálné číslo $\|v\|$ splňující

(i) $\|v\| = 0$ právě, když $v = 0$,

(ii) pro všechna $a \in \mathbb{R}$ (nebo $\mathbb{C}$) platí $\|av\| = |a|\|v\|$,

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Číslo $\|v\|$ se potom nazývá normou vektoru v a vlastnosti (iii) se říká trojúhelníková nerovnost. Pomocí normy lze definovat vzdálenost (metriku) na vektorovém prostoru V vztahem $d(v,w) = \|v - w\|$.

Příklad 9 (Vektorové prostory s normou). Uvedeme příklady vektorových prostorů s normou zejména ale nejenom s ohledem na další využití ve variačním počtu.

(a) Tělesa $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{C}$ s normou danou absolutní hodnotou reálného čísla, resp. modulem komplexního čísla.

(b) Aritmetické vektorové prostory $\mathbb{R}^n$ resp. $\mathbb{C}^n$ s normou $\|\cdot\|_p$ definovanou

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \sqrt[p]{x_1^p + \cdots + x_n^p}, \quad \text{resp.} \|(z_1,\dots,z_n)\|_p = \sqrt[p]{|z_1|^p + \cdots + |z_n|^p}.$$

Zejména pro $p = 2$ dostáváme $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|$ euklidovskou normu.

(c) Ve vektorovém prostoru lineárních operátorů $A\colon V \to V$ na vektorovém prostoru V s normou $\|\cdot\|$ lze definovat normu vztahem

$$\|A\| := \sup_{\|v\|\leq 1} \|Av\|.$$

(d) Nekonečněrozměrný vektorový prostor $C([a,b])$ spojitých reálných funkcí na intervalu $[a,b]$ s normou danou

$$\|y\|_0 := \max_{x\in[a,b]} |y(x)|.$$

(e) Nekonečněrozměrný vektorový prostor $C^1([a,b])$ jednou spojitě diferencovatelných reálných funkcí na intervalu $[a,b]$ s normou danou

$$\|y\|_1 := \max_{x\in[a,b]} |y(x)| + \max_{x\in[a,b]} |y'(x)|.$$

(f) Předchozí norma se dá zobecnit pro r-krát spojitě diferencovatelné funkce, pro funkce více proměnných na kompaktní množině, pro funkce s hodnotami ve vektorovém prostoru s normou, atd.

Nyní můžeme definovat spojitost pro funkcionál. Funkce z předchozího příkladu (d), (e), (f) si můžeme představit geometricky jako body ve vektorovém prostoru.

Definice 3. Funkcionál $I: V \to \mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$) je spojitý v bodě $y_0 \in V$, pokud pro všechna $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$|I[y] - I[y_0]| < \epsilon \quad \text{pro všechna} \quad y \in V \ \text{ taková, že } \|y - y_0\| < \delta.$$

Poznámka 5. Lokální funkcionály, které nás zajímají, jsou vždy spojité vzhledem k normě (e), nemusí být nutně spojité vzhledem k normě (d) z příkladu 9. Definiční obor funkcionálu nemusí nutně být vektorovým prostorem, často bývá jen nějakou jeho podmnožinou. Tato situace je analogická situaci teorie funkcí n proměnných v matematické analýze.

3.3. Spojité lineární funkcionály. Postupně se snažíme dojít k vhodnému zobecnění chápání pojmu (nulovosti) diferenciálu funkce na funkcionály. Vhodnou cestou k tomu je pochopení diferenciálu jako nejlepší lineární aproximace funkce v daném bodě. Lineární aproximací bude v našem případě (spojitý) lineární funkcionál.

Definice 4. Buď V vektorový prostor s normou $\|\cdot\|$. Uvažme funkcionál $L: V \to \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$. L nazveme spojitým lineárním funkcionálem, splňuje-li

(i) $L(av) = aL(v)$, pro všechna $v \in V$ a $a \in \mathbb{R}$ resp. $\mathbb{C}$,

(ii) $L(v+w) = L(v) + L(w)$, pro všechna $v, w \in V$,

(iii) L je spojitý funkcionál.

Příklad 10 (Příklady lineárních funkcionálů). Uvedeme příklady spojitých lineárních funkcionálů zejména ale nejenom s ohledem na využití ve variačním počtu.

(a) Pro V konečněrozměrný vektorový prostor s libovolnou normou jsou prvky duálního prostoru V^* spojité lineární funkcionály.

(b) Uvažme vektorový prostor funkcí z příkladu 9 (d). Zvolme libovolný bod $x_0 \in [a,b]$. Potom $L: y \mapsto L[y] = y(x_0)$ je spojitý lineární funkcionál.

(c) Uvažme opět vektorový prostor funkcí z příkladu 9 (d). Potom

$$L: y \mapsto L[y] = \int_a^b y(x)\mathrm{d}x$$

je spojitý lineární funkcionál.

(d) Obecněji můžeme pro $f \in C([a,b])$ definovat lineární funkcionál

$$L: y \mapsto L[y] = \int_a^b f(x)y(x)\mathrm{d}x.$$

(e) A ještě obecněji (srovnej lemma 3) můžeme pro $f, g \in C([a,b])$ a $V = C^1([a,b])$ definovat lineární funkcionál

$$L\colon y \mapsto L[y] = \int_a^b \left[f(x)y(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} \right] \mathrm{d}x.$$

(f) Výše uvedené příklady lze zobecnit na více nezávislých (i závislých) proměnných a vyšší stupeň derivací.

3.4. Variace funkcionálu. V tomto odstavci budeme Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál I interpretovat jako variaci (tj. diferenciál nebo nejlepší lineární aproximaci) tohoto funkcionálu. Nechť $I[y]$ je funkcionál definovaný na vektorovém prostoru funkcí s normou. Přírůstek I v pevně zvoleném bodě y ve směru η je

$$\Delta I[\eta] := I[y+\eta] - I[y].$$

Pro pevně zvolenou funkci $x \mapsto y(x)$ je to (obecně nelineární) funkcionál v $x \mapsto \eta(x)$. Předpokládejme nyní, že

$$\Delta I\ [\eta] = L[\eta] + R[\eta]\|\eta\|,$$

kde $R[\eta] \to 0$ pro $\|\eta\| \to 0$. Potom je funkcionál I diferencovatelný a jeho lineární část $L[\eta]$ je lineární funkcionál nazývaný variace funkcionálu I v bodě y a označujeme ho $\delta I[\eta]$.

Věta 4. *Variace diferencovatelného funkcionálu je určena jednoznačně.*

Důkaz. (a) Napřed ukážeme, že pokud pro lineární funkcionál L je $L[\eta]/\|\eta\| \to 0$ pro $\|\eta\| \to 0$, pak $L \equiv 0$, tj. identicky nulový lineární funkcionál. Předpokládejme sporem, že $L[\eta_0] \neq 0$ pro nějaké η_0 a položme

$$\eta_n = \frac{\eta_0}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a = \frac{L[\eta_0]}{\|\eta_0\|}.$$

Z linearity L platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L[\eta_n]}{\|\eta_n\|} = \lim_{n\to\infty} \frac{L[\eta_0]}{\|\eta_0\|}\frac{n}{n} = a \neq 0.$$

Vidíme, ale že $\|\eta_n\| \to 0$ pro $n \to \infty$, a ze spojitosti L by tedy mělo platit $L[\eta_n] \to 0$ pro $\|\eta_n\| \to 0$, dostáváme spor.

(b) Dále pokračujme také sporem a předpokládejme, že

$$\Delta I\ [\eta] = L_1[\eta] + R_1[\eta]\|\eta\|, \quad \Delta I\ [\eta] = L_2[\eta] + R_2[\eta]\|\eta\|.$$

Odtud dostáváme pro rozdíl obou výrazů

$$(L_2 - L_1)[\eta] = (R_1[\eta] - R_2[\eta])\|\eta\|,$$

přičemž pravá strana splňuje požadavky (a). Odtud $L_1 = L_2$. ■

3.5. Silné a slabé extrémy funkcionálu. Minimum funkcionálu definujme v analogii s diferenciálním počtem funkcí více proměnných následujícím požadavkem.

Definice 5. Funkcionál I má minimum v bodě y_0, pokud $I[y_0+\eta]-I[y_0]>0$ v okolí y_0. Okolí můžeme uvažovat vzhledem k normě $\|\cdot\|_0$ na prostoru $C([a,b])$ z (d) příkladu 9 resp. normě $\|\cdot\|_1$ na prostoru $C^1([a,b])$ z (e) stejného příkladu. Tím rozlišíme silné resp. slabé minimum.

Každé silné minimum je zřejmě i minimem slabým. Analogickou definici lze formulovat i pro silné a slabé maximum.

Věta 5. *Nutnou podmínkou pro existenci extrému (minima nebo maxima) funkcionálu I v bodě y_0 je vymizení první variace I v y_0, tj.*

$$\delta I[\eta]=0, \quad \textit{pro všechna přípustná } \eta.$$

Důkaz. Důkaz provedeme pro minimum I v bodě y_0. Z definice variace platí

$$\Delta I[\eta]=\delta I[\eta]+R[\eta]\|\eta\|$$

a pro dostatečně v normě malé η mají $\Delta I[\eta]$ i $\delta I[\eta]$ stejné znaménko. Předpokládejme sporem, že existuje ζ tak, že $\delta I[\zeta]\neq 0$ v bodě y_0. Ale z linearity

$$\delta I[-\zeta]=-\delta I[\zeta]$$

a δI může tedy nabývat v libovolně v normě malém okolí bodu y_0 obou hodnot. To je ale ve sporu s definicí minima v y_0

$$\Delta I[\eta]=I[y_0+\eta]-I[y_0]\geq 0.$$

Pro maximum lze tvrzení dokázat analogicky. ■

Poznámka 6. Obecně se bodům, kde $\delta I=0$, říká stacionární body. Pro funkci n proměnných je postačující podmínkou pro minimum pozitivní definitnost druhého diferenciálu. Analogické postačující podmínky pro funkcionály budeme formulovat později v páté přednášce.

4. Přednáška: Specializace a zobecnění předchozí úlohy

V této části se zaměříme na hlavní metody, které nám umožní vyhnout se přímému řešení Euler-Lagrangeových rovnic a formulujeme některá vesměs zřejmá zobecnění předchozích částí.

4.1. Speciální typy integrandů a řešení Euler-Lagrangeovy rovnice. V tomto odstavci se budeme zabývat speciálními typy integrandů, které umožňují řešení Euler-Lagrangeovy rovnice pomocí tzv. kvadratur, tj. implicitním vyjádřením řešení pomocí integrálu.

(a) Integrand nezávisející na závislé proměnné $L(x,y,y') = L(x,y')$. Pomocí Euler-Lagrangeovy rovnice v integrálním tvaru (5) dostaneme ihned

$$\frac{\partial L}{\partial y'} = \text{konst.},$$

a tuto rovnici můžeme vyřešit pro y' za předpokladu, že $\partial^2 L/\partial (y')^2 \neq 0$. Řešení y potom získáme integrací.

(b) Integrand nezávisející na nezávislé proměnné $L(x,y,y') = L(y,y')$. Explicitně provedeme derivaci podle x v (Euler-Lagrangeova rovnice)

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

Po vynásobení $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ dostaneme

$$\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial (y')^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(L - \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$$

a odtud integrací

$$\frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - L = \text{konst.}$$

Další postup je podobný jako u (a) za téměř stejných předpokladů.

(c) Integrand nezávisející na derivaci $L(x,y,y') = L(x,y)$. Euler-Lagrangeova rovnice je algebraická rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0$$

a její řešení můžeme vyjádřit za předpokladu, že $\partial^2 L/\partial y^2 \neq 0$.

(d) Triviální integrand $L(x,y,y') = \frac{\mathrm{d}f(x,y)}{\mathrm{d}x}$ dává jako účinek konstantu $f(b,y(b)) - f(a,y(a))$. Přičtení takového integrandu nezmění stacionární body funkcionálu ani jejich charakter.

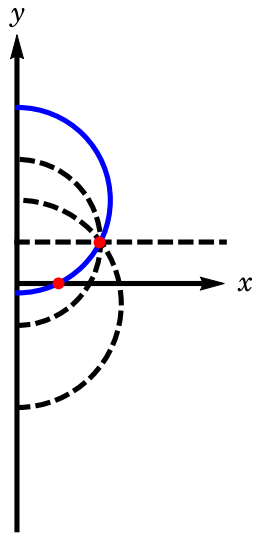
Příklad 11. V tomto příkladu uvedeme konkrétní příklady integrace Euler-Lagrangeových rovnic pro speciální tvary integrandů.

(a) Geodetiky v Killing-Poincarého polorovině (příklad neeuklidovské geometrie). Uvažme $P = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0\}$. Infinitezimální čtverec vzdálenosti dvou bodů o souřadnicích (x,y) a $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y)$ není $(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$ ale

$$\frac{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}{x^2}.$$

Geodetiky (nejkratší spojnice dvou bodů v P) vyjádřitelné jako grafy funkce $x \mapsto y(x)$, jsou potom dány jako minima funkcionálu

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x}{x},$$



což je integrand typu (a). Dostaneme

$$c = \frac{\partial L}{\partial y'} = \frac{y'}{x\sqrt{1+(y')^2}},$$

odtud úpravou

$$y' = \frac{cx}{\sqrt{1-c^2x^2}}$$

a nakonec integrací a další úpravou pro $c \neq 0$

$$x^2 + (y-d)^2 = \frac{1}{c^2}$$

a pro $c = 0$

$$y = d.$$

Geodetiky v P jsou tedy vesměs části kružnic. Např. pro $A = (1,0)$ a $B = (2,1)$ dostáváme $c = 1/\sqrt{5}$ a $d = 2$. Na obrázku vpravo je vyznačena maximálně prodloužená geodetika procházející zvolenými body A a B a také některé další geodetiky procházející bodem B.

(b) Určete křivku spojující body (a,A) a (b,B) v rovině xy, jejíž rotací kolem osy x dostaneme plochu s minimálním povrchem. Povrch plochy získané rotací je dán integrálem

$$2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x,$$

což je integrand typu (b). Až na nepodstatný faktor 2π dostáváme

$$c = \frac{\partial L}{\partial y'} y' - L = \frac{y(y')^2}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}} - y\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} = \frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}}.$$

Odtud již pro $c \neq 0$ (pro $c = 0$ máme $y = 0$)

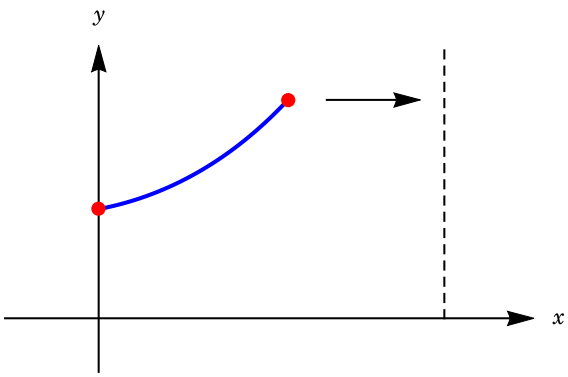
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{y^2}{c^2} - 1}$$

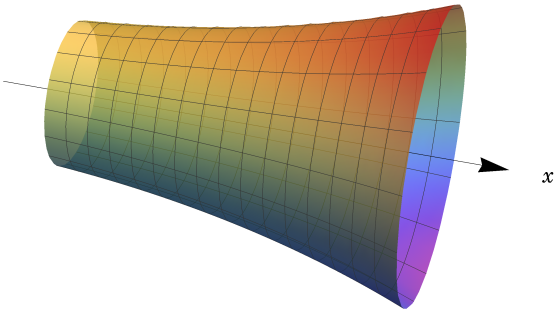
a separací proměnných následovanou integrací dostaneme

$$\frac{y}{c} = \cosh\left(\frac{x}{c} + d\right).$$

Získaná křivka je řetězovka, odpovídající rotační plocha je katenoida.

Níže je znázorněno řešení pro $(a,A) = (0,1)$, $(b,B) = (1,2)$. Pro Tuto volbu je $c \approx 0,94999\ldots$ a $d \approx 0,32307\ldots$.





Konstanty c a d určíme dosazením okrajových podmínek. Bez újmy na obecnosti zvolme $(a,A) = (0,1)$. Potom $1/c = \cosh d$ a

$$B = \frac{\cosh(d + b\cosh d)}{\cosh d}.$$

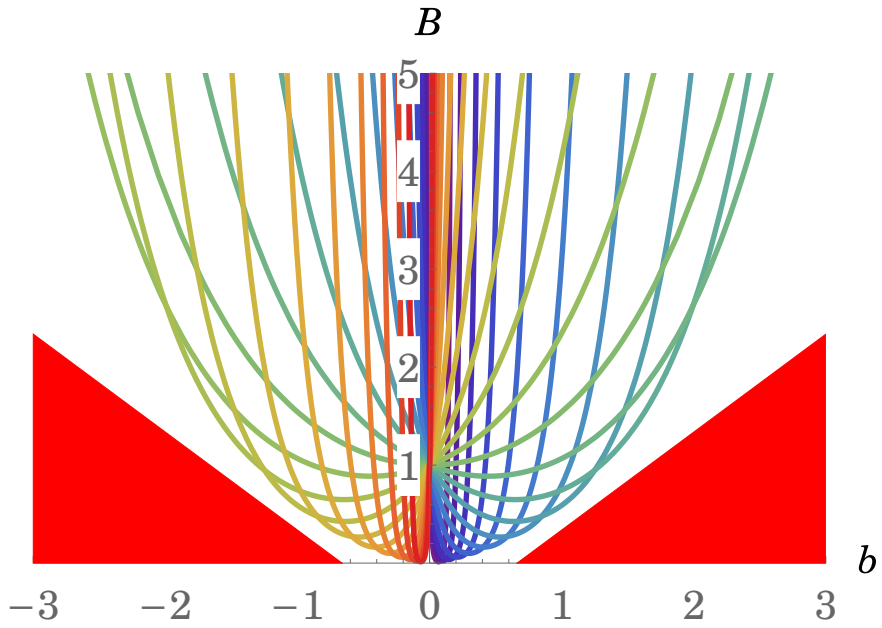
Ukážeme, že může nastat situace, kdy výše uvedená rovnice nemá řešení. Zjevně,

$$\cosh t = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \geq |t|.$$

Odtud

$$B \geq |b| - \frac{|d|}{\cosh d}.$$

Funkce $d \mapsto \frac{d}{\cosh d}$ je lichá a má kladné maximum v $d \approx 1{,}1997\ldots$ rovné $m = 0{,}66274\ldots$. Zvolíme-li tedy $|b| - B > m$, nedostaneme jistě žádné řešení. Na následujícím obrázku jsou znázorněny možné koncové body (b, B) pro $d \in [-5, 5]$, koncové body pro jednotlivá d jsou rozlišena barvami duhy. Červeně jsou vyznačeny oblasti, které jsou nedostupné již kvůli našemu jednoduchému odhadu.



Body na obálce systému řetězovek lze s bodem $(0, 1)$ spojit právě jednou řetězovkou, která ale nerealizuje globální minimum. To získáme nespojitou funkcí

$$x \mapsto y(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad x = 0, \\ 0 & \text{pro} \quad 0 < x < b, \\ B & \text{pro} \quad x = b. \end{cases}$$

Body uvnitř obálky dostupné oblasti lze s počátečním bodem $(0, 1)$ spojit dvěma různými řetězovkami. Globální minimum realizuje řetězovka, která se nedotýká obálky (ta ležící výše). Body vně obálky řetězovkou s bodem $(0, 1)$ spojit nelze a úloha pro ně nemá řešení.

(c) Vzdálenost dvou funkcí $f, g \in C([a, b])$. Pomocí normy

$$\|f\| = \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$$

můžeme definovat vzdálenost dvou funkcí jako $\|f-g\|$. Zvolme pevně jednu z funkcí, např. f a hledejme g tak, aby $\|f-g\|$ bylo minimální. Jedná se pak o integrand typu (c) a řešení je $g=f$, vzdálenost je nulová.

4.2. Zobecnění pro případ více závisle proměnných. Předchozí kapitoly lze jednoduše zobecnit pro případ, kdy lagrangián závisí na m závislých proměnných, tedy na funkcionály typu

$$I[y_1,\dots,y_m]=\int_a^b L(x,y_1(x),\dots,y_m(x),y_1'(x),\dots,y_m'(x))\mathrm{d}x.$$

pro L dostatečně hladkou (např. dvakrát spojitě diferencovatelnou) funkci $2m+1$ proměnných. Argumenty funkcionálu je m spojitě diferencovatelných funkcí $x\mapsto y_j(x)$, $j\in\{1,\dots,m\}$ pro úlohu s pevnými konci podrobených okrajovým podmínkám

$$y_j(a)=A_j,\quad y_j(b)=B_j,\quad j\in\{1,\dots,m\}.$$

Nutné podmínky pro extrém v tomto případě získáme variací všech y_j o η_j. Variaci δI získáme opět jako lineární část přírůstku

$$\Delta I\ =I[y_1+\eta_1,\dots,y_m+\eta_m]-I[y_1,\dots,y_m].$$

a kvůli nutnosti splnění okrajových podmínek musí platit $\eta_j(a)=\eta_j(b)=0$ pro všechna $j\in\{1,\dots,m\}$. Rozvojem integrandu do Taylorovy řady dostaneme pro lineární část přírůstku

$$\delta I\ =\int_a^b \mathrm{d}x\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\partial L}{\partial y_j}\eta_j+\frac{\partial L}{\partial y_j'}\eta_j'\right).$$

Tento přírůstek musí být nulový pro všechny variace η_j. Položme $\eta_j\equiv 0$ pro $j\neq k$. Potom jsme v situaci, kdy můžeme použít lemma 3 s $\eta=\eta_k$, $f=\partial L/\partial y_k$, $g=\partial L/\partial y_k'$ a pro každou volbu $k\in\{1,\dots,n\}$ dostaneme Euler-Lagrangeovu rovnici. Celkem tedy dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{\partial L}{\partial y_k}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y_k'}=0,\quad k\in\{1,\dots,n\}. \tag{7}$$

Tuto soustavu můžeme řešit spolu s okrajovými podmínkami a získáme tak nutnou podmínku pro existenci extrému.

Příklad 12 (Geodetiky na parametricky zadané ploše). . Buď $\mathbf{r}(u,v)$, $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ parametricky zadaná plocha. Křivka ležící na této ploše je dána parametricky jako $f:t\mapsto(u(t),v(t))$. Zobrazení $\mathbf{r}\circ f:\mathbb{R}\supset[a,b]\to\mathbb{R}^3$ určuje křivku ležící na parametricky zadané ploše. Pro danou plochu můžeme určit geodetiky jako minima funkcionálu

$$I[u,v]=\int_a^b \mathrm{d}t\sqrt{\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,.$$

Označme tradičně

$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

a celou odmocninu v integrandu jako H. Euler-Lagrangeovy rovnice jsou potom

$$\frac{E_u(\dot{u})^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u(\dot{v})^2}{H} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2(E\dot{u} + F\dot{v})}{H} = 0$$
$$\frac{E_v(\dot{u})^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v(\dot{v})^2}{H} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{2(F\dot{u} + G\dot{v})}{H} = 0.$$

Jako ilustraci uvažme válcovou plochu $\mathbf{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, z)$ s obvyklým označením souřadnic $u = \varphi$, $v = z$. Zde

$$E = a^2, \quad F = 0, \quad G = 1, \quad H = \sqrt{a^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}.$$

a lagrangián neobsahuje t, φ ani z, zejména je pro každou ze závisle proměnných je typu 4.1 (a). Odtud

$$\frac{\partial H}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{a^2\dot{\varphi}}{H} = \Phi, \quad \frac{\partial H}{\partial \dot{z}} = \frac{\dot{z}}{H} = Z.$$

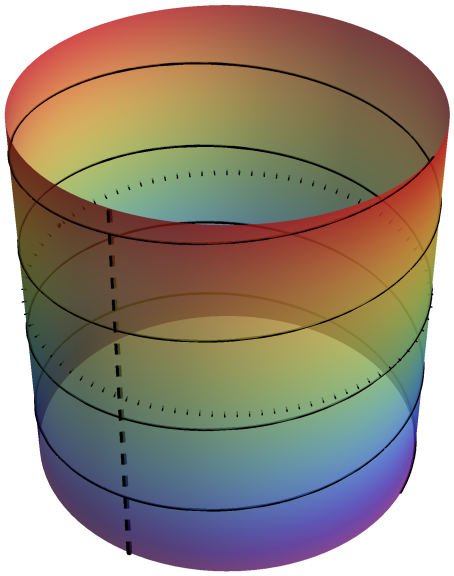
Podělením obou rovnic dostaneme

$$a^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \frac{\Phi}{Z}.$$

Řešením jsou

$$a^2 Z\ \varphi - \Phi z\ = C,$$

což jsou vesměs šroubovice (plná čára), jako speciální případ $Z = 0$ a $\Phi = 0$ dostaneme kružnice v rovině kolmé na osu válce (tečkovaně) a přímky rovnoběžné s osou válce (čárkovaně), viz obrázek níže.



4.3. Úloha s volnými konci. Pro přehlednost a jednoduchost se vraťme k situaci s jednou závisle proměnnou, zobecnění na více závisle proměnných je přímočaré. Uvažme úlohu s volnými konci, tj. nalezení minima funkcionálu

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\, L\left(x, y(x), y'(x)\right),$$

kde počáteční a koncový bod jsou volné. Provedeme variaci funkcionálu

$$\delta I \;= \int_a^b \mathrm{d}x \left(\frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\eta' \right),$$

přičemž variace η nejsou nijak omezeny. Úpravou (metodou per partes) dostaneme

$$\delta I \;= \int_a^b \mathrm{d}x\, \eta \left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \left| \frac{\partial L}{\partial y'}\eta \right|_a^b .$$

Stacionární body funkcionálu získáme z podmínky $\delta I = 0$ pro všechna η. Specielně pro $\eta(a) = \eta(b) = 0$ dostaneme opět rovnici (Euler-Lagrangeova rovnice). Pro obecné η musí vymizet i druhý sčítanec v δI, tj. musí platit

$$\frac{\partial L(a, y(a), y'(a))}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial L(b, y(b), y'(b))}{\partial y'} = 0.$$

Analogicky řešíme úlohy pouze s jedním volným koncem.

5. Přednáška: Nutné a postačující podmínky pro existenci minima

V této přednášce se budeme zabývat postačujícími podmínkami pro existenci minima. Předem zrekapitulujme, co zatím víme. Splňuje-li funkce $y\colon x \mapsto y(x)$ Euler-Lagrangeovy rovnice v integrálním tvaru (5) pro funkcionál (1), pak může být jeho slabým a tím pádem i silným minimem. Splnění Euler-Lagrangeových rovnic je tedy podmínkou *nutnou*.

5.1. Kvadratické funkcionály. Buď V vektorový prostor s normou $\|\cdot\|$. Uvažujme funkcionál $B\colon V\times V\to\mathbb{R}$. Funkcionál $B\colon (u,v)\mapsto B(u,v)$ nazýváme spojitým bilineárním funkcionálem, je-li lineárním funkcionálem $u\mapsto B(u,v)$ pro všechna pevně zvolená $v\in V$ a je-li lineárním funkcionálem $v\mapsto B(u,v)$ pro všechna pevně zvolená $u\in V$. Tento bilineární funkcionál je symetrický, platí-li $B(u,v)=B(v,u)$ pro všechna $u,v\in V$. Funkcionál $A\colon u\mapsto B(u,u)$ pak nazýváme kvadratickým funkcionálem. Kvadratický funkcionál A je pozitivně definitní, platí-li $A(u)>0$ pro všechna $u\neq 0$.

Příklad 13. Uvedeme si příklady bilineárních a kvadratických funkcionálů zejména s ohledem na pozdější použití. Obecně platí $B\in\bigodot^2 V^*$, tj. bilineární funkcionály leží v druhé symetrické tenzorové mocnině duálního prostoru. Je-li V konečněrozměrný vektorový prostor, jsou všechny tyto funkcionály spojité vzhledem k libovolné normě. Toto neplatí pro nekonečněrozměrná V.

(a) Je-li V konečněrozměrný vektorový prostor, (e_i) jeho báze. Potom $u=u^i e_i$, $v=v^i e_i$ a každý bilineární funkcionál lze zapsat jako

$$B(u,v)=B_{ij}u^i v^j.$$

Funkcionál B je symetrický, platí-li $B_{ij}=B_{ji}$. Hlavním příkladem je skalární součin. Jemu příslušný kvadratický funkcionál je

$$A(u)=B_{ij}u^i u^j$$

a nazýváme jej kvadratickou formou, příkladem je čtverec euklidovské normy.

(b) Výraz

$$B[y,z]=\int_a^b y(x)z(x)\mathrm{d}x$$

je bilineární funkcionál na prostoru $C([a,b])$ spojitých funkcí na intervalu $[a,b]$. Příslušný kvadratický funkcionál je

$$A[y]=\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x.$$

(c) Obecněji můžeme vzít

$$B[y,z]=\int_a^b \alpha(x)y(x)z(x)\mathrm{d}x,$$

kde $\alpha\in C([a,b])$. Pro $\alpha(x)>0$, $x\in[a,b]$ je příslušný kvadratický funkcionál

$$A[y]=\int_a^b \alpha(x)y^2(x)\mathrm{d}x$$

pozitivně definitní.

(d) Ještě obecněji můžeme uvažovat výraz

$$A[y]=\int_a^b \left[\alpha(x)y^2(x)+\beta(x)y(x)\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}+\gamma(x)\left(\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]\mathrm{d}x,$$

což je kvadratický funkcionál v prostoru funkcí $C^1([a,b])$.

(e) Výraz

$$B[y,z]=\int_a^b \mathrm{d}t\int_a^b \mathrm{d}s\; K(s,t)y(s)z(t)$$

je bilineární funkcionál s jádrem K, pevnou to integrovatelnou funkcí dvou proměnných. Vezmeme-li $z=y$, dostaneme příslušný kvadratický funkcionál.

5.2. Druhá variace. Obdobně jako jsme ve třetí přednášce zavedli (první) variaci funkcionálu I, zavedeme pomocí přírůstku ΔI i druhou variaci. Řekneme, že funkcionál I je dvakrát diferencovatelný, můžeme-li jeho přírůstek v bodě y_0 napsat jako

$$\Delta I[\eta]=L[\eta]+A[\eta]+R[\eta]\|\eta\|^2, \tag{8}$$

kde $R[\eta]\to 0$ pro $\|\eta\|\to 0$, přičemž L je lineární funkcionál a A je kvadratický funkcionál. Tento kvadratický funkcionál A nazýváme druhou variací funkcionálu I a značíme $\delta^2 I[\eta]$ a jednoznačnost dokážeme obdobně jako pro první variaci. V dalším budeme předpokládat, že druhá variace existuje.

Věta 6. *Nutnou podmínkou pro to, aby funkcionál I měl minimum v bodě y_0 je kromě věty 5 také nezápornost druhé variace v bodě y_0*

$$\delta^2 I\,[\eta]\geq 0,\quad \textit{pro všechna přípustná } \eta.$$

Pro maximum analogicky platí věta se znaménkem $\leq$.

Důkaz. Podle definice máme

$$\Delta I[\eta] = \delta I[\eta] + \delta^2 I[\eta] + R[\eta]\|\eta\|^2,$$

ale ve stacionárním bodě je $\delta I = 0$ a proto

$$\Delta I[\eta] = \delta^2 I[\eta] + R[\eta]\|\eta\|^2. \tag{9}$$

Pro dostatečně malé $\|\eta\|$ bude tedy znaménko přírůstku $\Delta I[\eta]$ shodné se znaménkem druhé variace $\delta^2 I[\eta]$. Předpokládejme nyní sporem, že existuje ζ tak, že $\delta^2 I[\zeta] < 0$. Pak platí i

$$\delta^2 I[\alpha\zeta] = \alpha^2 \delta^2 I[\zeta] < 0, \quad \text{pro } \alpha \neq 0.$$

Tím pádem, zvolíme-li dostatečně velké α, můžeme pravou stranu rovnice (9) učinit zápornou pro $\eta = \alpha\zeta$. To je ale v rozporu s definicí minima, kdy přírůstek musí být nezáporný. ■

Podmínka daná větou 6 je nutná, ale samozřejmě není postačující. Abychom mohli formulovat postačující podmínku, zaveďme pojem silné pozitivní definitnosti pro kvadratický funkcionál A: existuje $\beta > 0$ tak, že $A[\eta] \geq \beta\|\eta\|^2$.

Věta 7. *Postačující podmínkou pro to, aby funkcionál I měl minimum v bodě y_0, je nulovost první variace $\delta I = 0$ v bodě y_0 a silná pozitivní definitnost druhé variace $\delta^2 I$ v bodě y_0. Obdobně můžeme větu formulovat pro maximum.*

Důkaz. Obdobně jako v důkazu předchozí věty máme

$$\Delta I[\eta] = \delta^2 I[\eta] + R[\eta]\|\eta\|^2 \geq \big(\beta + R[\eta]\big)\|\eta\|^2,$$

kde $R[\eta] \to 0$ pro $\|\eta\| \to 0$. Pro η splňující $|R[\eta]| < \beta/2$, tj. např. $\|\eta\| < \epsilon$, máme tedy

$$\Delta I[\eta] \geq \tfrac{\beta}{2}\|\eta\|^2 > 0.$$

■

5.3. Legendreova podmínka. Odvoďme vzorec pro druhou variaci funkcionálu v nejjednodušším případě úlohy (1) s pevnými konci. Buď $L(x,y,z)$ lagrangián se spojitými parciálními derivacemi až do řádu tři, vzhledem ke všem svým argumentům. Zapišme přírůstek I v bodě y_0 pomocí Taylorovy řady se zbytkem

$$\Delta I\ [\eta] = I[y_0+\eta] - I[y_0] = \int_a^b \big(L_y\eta + L_{y'}\eta'\big)\,\mathrm{d}x + \tfrac{1}{2}\int_a^b \big[\tilde{L}_{yy}\eta^2 + 2\tilde{L}_{yy'}\eta\eta' + \tilde{L}_{y'y'}(\eta')^2\big]\,\mathrm{d}x,$$

kde

$$\begin{aligned}
\tilde{L}_{yy} &= L_{yy}(x, y+\theta\eta, y'+\theta\eta'), && 0 \le \theta < 1,\\
\tilde{L}_{yy'} &= L_{yy'}(x, y+\theta\eta, y'+\theta\eta'), && 0 \le \theta < 1,\\
\tilde{L}_{y'y'} &= L_{y'y'}(x, y+\theta\eta, y'+\theta\eta'), && 0 \le \theta < 1.
\end{aligned}$$

Poslední sčítanec můžeme zapsat pomocí

$$\delta^2 I[\eta] = \int_a^b \left[L_{yy}\eta^2 + 2L_{yy'}\eta\eta' + L_{y'y'}(\eta')^2\right] \mathrm{d}x$$

a zbytku $R[\eta]$, který konverguje k nule rychleji než $\|\eta\|_1^2$. Prostřední sčítanec v integrandu druhé variace upravíme per partes

$$\int_a^b L_{yy'} 2\eta\eta' \mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(L_{yy'}\right)\eta^2 \mathrm{d}x.$$

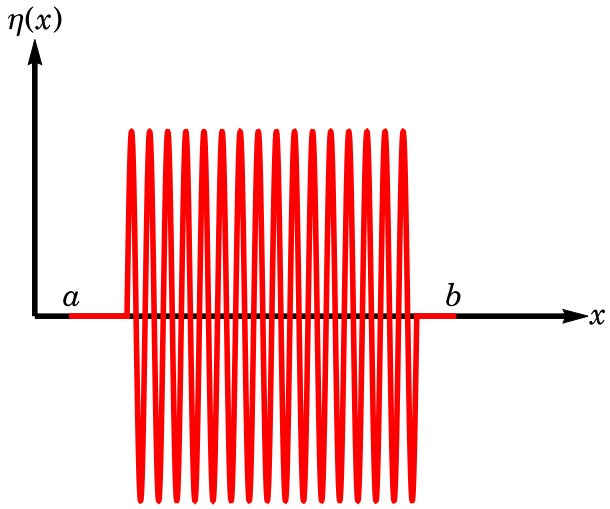
Tím dostaneme

$$\delta^2 I[\eta] = \int_a^b \left[P(x)(\eta')^2 + Q(x)\eta^2\right] \mathrm{d}x, \tag{10}$$

kde

$$P = P(x) = L_{y'y'}, \quad Q = Q(x) = \left(L_{yy} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L_{yy'}\right).$$

Nyní můžeme podmínku nezápornosti druhé variace $\delta^2 I[\eta] \ge 0$ vyjádřit i jinak. Uvažme (10) pro $\eta(a) = 0$. Pak pokud η' je malé na $[a,b]$, je i $\eta(x) = \int_a^x \eta' \mathrm{d}x$ malé. Naopak to samozřejmě neplatí a můžeme zkonstruovat malé η s velkou derivací η', jak ukazuje např. následující obrázek.



Z toho plyne, že sčítanec $P(x)(\eta')^2$ v integrandu hraje v druhé variaci podstatnější roli, než sčítanec $Q(x)\eta^2$.

Zformulujeme nyní tzv. Legendreovu podmínku pro minimum funkcionálu

$$P(x) = L_{y'y'} \geq 0. \tag{11}$$

Věta 8. *Legendreova podmínka je pro existenci minima nutná.*

Důkaz. Předpokládejme, že $P < 0$ a uvažme $\eta_n(x) = \sin n\pi \frac{x-a}{b-a}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom vždy nalezneme n takové, aby kvadratický funkcionál $A[\eta_n] = \delta^2 I[\eta_n]$ byl záporný, ať už je $Q(x)$ jakékoliv. Máme totiž

$$\delta^2 I[\eta_n] = \int_a^b \left[P(x)(\eta_n')^2 + Q(x)\eta_n^2\right] \mathrm{d}x \leq -\frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} \int_a^b |P(x)| \mathrm{d}x + \int_a^b |Q(x)| \mathrm{d}x$$

Zřejmě pro dostatečně velké n bude první sčítanec o tolik menší než druhý, že celkový výraz bude záporný. To je ale spor s požadavkem, aby přírůstek z minima byl vždy kladný. ■

5.4. Přidružený variační problém, konjugované body. V předchozím odstavci jsme ukázali, že pro zjištění minima nejjednoduššího variačního problému musíme analyzovat kvadratický funkcionál (10) podrobený okrajovým podmínkám $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Tento problém se nazývá přidružený variační problém. Napíšeme Euler-Lagrangeovu rovnici pro funkcionál (10), dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(P\eta'\right) - Q\eta = 0. \tag{12}$$

Dále budeme předpokládat, že $P(x) > 0$ na $[a,b]$ i okrajovou podmínku na $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Vzniklá rovnice je zároveň linearizací původní Euler-Lagrangeovy rovnice v bodě $y = y_0$.

Definujeme konjugovaný bod $\tilde{a} \in (a,b)$ k bodu a tak, že předchozí Euler-Lagrangeova rovnice (12) má netriviální řešení η, pro které $\eta(a) = \eta(\tilde{a}) = 0$.

Dále definujeme tzv. Jacobiho podmínku, která říká, že interval (a,b) nesmí obsahovat žádný konjugovaný bod k bodu a. Nyní jsme již s to zformulovat nutnou a zároveň postačující podmínku pro existenci minima funkcionálu. Za tím účelem zformulujeme a dokážeme důležitou pomocnou větu týkající se pozitivní definitnosti kvadratických funkcionálů.

Věta 9. *Pokud kvadratický funkcionál A z* (10) *s okrajovými podmínkami $\eta(a) = \eta(b) = 0$ splňuje Legendreovu podmínku $P > 0$ na $[a,b]$ a Jacobiho podmínku neexistence konjugovaného bodu $\tilde{a}$ k a v intervalu (a,b), potom je variační funkcionál A pozitivně definitní, tj. $A[\eta] > 0$ pro všechna přípustná $\eta \neq 0$. Zejména je $\eta = 0$ minimem A.*

Důkaz. Zaveďme skalární součin na prostoru přípustných funkcí vztahem

$$(\eta, \zeta) = \int_a^b \eta(x)\zeta(x) \mathrm{d}x.$$

Stačí ukázat, že minimum kvadratického operátoru A na prostoru nenulových přípustných funkcí normovaných jako $(\eta,\eta)=1$, je kladné, tj.

$$\min_{(\eta,\eta)=1} A[\eta] > 0, \quad \text{pro } \eta(a)=\eta(b)=0.$$

Integrujme per partes

$$\int_a^b \left[P(\eta')^2 + Q\eta^2\right] \mathrm{d}x = \int_a^b \left[-\left(P\eta'\right)' + Q\eta\right] \eta \mathrm{d}x = (D\eta,\eta),$$

kde D je samosdružený lineární diferenciální operátor

$$D : \eta \mapsto -\left(P\eta'\right)' + Q\eta.$$

Minimum kvadratického funkcionálu A je realizováno vlastními vektory příslušným nejmenší vlastní hodnotě (vlastní hodnoty jsou nutně reálné, vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé) a tato vlastní hodnota je příslušným minimem.

Stačí tedy dokázat, že všechny vlastní hodnoty operátoru D jsou kladné. Vlastní vektor je určen vždy až na násobek, této volnosti využijeme k volbě $\mathrm{d}\eta(a)/\mathrm{d}x = 1$. Jacobiho podmínka říká, že řešení úlohy

$$D\eta = 0, \quad \eta(a) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}\eta(a)}{\mathrm{d}x} = 1$$

nemá na intervalu (a,b) žádné nulové body. ■

Příklad 14 (Harmonický oscilátor). Vezměme úlohu s pevnými konci

$$I[y] = \tfrac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}x \left[\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \omega^2 y^2\right], \quad y(a)=A, y(b)=B.$$

Euler-Lagrangeova rovnice je pro kvadratický lagrangián lineární, dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 y = 0, \quad y(a)=A, y(b)=B, \omega > 0,$$

jejíž obecné řešení je

$$y(x) = \alpha\cos\omega x + \beta\sin\omega x.$$

Druhá variace funkcionálu je

$$\delta^2 I[\eta] = \tfrac{1}{2}\int_a^b \mathrm{d}x \left[\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}\right)^2 - \omega^2 \eta^2\right], \quad \eta(a)=0, \eta(b)=0.$$

Přidružený lagrangián je pro kvadratický funkcionál shodný s původním lagrangiánem. Legendreova podmínka je splněna. Jacobiho podmínka požaduje, aby přidružená Euler-Lagrangeova rovnice neměla na intervalu $[a,b]$ řešení, tj.

$$\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2\eta = 0, \quad \eta(a)=0, \frac{\mathrm{d}\eta(a)}{\mathrm{d}x} = 1$$

Řešení dostaneme ve tvaru

$$\eta(x) = \frac{\sin \omega(x-a)}{\omega}$$

a chceme, aby $\eta(x) > 0$ pro všechna $x \in [a,b]$. Odtud dostáváme podmínku

$$\omega < \frac{\pi}{b-a}.$$

6. Přednáška: Invariance vůči bodovým transformacím

Jednou z výrazných vlastností formalizmu variačního počtu je nezávislost na volbě křivočarých souřadnic, tj. vůči bodovým transformacím. Invarianci funkcionálu a jemu příslušných Euler-Lagrangeových rovnic vůči těmto transformacím dokážeme pomocí pojmu variační derivace. Zejména kvůli jednoduchosti zápisu vše provedeme pro jednu závislou proměnnou, zobecnění na více závislých proměnných je přímočaré. Podotkněme, že funkcionály a jim příslušné Euler-Lagrangeovy rovnice jsou invariantní vůči striktně větší množině transformací, tzv. kontaktním transformacím.

6.1. Variační derivace. Nechť $I[y]$ je funkcionál a proveďme jeho variaci pomocí funkce η tak, že $\eta(x) \neq 0$ pouze v okolí bodu x_0. Uvažme přírůstek $\Delta I = I[y+\eta] - I[y]$ a vydělme jej plochou ΔS uzavřenou mezi grafy funkcí $y+\eta$ a y. Limitním přechodem, pokud limita existuje, dostaneme

$$\left.\frac{\delta I}{\delta y}\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta I}{\Delta S}$$

tzv. variační derivaci I. Zjevně platí

$$\Delta I \ = \left(\left.\frac{\delta I}{\delta y}\right|_{x=x_0} \Delta S \ + R\|\eta\|\right)$$

a limitně můžeme psát $\delta I = \left.\frac{\delta I}{\delta y}\right|_{x=x_0} \delta S$.

6.2. Invariance vůči bodovým transformacím. Uvažujme regulární bodovou transformaci souřadnic danou jako

$$x = x(u,v), \quad y = y(u,v), \quad \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \neq = 0 \tag{13}$$

a variační funkcionál

$$I[y] = \int_a^b \mathrm{d}x \, L\left(x, y(x), \frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\right).$$

Bodovou transformací (13) tento funkcionál přejde ve funkcionál

$$J[v] = \int_c^d \left((x_u + x_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)\mathrm{d}u \ \ L\left(x(u,v), y(u,v), \frac{y_u + y_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}}{x_u + x_v \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}}\right) = \int_c^d \mathrm{d}u \ \ K\left(u, v(u), \frac{\mathrm{d}v(u)}{\mathrm{d}u}\right).$$

Nyní ukážeme, že splňuje-li $x \mapsto y(x)$ Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)} = 0,$$

potom $u \mapsto v(u)$ splňuje příslušné Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\partial K}{\partial v} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{\partial K}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u}\right)} = 0.$$

Buď $y+\eta$ variace příslušná $I[y]$, ΔS plocha uzavřená mezi grafem $y+\eta$ a y a $v+\zeta$ variace příslušná $J[v]$, ΔT plocha uzavřená mezi grafem $v+\zeta$ a v. Potom limita podílu

$$\lim_{\Delta T\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta T} = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}$$

je rovna jacobiánu transformace a je podle předpokladu nenulová. Potom z toho, že platí

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{I[y+\eta]-I[y]}{\Delta S} = 0$$

plyne i

$$\lim_{\Delta T\to 0}\frac{J[v+\zeta]-J[v]}{\Delta T} = 0.$$

Skutečnost, že křivka je stacionárním bodem, tedy nezávisí na volbě soustavy souřadnic. Toho lze často s výhodou využít při řešení konkrétních problémů.

Příklad 15. Uvažme šíření světelných paprsků v rovinném prostředí, kde index lomu závisí lineárně na vzdálenosti od pevně zvoleného bodu, který zvolíme jako počátek soustavy souřadnic. Dráhy paprsků zjistíme na základě Fermatova principu, který v tomto případě říká, že musíme hledat stacionární body funkcionálu

$$I[y] = \int_a^b \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Provedeme přechod do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

a budeme uvažovat transformovaný funkcionál

$$J[\varphi] = \int_c^d r\,\mathrm{d}r\sqrt{1+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)^2}.$$

jehož stacionární body jsou shodné se stacionárními body I, ale je typu 4.1 (a). Proto platí

$$C = \frac{\partial K}{\partial\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)} = r\frac{r^2\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}}{\sqrt{1+r^2\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)^2}}.$$

Odtud můžeme již vyjádřit

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} = \frac{\frac{C}{r^3}}{\sqrt{1-\left(\frac{C}{r^2}\right)^2}},$$

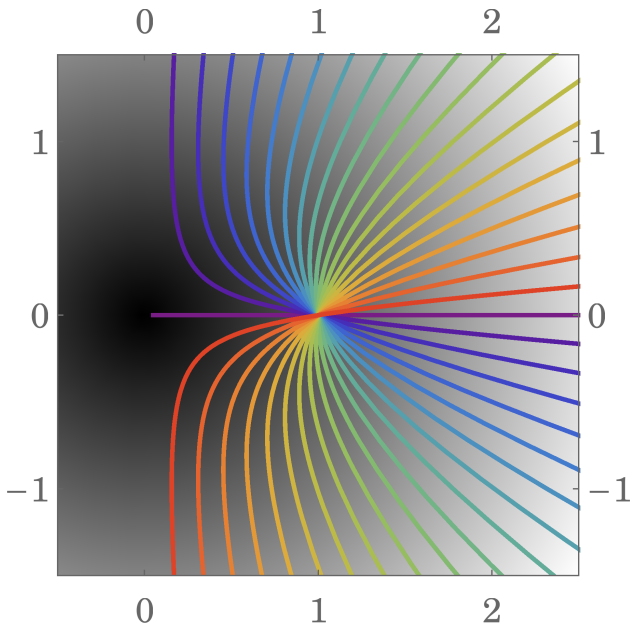
což můžeme substitucí $s = C/r^2$ a následnou separací proměnných a integrací vyřešit. Výsledek je

$$r^2\sin(2\varphi+\alpha) = C,$$

což zpětným převodem do kartézských souřadnic dává implicitní rovnici

$$2xy\cos\alpha + (x^2-y^2)\sin\alpha = C.$$

Na obrázku níže jsou znázorněny některé geodetiky procházející bodem $(1,0)$, vesměs se jedná o hyperboly.



7. Přednáška: Symetrie a zákony zachování

Souvislost symetrií a zákonů zachování je jedním z důležitých objevů 20. století. V plné obecnosti byla objasněna Emmy Noetherovou[2]. Z filosofického hlediska je důležitá proto, že idetifikuje běžné fyzikální veličiny jako je energie soustavy částic, její hybnost nebo moment hybnosti jako zachovávající se veličiny pro jisté lagrangiány.

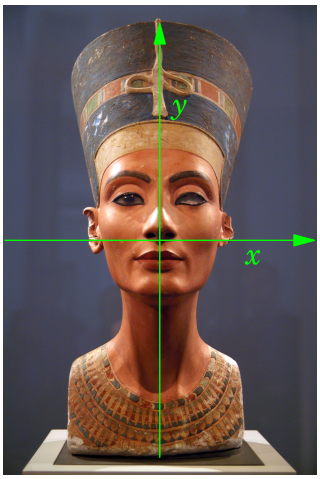
7.1. Symetrie a jejich prodloužení. Symetrií v prostoru závislých a nezávislých proměnných rozumíme tzv. jednoparametrickou grupu transformací v tomto prostoru. Je vhodné učinit následující definice. Akcí grupy G s jednotkou e na množině M rozumíme zobrazení $G \times M \to M$, $(g,m) \mapsto g \cdot m$ splňující následující požadavky:

(i) $e \cdot m = m$,

(ii) $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$.

Příklad 16 (Příklady akcí grup na množinách). Uvedeme základní příklady akcí grup na množinách s ohledem na pozdější využití.

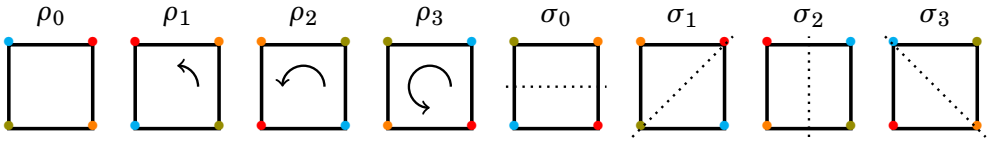
(a) Akce grupy zrcadlení vzhledem k dané přímce v rovině či rovině v prostoru. Níže vidíme symetrickou bystu Nefertiti.



[2]

(b) Akce cyklické grupy $\mathbb{Z}/(n\mathbb{Z})$ zbytků při dělení n na třídách ekvivalence při dělení n. Konkrétní realizací jsou například rotační symetrie pravidelného n-úhelníka v euklidovské rovině.

(c) Grupa symetrií čtverce v rovině.



(d) Akce aditivní grupy $\mathbb{Z}$ na množině $\mathbb{Z}$. $(g,m) \mapsto g \cdot m = g + m$.

(e) Akce aditivní komutativní grupy $\mathbb{R}$ na množině $\mathbb{R}$. $(g,m) \mapsto g \cdot m = g + m$.

(f) Akce multiplikativní grupy $\mathbb{R}_\star$ na množině $\mathbb{R}$. $(g,m) \mapsto gm$.

(g) Akce grupy všech otočení $\mathbf{SO}(2)$ v $\mathbb{R}^2$, maticově

$$(g,m) \mapsto g \cdot m = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y\end{pmatrix} g \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

(h) Akce grupy všech otočení $\mathbf{SO}(3)$ v $\mathbb{R}^3$, maticově

$$(g,m) \mapsto g \cdot m = \begin{pmatrix}\mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z\end{pmatrix} g \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

(i) Akce grupy $\mathbf{SL}(2,\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}$, kde $g \sim \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $ad - bc = 1$.

$$(g,m) \mapsto \frac{am+b}{cm+d}.$$

Grupy (a)-(d) jsou diskrétní, grupy (e)-(i) jsou spojité.

Pro spojité grupy budeme v dalším uvažovat pouze jednoparametrické podgrupy, parametr budeme označovat ϵ. Jednoparametrická podgrupa grupy G je homomorfizmus grup $\mathbb{R} \to G$. Příkladem jednoparametrické podgrupy grupy $\mathbf{SO}(3)$ v části (h) předchozího příkladu jsou rotace v pevně zvoleném směru, např. kolem jedné ze souřadnicových os. Akce jednoparametrické podgrupy budeme uvažovat na rozšířeném konfiguračním prostoru $\{(x, y^i)\}$.

$$X = X(x,y^i,\epsilon) \approx x + \epsilon \left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \cdots, \quad Y^j = Y^j(x,y^i,\epsilon) = y^j + \epsilon \left.\frac{\partial Y^j}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0} + \cdots.$$

Dále označme

$$\xi(x,y^i) = \left.\frac{\partial X}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}, \quad \eta^j(x,y^i) = \left.\frac{\partial Y^j}{\partial \epsilon}\right|_{\epsilon=0}.$$

Příklad 17. Uvažujme příklad 16 (g) na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^2 = \{(x,y)\}$. Potom $\xi(x,y) = -y$ a $\eta(x,y) = x$.

Zabývejme se nyní prodloužením akce grupy na rozšířeném konfiguračním prostoru $\{(x,y)\}$ do prostoru $\{(x,y,y')\}$. Dostáváme (s potlačením indexů u y)

$$\frac{\mathrm{d}Y(x,y,\epsilon)}{\mathrm{d}X(x,y,\epsilon)} = \frac{\mathrm{d}y + \epsilon \mathrm{d}\eta + \cdots}{\mathrm{d}x + \epsilon \mathrm{d}\xi + \cdots} \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \epsilon\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right) + \cdots .$$

Celkem tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[\frac{\mathrm{d}Y(x,y,\epsilon)}{\mathrm{d}X(x,y,\epsilon)}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}. \tag{14}$$

Výrazy

$$\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \quad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial\eta}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

jsou tzv. *úplné derivace* podle nezávisle proměnné x.

Příklad 18. Pro akci grupy z předchozího příkladu dostaneme prodloužení

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \epsilon\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right] + \cdots .$$

7.2. Rundova-Trautmannova identita. Uvažujme funkcionál

$$s[y] = \int_a^b L\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x.$$

Po transformaci dostaneme

$$S[Y] = \int_{A=X(a,y(a),\epsilon)}^{B=X(b,y(b),\epsilon)} L\left(X(x,y(x),\epsilon), Y(x,y(x),\epsilon), \frac{\mathrm{d}Y(x,y(x),\epsilon)}{\mathrm{d}X(x,y(x),\epsilon)}\right)\mathrm{d}X(x,y(x),\epsilon) =$$
$$= \int_a^b L\left(X(x,y(x),\epsilon), Y(x,y(x),\epsilon), \frac{\mathrm{d}Y(x,y(x),\epsilon)}{\mathrm{d}X(x,y(x),\epsilon)}\right)\frac{\mathrm{d}X(x,y(x),\epsilon)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

Pokud má být účinek invariantní, musí být $s[y] = S[Y]$ a zejména tedy

$$\frac{\mathrm{d}S[Y]}{\mathrm{d}\epsilon}\Bigg|_{\epsilon=0} = 0.$$

Máme tedy s využitím prodloužení

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[L\left(X,Y,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[L\left(X,Y,\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}\right)\right]\Bigg|_{\epsilon=0} + L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right]\Bigg|_{\epsilon=0} =$$
$$= L\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} + \frac{\partial L}{\partial x}\xi + \frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}\frac{\mathrm{d}f(x,y,\epsilon)}{\mathrm{d}x}\Bigg|_{\epsilon=0},$$

kde na pravé straně je derivace dle ϵ libovolného triviálního lagrangiánu závislého na ϵ. S označením

$$F(x,y) = \left.\frac{\mathrm{d}f(x,y,\epsilon)}{\mathrm{d}\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

máme pak

$$\frac{\partial L}{\partial x}\xi + \frac{\partial L}{\partial y}\eta + \frac{\partial L}{\partial y'}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} - \left(y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}. \tag{15}$$

7.3. Teorém Noetherové. S obvyklým označením

$$p = \frac{\partial L}{\partial y'}, \quad H = y'\frac{\partial L}{\partial y'} - L$$

dostáváme dále

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y}y' + py'', \quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}y' - \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y}y'.$$

Po dosazení do (15) získáme

$$\left(\xi y' - \eta\right)\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F + H\xi - p\eta\right).$$

Pokud znovu doplníme indexy u závisle proměnných, dostaneme

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\xi\frac{\mathrm{d}y^j}{\mathrm{d}x} - \eta^j\right)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}p_j}{\mathrm{d}x} - \frac{\partial L}{\partial y^j}\right)}_{=0\text{ E-L rovnice}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F + H\xi - \sum_{j=1}^{n}p_j\eta^j\right). \tag{16}$$

Pokud jsou splněny pohybové rovnice, je každý sčítanec na levé straně nulový a zachovává se tedy veličina

$$F + H\xi - \sum_{j=1}^{n}p_j\eta^j.$$

Příklad 19 (Délka křivky). Délka křivky v rovině, která je grafem funkce $y = y(x)$, je dána jako

$$S[y] = \int_a^b \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}.$$

Tento účinek je zřejmě invariantní vůči otočení v rovině 16 (g) a lze volit $F = 0$. Příslušná zachovávající se veličina je

$$H\xi - p\eta = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + (y')^2}}.$$

Již víme, že stacionární body funkcionálu jsou přímky $\alpha x + \beta y = \gamma$ a po dosazení máme

$$\frac{y - xy'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}},$$

což je pro $\gamma > 0$ vzdálenost přímky od počátku soustavy souřadnic, který je pevným bodem rotace. Tato vzdálenost se při rotaci skutečně nemění.

Příklad 20 (Relativistická volná částice na přímce). Účinek pro relativistickou volnou částici na přímce je

$$S[x] = -mc^2 \int_a^b \mathrm{d}t \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}.$$

Odtud dostaneme lagrangián

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2},$$

hybnost

$$p = \frac{m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}$$

a energii

$$H = p\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}.$$

Z invariance účinku vůči Lorentzově transformaci máme

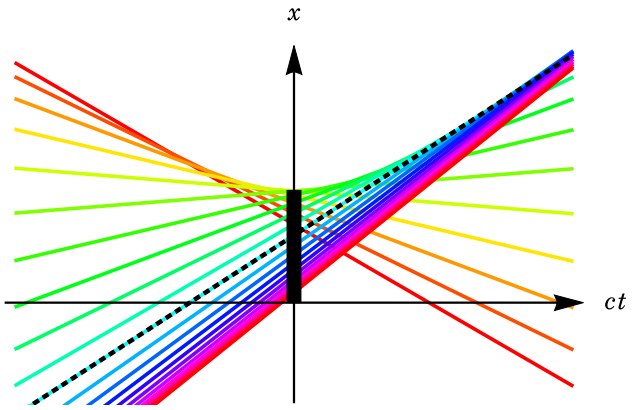
$$\begin{aligned} cT &= ct\cosh\epsilon - x\sinh\epsilon & c\xi &= -x \\ X &= -ct\sinh\epsilon + x\cosh\epsilon & \eta &= -ct \end{aligned}$$

a zachovávající se veličinou je

$$\frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2}}\left(t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - x\right).$$

Řešením pohybových rovnic pro relativistickou částici je její rovnoměrný pohyb rychlostí v, tj. $x = x_0 + vt$ a zachovává se tedy

$$\frac{mcx_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$


x
ct

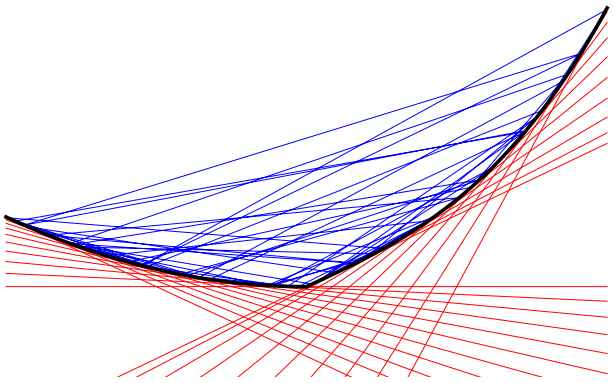
8. Přednáška: Hamiltonovy kanonické rovnice

V předchozí přednášce jsme ukázali, že bodové transformace závislých a nezávislých proměnných mohou výrazně zjednodušit lagrangián a tím pádem i jemu příslušné Euler-Lagrangeovy rovnice. Rovněž jsme se v předchozích kapitolách snažili vyhnout přímému řešení Euler-Lagrangeových rovnic, jejich přímé řešení je praktické jen pro soustavy lineárních rovnic s konstantními koeficienty, tj. pro lagrangiány, které jsou nezávislé na nezávislé proměnné a kvadratické v závislých proměnných a jejich derivacích. Teorie obecných soustav rovnic druhého řádu je poměrně složitá, proto často přecházíme raději ke dvojnásobně větší soustavě rovnic prvního řádu, což lze provést např. označením derivací závisle proměnných podle nezávisle proměnné za nové závislé proměnné. Variační formulace rovnic poskytuje ještě výhodnější možnost, jak postupovat.

8.1. Legendreova transformace. Pro jednoduchost uvažujme nejjednodušší variační úlohu pro jednu závisle proměnnou a s pevnými konci, tedy 1 a Lagrangeovu funkci $L(x,y,z)$ budeme považovat za konvexní funkcí proměnné z. Pro všechna z_1, z_2 a $t \in [0,1]$ tedy platí

$$L(x,y,tz_1+(1-t)z_2) \le tL(x,y,z_1)+(1-t)L(x,y,z_2)$$

Spojnice libovolných dvou bodů na grafu konvexní funkce tedy leží nad tímto grafem (na obrázku modře), ekvivalentně musí graf konvexní funkce ležet nad tečnou v libovolném bodě tohoto grafu (na obrázku červeně).



Legendreova transformace bodu $(z, L(z))$ je bod $(p, H(p))$, kde

$$H(p) = \max_z [pz - L(z)]$$

a pokud je funkce $L(z)$ diferencovatelná, platí

$$p = \frac{\partial L(z)}{\partial z}.$$

Funkční inverzí tohoto vztahu získáme

$$z(p) = \left(\frac{\partial L(z)}{\partial z}\right)(p)$$

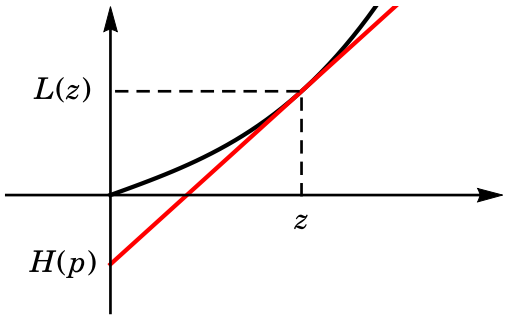
a dosazením potom

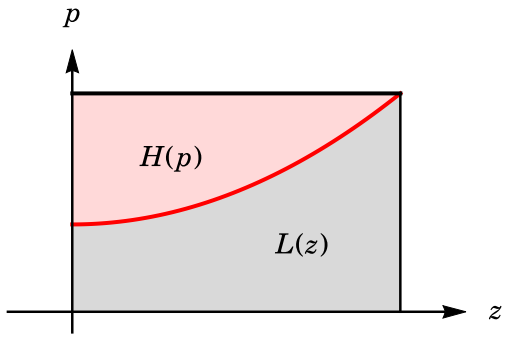
$$H(p) = pz(p) - L(z(p))$$

a tím i dvojici $(p, H(p))$. Symetrickým zápisem $H(p) + L(z) = pz$, ovšem jednou uvažujeme $z = z(p)$ a podruhé $p = p(z)$, naznáme, že Legendreova transformace $H(p)$ je opět původní $L(z)$, tj.

$$L(z) = \max_p [pz - H(p)].$$

Geometrický význam Legendreovy transformace je zřejmý z následujících obrázků.





8.2. Komplementární variační úloha. Variační úlohu pro hledání minima funkcionálu 1 můžeme tedy formulovat také následovně pomocí integrace per partes prvního sčítance v integrandu

$$\min_y \int_a^b \mathrm{d}x \max_p \left[p\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - H(x,y,p)\right] = \min_y \max_p \left\{ \int_a^b \mathrm{d}x \left[-y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} - H(x,y,p)\right] + \underbrace{[py]_a^b}_{=0} \right\} =$$

$$= -\min_p \int_a^b \mathrm{d}x \max_y \left[y\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} + H(x,y,p)\right] = -\min_p \int_a^b \mathrm{d}x \left[-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\partial H(x,\mathrm{d}p/\mathrm{d}x,p)}{\partial y} + H(x,\mathrm{d}p/\mathrm{d}x,p)\right].$$

V předchozí úpravě jsme využili tzv. minimax věty [3], která platí za předpokladu, že stacionární bod funkcionálu je sedlový bod.

Příklad 21. Korálek o hmotnosti m klouže po drátu ve tvaru paraboly o rovnici $2ay = x^2$, $a > 0$, jejíž osa je svislá v homogenním gravitačním poli Země. Tření zanedbejte. Rovnici

[3] viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Minimax_theorem

paraboly ve svislé rovině xy napíšeme jako $2ay = x^2$, kde $a > 0$ je konstanta. Gravitační zrychlení je $-g\mathbf{e}_y$. Napišme lagrangián pro soustavu.

$$L = \frac{m}{2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - \frac{mgx^2}{2a}.$$

Zjistíme napřed závislost polohy korálku na čase a periodu jeho kmitů. Lagrangián explicitně nezávisí na nezávislé proměnné (času) a jedná se tedy o speciální typ integrandu (b), fyzikálně lze zachovávající se veličinu ztotožnit s celkovou energií soustavy

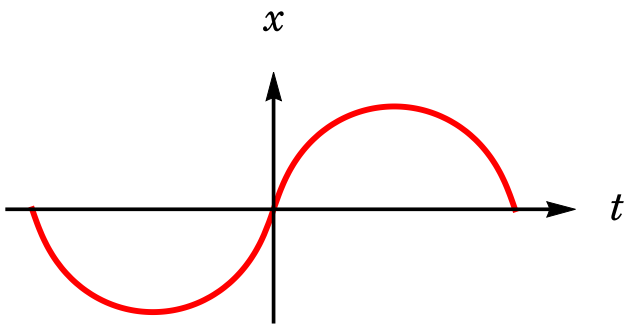
$$E = \frac{m}{2}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{mgx^2}{2a}.$$

Označme maximální vzdálenost korálku od osy y jako x_0. Potom pro periodu kmitů dostaneme pomocí úplného eliptického integrálu druhého druhu

$$T\sqrt{\frac{g}{a}} = 4\,\mathrm{E}\left(-\frac{x_0^2}{a^2}\right).$$

Polohu získáme inverzí neúplného eliptického integrálu druhého druhu, platí totiž

$$t\sqrt{\frac{g}{a}} = \mathrm{E}\left(\arcsin\frac{x}{x_0}\,\middle|\,-\frac{x_0^2}{a^2}\right).$$



Nyní určíme zobecněnou hybnost

$$p = m\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

a hamiltonián je tedy

$$H = \frac{p^2}{2m\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{mgx^2}{2a}.$$

Lagrangián pro komplementární variační úlohu dostaneme jako

$$\Lambda\left(t,p,\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{a^2p^2(3\dot{p}^2+a^2)}{2m(\dot{p}^2+a^2)^2}-\frac{mg\dot{p}^2}{2a},$$

s obvyklým označením $\dot{p}=\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Tento lagrangián Λ má stejný stacionární bod jako původní lagrangián L, ale je podstatně komplikovanější.

8.3. Hamiltonovská formulace stacionarity. Hamiltonovská formulace mechaniky je výhodná zejména proto, že proměnné x, y a p jsou pojednávány rovnocenně. Zobecnění pro více závislých proměnných $y^i(x)$, $i\in\{1,\dots,n\}$ je jednoduché, zobecnění pro více nezávislých proměnných je možné, avšak přesahuje rozsah této přednášky. Z výsledků předchozího odstavce získáme

$$\min_y\int_a^b\mathrm{d}x\max_{p_i}\left[\sum_{i=1}^n p_i\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}-H(x,y,p)\right]$$

a odtud pomocí nulovosti první variace vzniklého funkcionálu pro $2n$ nezávislých proměnných y^i a p_i, $i\in\{1,\dots,n\}$ dospějeme k Hamiltonovým rovnicím (8.3). Vzhledem k tomu, že integrand funkcionálu je lineární v derivacích závisle proměnných, jsou jeho Euler-Lagrangeovy rovnice prvního řádu.

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial H(x,y,p)}{\partial p_i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=-\frac{\partial H(x,y,p)}{\partial y^i},\quad i\in\{1,\dots,n\}.$$

Počítejme nyní diferenciál

$$\mathrm{d}L(x,y^i,z^j)=\frac{\partial L}{\partial x}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\partial L}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i+\frac{\partial L}{\partial z^i}\mathrm{d}z^i\right),$$

přičemž platí

$$d\,y^i-z^i\mathrm{d}x=0,\quad \text{pro všechna } i\in\{1,\dots,n\}.$$

Dosadíme z Euler-Lagrangeových rovnic

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial z^i},\quad \frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial L}{\partial y^i}$$

a dostaneme

$$\mathrm{d}L=\frac{\partial L}{\partial x}\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^n\left(\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y^i+p_i\mathrm{d}z^i\right).$$

Můžeme dále upravit pomocí

$$\mathrm{d}\left(\sum_{i=1}^n p_iz^i\right)=\sum_{i=1}^n\left(p_i\mathrm{d}z^i+z^i\mathrm{d}p_i\right)$$

a dostaneme

$$\mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} p_j z^j - L\right) = -\frac{\partial L}{\partial x}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y^i + z^i \mathrm{d}p_i\right) = -\frac{\partial L}{\partial x}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}y^i + \frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}p_i\right) =$$
$$\frac{\partial H}{\partial x}\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial y^i}\mathrm{d}y^i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\mathrm{d}p_i\right) = \mathrm{d}H(x, y^i, p_j)$$

Odtud také získáme Hamiltonovy rovnice a také

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\partial L}{\partial x}.$$

Hamiltonovy rovnice se dají výhodně formulovat geometricky jazykem diferenciální geometrie. Taková formulace ovšem přesahuje rámec úvodního seznámení s variačním počtem.

Příklad 22 (Svislý vrh). Lagrangián pro svislý vrh v homogenním gravitačním poli je

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - mgx.$$

Hybnost je tedy

$$p = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

a hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgx.$$

Hamiltonovy rovnice dávají

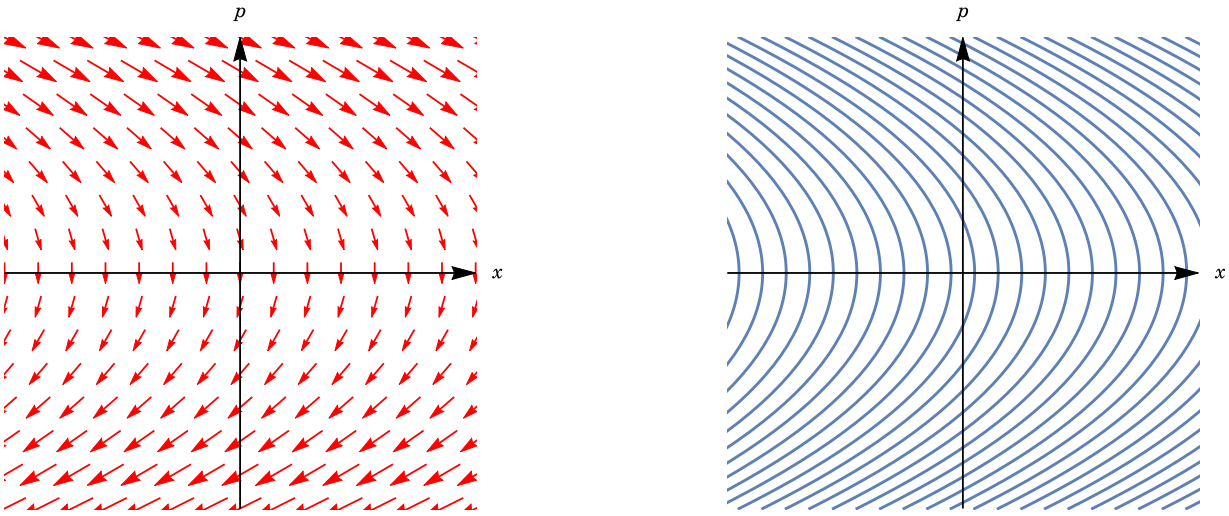
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{p}{m}$$
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -mg$$

Hamiltonovo vektorové pole ve fázovém prostoru dostaneme jako

$$\frac{p}{m}\mathbf{e}_x - mg\mathbf{e}_p$$

a jeho integrální křivky jsou

$$x = x_0 + \frac{p_0 t}{m} - \frac{1}{2}gt^2, \quad p = p_0 - mgt.$$



8.4. Kvadratické hamiltoniány a lineární algebra. Uvažujme v následujícím fyzikální systémy s n stupni volnosti, jejichž hamiltonián je kvadratickou funkcí zobecněných souřadnic a hybností. S výhodou zde potom můžeme využít metod lineární algebry. Bod ve fázovém prostoru budeme zapisovat jako $2n$-rozměrný vektor

$$z = (q^1, \ldots, q^n, p_1, \ldots, p_n),$$

hamiltonián H potom budeme obecně moci zapsat jako kvadratickou funkci z, tj.

$$H(z) = \frac{1}{2} z\, A\, z^\top = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} q^1 & \ldots & q^n & p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,2n} \\ a_{2,1} & \ddots & & \\ \vdots & & & \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} \cdots & & a_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^n \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Hamiltonián je tedy určen maticí A, zjevně musí platit $A = A^\top$, tj. matice je symetrická.

Příklad 23 (Tři tělesa v rovině spojená třemi pružinami). Soustava má 6 stupňů volnosti, matice A je tedy řádu 12, konkrétně hamiltonián získáme jako

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_1} + \frac{p_3^2 + p_4^2}{2m_2} + \frac{p_5^2 + p_6^2}{2m_3} + \frac{k_{12}}{2}\left[(q_1 - q_3)^2 + (q_2 - q_4)^2\right] + \\ + \frac{k_{13}}{2}\left[(q_1 - q_5)^2 + (q_2 - q_6)^2\right] + \frac{k_{23}}{2}\left[(q_3 - q_5)^2 + (q_4 - q_6)^2\right],$$

kde (q_1, q_2) (resp. (p_1, p_2)) je poloha (resp. hybnost) 1. částice, (q_3, q_4) (resp. (p_3, p_4)) je poloha (resp. hybnost) 2. částice a (q_5, q_6) (resp. (p_5, p_6)) je poloha (resp. hybnost) 3. částice ve

zvolených kartézských souřadnicích. Pro tento příklad je matice

$$A = \begin{pmatrix} K & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix},$$

kde

$$K = \begin{pmatrix} k_{12}+k_{13} & 0 & -k_{12} & 0 & -k_{13} & 0 \\ 0 & k_{12}+k_{13} & 0 & -k_{12} & 0 & -k_{13} \\ -k_{12} & 0 & k_{12}+k_{23} & 0 & -k_{23} & 0 \\ 0 & -k_{12} & 0 & k_{12}+k_{23} & 0 & -k_{23} \\ -k_{13} & 0 & -k_{23} & 0 & k_{13}+k_{23} & 0 \\ 0 & -k_{13} & 0 & -k_{23} & 0 & k_{13}+k_{23} \end{pmatrix}$$

a M je diagonální matice $\mathrm{diag}(m_1, m_1, m_2, m_2, m_3, m_3)$. Matice K a tedy i A je ovšem singulární. Z hamiltoniánu můžeme vyloučit pohyb hmotného středu. Označme

$$P_1 = p_1 + p_3 + p_5, \quad P_2 = p_2 + p_4 + p_6.$$

a

$$Q_1 = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_3 + m_3 q_5}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad Q_2 = \frac{m_1 q_2 + m_2 q_4 + m_3 q_6}{m_1 + m_2 + m_3}$$

hybnost a polohu hmotného středu a z rovnic dosaďme za q_5, q_6, p_5, p_6.

Obecná lineární transformace S, která zachovává tvar Hamiltonových rovnic má tu vlastnost, že platí

$$S\ J S^\top = J, \quad \text{kde } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a 0 zde značí nulovou matici řádu n a 1 jednotkovou matici téhož řádu. Hamiltonovy rovnice s označením $z = (q, p)$ totiž můžeme psát maticově jako

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = J \frac{\partial H}{\partial z}.$$

Lineární transformaci $z \mapsto zS$ zvolíme tak, aby vzniklá matice

$$S\ A\ S^\top$$

měla co možná nejjednodušší tvar. Diagonálního tvaru se nám podaří dosáhnout tehdy, je-li původní matice A pozitivně definitní, tj.

$$z\ A\ z^\top \geq 0 \quad \text{a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, je-li} \quad z = 0.$$

Potom A můžeme interpretovat jako matici skalárního součinu

$$\langle z, w \rangle := z\ A\ w^\top$$

a lineární transformace $\alpha\colon z \mapsto zJA^{-1}$ má vůči tomuto skalárnímu součinu následující vlastnost

$$\langle \alpha z, w\rangle = z\ JA^{-1}A\ w^\top = z\ Jw^\top = -z\ A\ \left(JA^{-1}\right)^\top w^\top = -\langle z, \alpha w\rangle.$$

Vlastní hodnoty transformace α jsou ryze imaginární: Buď z vlastním vektorem α s vlastní hodnotou a. Potom

$$a\langle z,z\rangle = \langle az,z\rangle = \langle \alpha z,z\rangle = -\langle z,\alpha z\rangle = -\langle z,az\rangle = -\bar{a}\langle z,z\rangle.$$

Srovnáním získáme $\bar{a} = -a$. Vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou na sebe kolmé: Buď z vlastním vektorem α s vlastní hodnotou a a w vlastním vektorem s vlastní hodnotou b. Potom

$$0 = \langle \alpha z, w\rangle + \langle z, \alpha w\rangle = a + \bar{b}\langle z,w\rangle = (a-b)\langle z,w\rangle.$$

Vidíme, že $\alpha = JA^{-1}$ je normální, $\alpha\alpha^\dagger = \alpha^\dagger\alpha$, tj.

$$JJ^\top = -J^2 = -1 = J^\top J$$

a tedy α je diagonalizovatelné a můžeme najít $\langle\rangle$-ortonormální bázi složenou z jednotkových vlastních vektorů α, v níž je α diagonální. Ryze imaginární vlastní hodnoty reálné transformace α se musí vyskytovat v komplexně sdružených dvojicích, aby charakteristický polynom α měl reálné koeficienty. Označme tedy

$$\begin{aligned}
\alpha(z_1) &= \mathrm{i}\,\lambda_1 z_1 & \qquad \alpha(\bar{z}_1) &= -\mathrm{i}\,\lambda_1 \bar{z}_1\\
\alpha(z_2) &= \mathrm{i}\,\lambda_2 z_2 & \qquad \alpha(\bar{z}_2) &= -\mathrm{i}\,\lambda_2 \bar{z}_2\\
&\vdots & \qquad &\vdots\\
\alpha(z_n) &= \mathrm{i}\,\lambda_n z_n & \qquad \alpha(\bar{z}_n) &= -\mathrm{i}\,\lambda_n \bar{z}_n
\end{aligned}$$

a vektory $(z_1,\dots,z_n,\bar{z}_1,\dots,\bar{z}_n)$ tvoří bázi jednotkových vlastních vektorů, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ pro $j \in \{1,\dots,n\}$. Zaveďme bázi $e_j = \sqrt{\lambda_j}\,\mathrm{Re}\,z_j$, $f_j = \sqrt{\lambda_j}\,\mathrm{Im}\,z_j$. V této bázi je symetrická matice A diagonální a její hlavní hodnoty jsou (Ω,Ω), kde $\Omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$, $\omega_j = 1/\lambda_j$. V matici Ω jsou vlastní frekvence soustavy, vlastní vektory e_j a f_j představují souřadnice a hybnosti vlastních módů soustavy.

9. Přednáška: Parametrické variační problémy

Např. u řešení izoperimetrického problému jsme se setkali s variační úlohou vyžadující parametrickou reprezentaci křivky, přičemž funkcionál samotný (tj. délka křivky) je nezávislý na volbě parametrizace. Studium těchto úloh bylo započato Weierstrassem a plody tohoto studia jsou např. (pseudo)Riemannova geometrie obecné teorie relativity nebo její zobecnění ve formě Finslerovy geometrie. S úlohami tohoto typu se rovněž často setkáváme v geometrické optice, zejména pokud studujeme materiály, jejichž index lomu je nehomogenní a neizotropní, tj. závisí na pozici v materiálu a na směru šíření paprsku v dané pozici.

9.1. Homogenní lagrangiány. Pro jednoduchost budeme uvažovat variační úlohu danou funkcionálem

$$I[x] = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t))\mathrm{d}t, \tag{17}$$

kde $x\colon t \mapsto x(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ je parametricky zadaná křivka, $\dot{x}\colon t \mapsto x(t) = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$ jsou tečné vektory podél křivky v $\mathbb{R}^n$. Dále je $L(x,v)$ funkce $2n$ proměnných, která je pozitivně homogenní stupně jedna v druhé n-tici proměnných, tj.

$$L(x, \lambda v) = \lambda L(x,v), \quad \text{pro všechna } \lambda > 0.$$

Tuto funkci označujeme jako homogenní lagrangián. Euler-Lagrangeovy rovnice pro homogenní lagrangián jsou stejně jako v nehomogenním případě

$$\frac{\partial L}{\partial x^j} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) = 0.$$

Integrál v (17) je invariantní vůči libovolné transformaci parametru $s = s(t)$, kde s je rostoucí, tj. $\dot{s} = \mathrm{d}s/\mathrm{d}t > 0$. Je totiž

$$I[x] = \int_a^b L\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t = \int_{s(a)}^{s(b)} L\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s = \int_{s(a)}^{s(b)} L\left(x, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)\mathrm{d}s.$$

Z Eulerovy věty o homogenních funkcích[4] plyne

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\dot{x}^j = L$$

a odtud opětovným zderivováním

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}\dot{x}^j = 0.$$

[4] viz např. Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Homogeneous_function`

Homogenní lagrangián tedy není nikdy regulární a zobecněné rychlosti nelze vyjádřit pomocí zobecněných hybností a hamiltonián je vždy identicky roven nule. Proto musíme najít jiný způsob jak definovat hamiltonián a zobecněné hybnosti. Je vhodné místo L vzít L^2 stupně homogenity dva. Potom máme

$$2L^2 = \dot{x}^j \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^j}$$
$$\frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^k} = \dot{x}^j \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}.$$

Položme

$$g_{jk} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} + L\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} \tag{18}$$

Funkce $g_{jk} = g_{kj}$ jsou homogenní stupně nula, tj.

$$\dot{x}^\ell \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{x}^\ell} = \dot{x}^j \frac{\partial^3 L^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^\ell} = 0.$$

Pomocí dříve uvedeného máme

$$2L^2 = \dot{x}^j \frac{\partial L^2}{\partial \dot{x}^j} = \dot{x}^j \dot{x}^k \frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k} = 2g_{jk}(x, \dot{x})\dot{x}^j \dot{x}^k.$$

Pro $L > 0$ můžeme tedy psát variační integrál jako

$$I[x] = \int_a^b \mathrm{d}t \sqrt{g_{ij}(x^\ell, \dot{x}^\ell)\dot{x}^i \dot{x}^j}$$

ve tvaru, který připomíná integrál pro délku křivky, kde ale máme méně obecně, že $g_{ij} = g_{ij}(x^\ell)$. Tato podobnost se ukazuje jako velmi přínosná.

Nyní můžeme zformulovat modifikovanou podmínku regularity. V dalším budeme vždy předpokládat, že rovnici

$$p_j = g_{jk}(x, \dot{x})\dot{x}^k \tag{19}$$

lze vždy řešit vzhledem k $\dot{x}^k$. Rovnici můžeme dále upravit

$$p_j = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}\dot{x}^k = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k} + L\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^k}\right)\dot{x}^k = L\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}. \tag{20}$$

Věnujme se dále tvrzení o vyjádření $\dot{x}^k$ pomocí p_j z (19). Máme

$$\frac{\partial p_j}{\partial \dot{x}^\ell} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial \dot{x}^\ell}\dot{x}^k + g_{jk}\delta^k_\ell = g_{j\ell}.$$

Jakobiánem transformace $\dot{x}^\ell \mapsto p_j$ je tedy prostě $g_{j\ell}$. Matice $g_{j\ell}(x,\dot{x})$ má tedy maticovou inverzi $g^{\ell k}(x,p)$, přičemž $\dot{x}$ a p jsou svázány (19) a inverzní vztah dostaneme jako

$$\dot{x}^\ell = g^{\ell k}(x,p)p_k.$$

Hamiltonián pro homogenní lagrangián L dostaneme jako

$$H^2(x,p) = g^{k\ell}(x,p)p_k p_\ell.$$

Příklad 24 (Relativistická volná částice o jednotkové hmotnosti). Označme

$$\eta_{jk} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

kde $j,k \in \{0,1,2,3\}$. Potom homogenní lagrangián (rychlost světla $c = 1$) je

$$L = -\sqrt{\eta_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k}$$

a

$$p_j = \eta_{jk}\dot{x}^k, \quad H^2 = \eta^{jk}p_j p_k,$$

protože L^2 je kvadratická v čtyřrychlostech.

Příklad 25 (Randersův lagrangián pro relativistický elektron v elektromagnetickém poli).

$$L = -\sqrt{\eta_{jk}\dot{x}^j\dot{x}^k} - A_j(x)\dot{x}^j$$

Lagrangián je pozitivně homogenní funkcí stupně jedna, předchozí můžeme tedy aplikovat na něj[5].

9.2. Hamiltonovská formulace. Vyjdeme z homogenního hamiltoniánu

$$H^2(x,p) = g^{jk}(x,p)p_j p_k$$

a vztahu

$$g_{ij}(x,\dot{x})g^{jk}(x,p) = \delta_i^k,$$

jehož derivováním podle $\dot{x}^m$ dostaneme

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial p_\ell}\frac{\partial p_\ell}{\partial \dot{x}_m}g_{ij} + g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^m} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial p_\ell}g_{\ell m}g_{ij} + g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial \dot{x}^m} = 0.$$

[5]Původní Randersův článek je na `https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.59.195`

Tento vztah vynásobíme $\dot{x}^i$, upravíme a získáme

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial p_\ell} p_j g_{\ell m} = 0$$

a odtud již plyne rovněž

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial p_\ell} p_i = 0.$$

Nyní můžeme za využití předchozího počítat derivace

$$\frac{\partial H^2}{\partial p_k} = 2 g^{kj} p_j$$

a

$$\frac{\partial H^2}{\partial p_k \partial p_\ell} = 2 g^{k\ell}.$$

Zcela analogicky se (18) pak dostáváme

$$g^{k\ell} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial p_k \partial p_\ell}. \tag{21}$$

Vidíme, že $H(x^k, p_\ell)$ je homogenní stupně jedna v proměnných p_ℓ a dosazením dostaneme

$$\dot{x}^i = g^{ij} p_j = \tfrac{1}{2} \frac{\partial H^2}{\partial p_i \partial p_j} p_j = H \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{22}$$

podobně jako ve (20). Dále dostáváme

$$H^2(x,p) = g^{k\ell} p_k p_\ell = g^{k\ell} g_{ki} \dot{x}^i g_{\ell j} \dot{x}^j = g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j = L^2(x, \dot{x})$$

a tedy vhodnou volbou znaménka

$$H(x,p) = L(x,\dot{x}).$$

Dále můžeme dostat

$$\frac{\partial H(x,p)}{\partial x^i} = -\frac{\partial L(x,\dot{x})}{\partial x^i},$$

obdobně jako pro nehomogenní lagrangiány a hamiltoniány. Nyní se zabývejme možnou vhodnou volbou parametru. Takovou volbou je

$$s(t) = \int_a^t L\left(x(\tau), \frac{\mathrm{d}x(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right) \mathrm{d}\tau, \tag{23}$$

kde $x(t)$ je stacionární bod, tj. řešení Euler-Lagrangeových rovnic, pro kterou dostaneme $L = 1$ a

$$\mathrm{d}s = L(x,\dot{x})\mathrm{d}t.$$

Pro tuto volbu parametru tedy Euler-Lagrangeovy rovnice můžeme napsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(L\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0,$$

což můžeme pomocí dříve odvozeného přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}p_j = -\frac{\partial H}{\partial x^j}.$$

Rovnice (22) s $H = L = 1$ dává

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}x^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}.$$

Pro tuto speciální volbu parametru s tedy dostáváme Hamiltonovy rovnice v obvyklé podobě.

Příklad 26 (Randersova metrika). Budeme uvažovat parametrický variační problém

$$I[x,y] = \int_a^b \mathrm{d}t \left[\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2} + cx\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]$$

Jako parametr zvolme $t = x$. Potom dostaneme Euler-Lagrangeovu rovnici

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} = c,$$

jejímž řešením jsou kružnice

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \frac{1}{c^2}.$$

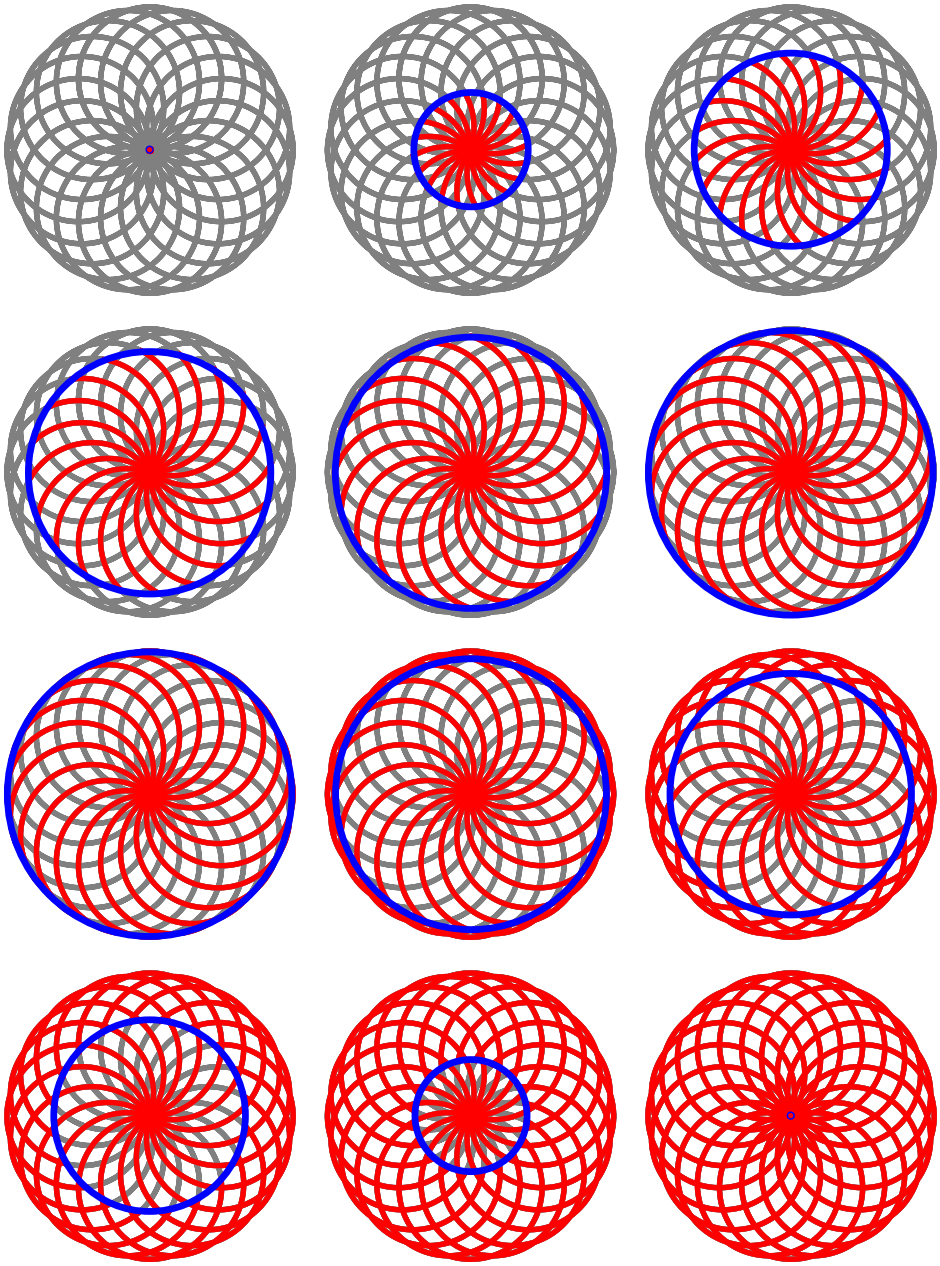
Geodetiky jsou tedy kružnice, které limitně přejdou v přímky pro $c \to 0$. Geodetiky vycházející z libovolného bodu popíšeme nejlépe pomocí polárních souřadnic se středem v tomto bodě, tj.

$$r = \frac{2}{c}\sin(\varphi - \varphi_0).$$

Délku geodetiky dostaneme výpočtem I v polárních souřadnicích jako

$$s = \int_{\varphi_0} \mathrm{d}\varphi \left[\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 + r^2} + \frac{cr^2}{2}\right] = \frac{1}{c}\left[3(\varphi-\varphi_0) - \tfrac{1}{2}\sin 2(\varphi-\varphi_0)\right].$$

Koncové body geodetik pro dané s tvoří rovněž kružnici, viz následující obrázek. Povšimněte si, že na první půlkružnici je geodetika minimalizující, potom v největší vzdálenosti od počátku projde sdruženým bodem a minimalizující být přestane.



10. Přednáška: Variační problémy s vícenásobnými integrály

Zatím jsme uvažovali funkcionály, v nichž vystupovaly jako argumenty funkce jedné proměnné. V této přednášce se budeme věnovat funkcionálům obecnějším.

10.1. Definice a příklady. Budeme chtít najít stacionární body (tj. Euler-Lagrangeovy rovnice) funkcionálu

$$I[y_i] = \int_V \mathrm{d}^n x \mathscr{L}\left(x_\alpha, y_i, \frac{\partial y_i}{\partial x_\beta}\right), \tag{24}$$

kde $\alpha = \{1,\dots,n\}$, $i = \{1,\dots,m\}$ a V je integrační oblast v $\mathbb{R}^n$.

Příklad 27 (Příklady variačních funkcionálů s více nezávislými proměnnými). Uvedeme si některé příklady variačních funkcionálů, zejména těch, které jsou důležité ve fyzice.

(a) Úloha o minimální ploše. Uvažujme parametricky zadanou plochu v euklidovském prostoru $\mathbb{R}^3$, tj. zobrazení $\iota\colon K \to \mathbb{R}^3$ zadané

$$\mathbb{R}^2 \supset K \ni (u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \in \mathbb{R}^3,$$

přičemž K je kompaktní množina v $\mathbb{R}^2$, tj. prostoru parametrů. Míra této parametrické plochy je dána funkcionálem

$$I[\iota] = I[x(u,v), y(u,v), z(u,v)] = \int_K \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v\ \sqrt{EG - F^2}, \quad \text{kde}$$
$$E = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \quad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \quad G = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}.$$

V tomto příkladě je $x_\alpha \sim (u,v)$ a $y_i \sim (x,y,z)$ a máme $n = 2$ a $m = 3$.

(b) Účinek pro uzavřenou strunu. Výchylka struny z rovnovážné polohy v čase t pro úhel φ je $u(t,\varphi)$. Účinek dostaneme ve tvaru

$$I[u(t,\varphi)] = \int_a^b \mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left(\tfrac{1}{2}\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 - \tfrac{1}{2}\kappa\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2\right).$$

(c) Lineární teorie pružnosti v homogenním a izotropním prostředí. Uvažujeme spojité prostředí, jehož výchylka z rovnovážné polohy v čase t a v místě (x,y,z) je $\mathbf{u}(t,x,y,z)$, tzv. vektorové pole posunutí. Máme tedy $x_\alpha \sim (t,x,y,z)$ a $y_i \sim (u_x, u_y, u_z)$ a $n = 4$, $m = 3$. Účinek je dán vztahem

$$I[u_\alpha(x_i)] = \int_V \mathrm{d}^4 x \left\{\frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}\right) - \left(\frac{2\mu}{2}u_{ij}u_{ij} + \frac{\lambda}{2}u_{ii}u_{jj}\right) - \mathscr{U}(u_i, x_\alpha)\right\},$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

je tzv. tenzorové pole deformace a $\mathscr{U}$ je objemová hustota potenciální energie soustavy, podrobněji, např. `https://www.physics.muni.cz/~krbek/el.pdf`

(d) Účinek pro elektrostatické pole nábojů ρ v oblasti V je

$$I[\Phi] = (t_2 - t_1)\int_V \mathrm{d}^3x\left[-\Phi(x,y,z)\rho(x,y,z) + \tfrac{\epsilon_0}{2}\|\nabla\Phi(x,y,z)\|^2\right],$$

kde $-\nabla\Phi$ je intenzita elektrostatického pole a Φ je elektrostatický potenciál. Zde $n = 3$ a $m = 1$.

(d) Účinek elektromagnetického pole F s čtyřpotenciálem A v časoprostoru s čtyřproudy j

$$I[A] = -\int_\Omega \mathrm{d}\Omega\left(\frac{1}{c}j^iA_i + \frac{1}{2Z_0}F^{ik}F_{ik}\right).$$

(e) Lagrangeova hustota pro Standardní model v částicové fyzice, viz

`https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_formulation_of_the_Standard_Model`

(f) Lagrangeova hustota pro gravitaci, viz

`https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein-Hilbert_action`

10.2. První variace funkcionálu účinku. První variaci vypočteme standardním postupem

$$\delta I = \int_W \mathrm{d}^nx\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right] =$$

$$= \int_W \mathrm{d}^nx\left\{\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial u_i}\delta u_i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\right]\delta u_i\right\} + \oint_{\partial W}\mathrm{d}S_\alpha\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\delta u_i. \quad (25)$$

Prostřední sčítanec dostaneme metodou per partes, poslední sčítanec z Greenovy věty[6] v $\mathbb{R}^n$, která říká, že

$$\int_W \mathrm{d}^nx[\mathbf{u}(x)\nabla f(x) + f(x)\nabla\cdot\mathbf{u}(x)] = \oint_{\partial W}\mathrm{d}S\ \mathbf{n}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})$$

kde $\mathbf{u}$ je vektorové pole v $\mathbb{R}^n$, f funkce v $\mathbb{R}^n$, ∂W je nadplocha, jež je hranicí oblasti W, $\mathbf{n}$ je vnější normála k této nadploše a $\oint_{\partial W}\mathrm{d}S$ je (nad)plošný integrál. Variace δu_i ovšem

[6] Viz např. `https://en.wikipedia.org/wiki/Divergence_theorem`

na okraji oblasti v nejjednodušším případě Dirichletových okrajových podmínek vymizí a druhý sčítanec tím pádem též. Mnohdy je účelné u nezávisle proměnných oddělit např. čas a prostorové souřadnice a to v případě, kdy $W = T \times V$, $T = [a,b]$. Vypočtěme potom

$$\delta I = \int_{T\times V} \mathrm{d}^n x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i}\delta u_i + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial t}}\delta\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}\right] =$$
$$= \int_a^b \mathrm{d}t \int \mathrm{d}^n x \left\{ \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i}\delta u_i - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial t}}\delta u_i - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\right]\delta u_i \right\} +$$
$$+ \left[\int \mathrm{d}^n x \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial t}}\delta u_i \right]_a^b + \int_a^b \mathrm{d}t \oint_{\partial V} \mathrm{d}S_\alpha \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\delta u_i. \quad (26)$$

Můžeme zadat i komplikovanější počáteční a okrajové podmínky, ale vždy tak, aby druhý a třetí sčítanec vymizel. Proto aby první variace účinku $\delta S = 0$ pro všechny δu_i, musí platit

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial u_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial t}} - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}}\right] = 0. \quad (27)$$

10.3. Rozložení teploty v obdélníkové desce. Joseph Fourier v roce 1822 popsal ve své práci *Théorie analytique de chaleur* popsal principy vedení tepla a rozložení teploty T. Stacionární rozložení teploty v oblasti prostoru V je dáno pomocí variačního principu. k je teplotní vodivost, která v principu může záviset jak na místě, tak např. na teplotě, pro neizotropní materiály i na směru. Pro jednoduchost ji budeme považovat za konstantní. Dále se mohou v oblasti V obecně nacházet zdroje tepla dané funkcí f. V tomto případě je variační princip

$$I[T] = \iiint_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}\left[-\tfrac{1}{2}k\ \|\nabla T(\mathbf{r})\|^2 + f(\mathbf{r})T(\mathbf{r})\right]$$

Pro rozložení teploty a zvolené okrajové podmínky musí $I[T]$ být stacionární hodnotou. Vypočítáme první variaci

$$\delta I[T] = \iiint_V \mathrm{d}^3\mathbf{r}(k\ \Delta T + f)\delta T - \oiint_{\partial V} \mathrm{d}S\ \delta T \mathbf{n}\cdot k\nabla T.$$

Okrajové podmínky musí být tedy zvoleny tak, aby na okraji ∂V bylo buď $\delta T = 0$ nebo $\mathbf{n}\cdot k\nabla T = 0$. Tyto podmínky se nazývají Dirichletovy, resp. Neumannovy. Potom dostaneme

$$k\ \Delta T = -f \quad \text{na oblasti} \quad V.$$

Vezměme např. jako V kvádr o hranách a a b, třetí hrana nechť je efektivně nekonečná. V kvádru nechť se nenacházejí zdroje tepla. Jedna strana kvádru nechť je udržována na

teplotě T_0 ostatní strany nechť jsou izolovány. Tato úloha vede k *lineární* parciální diferenciální rovnici

$$\Delta T(x,y) = 0, \quad (x,y) \in V = (0,a) \times (0,b)$$

doplněnou okrajovými podmínkami

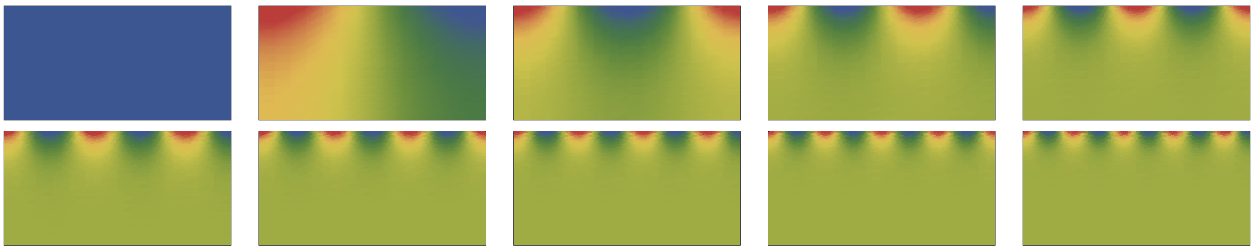
$$\frac{\partial T}{\partial x}(0,y) = \frac{\partial T}{\partial x}(a,y) = 0, \quad y \in (0,b),$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x,0) = 0 \quad x \in (0,a), \qquad T(x,b) = T_0 + (T_1 - T_0)\frac{x}{a} \quad x \in (0,a).$$

Řešení dostaneme tzv. Fourierovou metodou separace proměnných, kdy předpokládáme, že $T(x,y) = X(x)Y(y)$, což vede k řešením

$$T_n(x,y) = \cos\frac{n\pi x}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a}$$

tzv. vlastním módům dané úlohy, pro $n \in \{0,\ldots,9\}$ jsou pro $a/b = 2$ znázorněny níže.



Pomocí Fourierovy řady získáme řešení ve tvaru

$$T(x,y) = \frac{T_0 + T_1}{2} - 4\frac{T_1 - T_0}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2k+1)\pi x}{a}\cosh\frac{(2k+1)\pi y}{a}}{(2k+1)^2\cosh\frac{(2k+1)\pi b}{a}}.$$

Grafické znázornění rozložení teploty v arbitrárních jednotkách vidíme níže.

11. Přednáška: Ritzova variační metoda

V předchozí přednášce i dříve jsme viděli, že Euler-Lagrangeovy rovnice jsou přesně řešitelné pomocí elementárních funkcí jen ve výjimečných případech a s využitím zachovávajících se veličin. Ve druhé přednášce jsme na příkladu izoperimetrického problému ukázali, jak dokázat, že jistý funkcionál I má minimum, přímou metodou. Ne pro každý funkcionál je však možné a účelné získat řešení tímto způsobem. Ritzova variační metoda poskytuje způsob, jak získat přibližné řešení všech variačních úloh. Tímto způsobem tedy zároveň získáme i řešení patřičných Euler-Lagrangeových rovnic.

11.1. Minimalizující posloupnosti funkcí. Chceme nalézt minimum funkcionálu $I[y]$, který je definován na nějakém prostoru funkcí $\mathscr{F}$ definovaném podstatou problému a okrajovými podmínkami. Musíme přepokládat, že existují taková $y \in \mathscr{F}$, pro která $I[y] < \infty$ a zároveň

$$\inf_{y\in\mathscr{F}} I[y] = m > -\infty.$$

Z definice infima potom vyplývá, že existuje posloupnost funkcí $\{y_n\}$, $y_n \in \mathscr{F}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} I[y_n] = m.$$

Tato posloupnost funkcí se nazývá minimalizující. Konverguje-li tato posloupnost v $\mathscr{F}$ k funkci y_∞ a můžeme psát

$$I[y_\infty] = \lim_{n\to\infty} I[y_n],$$

potom platí

$$I[y_\infty] = m$$

a y_∞ je řešením variačního problému. Ještě důležitější okolností tohoto způsobu řešení úlohu je, že funkce y_n můžeme považovat za přibližná řešení variační úlohy.

Příklad 28 (Weierstrass). Uvažme funkcionál

$$I[y] = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

s okrajovými podmínkami $y(-1) = -1$ a $y(1) = 1$. Budeme uvažovat posloupnost funkcí $y_n(x) = \operatorname{arctg} nx/\operatorname{arctg} n$. Potom integrací dostaneme

$$I[y_n] = \int_{-1}^{1} \frac{n^2x^2\mathrm{d}x}{\operatorname{arctg}^2 n(1+n^2x^2)^2} = \frac{1}{n\operatorname{arctg} n} - \frac{1}{(1+n^2)\operatorname{arctg}^2 n}.$$

Zjevně platí, že $\lim_{n\to\infty} I[y_n] = 0$. Dále ale platí, že

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = \operatorname{sign} x,$$

ale tato funkce není v 0 ani spojitá.

Ani pokud by limita ve smyslu normy $\|y\|_0 = \sup_x |y(x)|$ v $\mathscr{F}$ existovala, nemusí, jak víme z 3. přednášky, být funkcionál $I[y]$ vzhledem k této normě spojitý. Konvergenci je tedy třeba uvážit ve smyslu normy $\|\cdot\|_1$.

Věta 10. *Buď $\{y_n\}$ minimalizující posloupnost funkcí funkcionálu $I[y]$ a nechť existuje limita y_∞. Pokud pro každé $\epsilon > 0$ platí, že existuje N tak, že $I[y_n] - I[y_\infty] < \epsilon$ pro všechna $n > N$ (spojitost zdola), potom*

$$I[y_\infty] = \lim_{n\to\infty} I[y_n].$$

Důkaz. Na jedné straně máme, že $\lim_{n\to\infty} I[y_n] = \inf I[y]$ a tedy $I[y_\infty] \le \lim_{n\to\infty} I[y_n]$. Na straně druhé ze spojitosti zdola plyne $I[y_\infty] \ge I[y_n] - \epsilon$ pro dostatečně velká n a tedy $I[y_\infty] \ge \lim_{n\to\infty} I[y_n]$. Celkem dostáváme požadované tvrzení. ■

11.2. Ritzova metoda. Předpokládejme, že hledáme minimum funkcionálu $I[y]$ na prostoru $\mathscr{F}$, který budeme považovat za vektorový prostor vybavený normou. Uvažme nekonečnou posloupnost funkcí $\{\varphi_n\}$ a buď $\mathscr{F}_n$ vektorový podprostor napnutý první n-ticí funkcí, tj.

$$\mathscr{F}_n = \{a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n\}.$$

Na každém podprostoru $\mathscr{F}_n$ dostaneme pro danou posloupnost funkcí $\{\varphi_n\}$ funkci

$$I(a_1,\ldots,a_n) := I[a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n]$$

n reálných proměnných. Můžeme najít minimum této funkce n proměnných běžnými metodami matematické analýzy. Minimum $I(a_1,\ldots,a_n)$ nechť je I_n a nastane pro jistou lineární kombinaci $y_n = \bar{a}_1\varphi_1 + \cdots + \bar{a}_n\varphi_n$. Zřejmě platí

$$I_1 \ge I_2 \ge \cdots I_n \ge I_{n+1} \ge \cdots,$$

protože každá lineární kombinace $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$ je zároveň lineární kombinací $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_{n+1}\}$, kde poslední koeficient je roven 0. Také zřejmě je $\mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1} \subseteq \cdots$.

V předchozím definovanou posloupnost nazveme *úplnou* v $\mathscr{F}$, jestliže pro každé $y \in \mathscr{F}$ a $\epsilon > 0$ existuje lineární kombinace

$$\eta_n = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + \cdots + a_n\varphi_n$$

tak, že $\|\eta_n - y\| < \epsilon$. Přitom n může záviset na ϵ.

Věta 11. *Je-li funkcionál $I[y]$ spojitý na $\mathscr{F}$ vzhledem k zvolené normě*[7] *a je-li posloupnost $\{\varphi_n\}$ úplná v $\mathscr{F}$, potom*

$$\lim_{n\to\infty} I_n = I_\infty \quad a \quad I_\infty = \inf_y I[y].$$

[7] Např. funkcionál $I[y] = \int_a^b L(x,y,y')\mathrm{d}x$ je spojitý na prostoru všech jednou spojitě diferencovatelných funkcí s normou danou součtem maxima funkce a maxima její derivace na intervalu $[a,b]$.

Důkaz. Pro důkaz stačí rozepsat definice. Z definice infima m funkcionálu I máme, že pro každé $\epsilon > 0$ existuje $\bar{y} \in \mathscr{F}$ tak, že $I[\bar{y}] < m + \epsilon$. Ze spojitosti I vzhledem k normě plyne, že $|I[\bar{y}] - I[y]| < \epsilon$, pokud $\|\bar{y} - y\| < \delta(\epsilon)$. Buď nyní

$$\eta_n = b_1\varphi_1 + \cdots + b_n\varphi_n$$

taková lineární kombinace, pro kterou $\|\bar{y} - \eta_n\| < \delta(\epsilon)$. Taková lineární kombinace pro dostatečně velké $n(\delta)$ existuje, protože posloupnost $\{\varphi_n\}$ je úplná. Dále buď y_n lineární kombinace $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ realizující minimum I_n funkce $I(a_1, \ldots, a_n)$ koeficientů lineární kombinace. Potom

$$m \le I[y_n] \le I[\eta_n] < m + 2\epsilon$$

a z libovolnosti ϵ dostáváme $m = I_\infty$. ■

Hlavní myšlenka předchozího důkazu tkví v možnosti libovolně přesně aproximovat prvek nekonečněrozměrného vektorového prostoru $\mathscr{F}$ pomocí prvku konečněrozměrného vektorového prostoru $\mathscr{F}_n$. Nic jsme neřekli o rychlosti konvergence, která obecně závisí jednak na konkrétní volbě funkcionálu I a jednak na volbě posloupnosti φ_n.

11.3. Statika tyčí. Použití Ritzovy metody si ukážeme na příkladu rovnovážné konfigurace tyče. Tato konfigurace je charakterizována tím, že celková energie soustavy nabývá své minimální hodnoty. Podobně by šlo formulovat jako variační i dynamické úlohy pojednávající vibrace tyčí a jiných pružných těles, nicméně bychom již museli používat aparát vyvinutý v předchozí kapitole věnované teorii pole.

Elastická energie tyče, všechny jejíž rozměry kromě jednoho jsou zanedbatelné, musí být úměrná odchylce její křivosti od křivosti v nezdeformovaném tvaru, protože křivost je jediným lokálním invariantem křivky, tj. veličinou nezávislou na ortogonální transformaci v prostoru a na posunutí v prostoru. Elastická energie tyče tedy musí být úměrná veličině

$$\int_a^b \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_0}\right)^2 \mathrm{d}t,$$

kde t je libovolný parametr, $R = R(\mathbf{r}(t))$ je křivost zdeformované tyče, $R_0 = R(\mathbf{r}_0(t))$ je křivost nezdeformované tyče. Druhá mocnina se v integrandu musí vyskytovat kvůli tomu, že energie nesmí záviset na znaménku křivosti. Podrobnější analýza ukazuje, že konstanta úměrnosti je $\frac{1}{2}EJ$, kde E je Youngův modul pružnosti a J je plošný moment setrvačnosti symetrického profilu tyče vůči jejímu středu, tedy např. $\pi a^4/4$ pro kruhový profil a poloměru a nebo $a^4/12$ pro čtvercový profil. Pokud má tyč proměnný průřez, musí plošný moment setrvačnosti být zahrnut v integrandu. Pro tyč, která má v nezdeformovaném stavu tvar úsečky (tj. $1/R_0 = 0$) a jejíž deformace je malá a rovinná, dostaneme

$$E\int_a^b \mathrm{d}x \left(\frac{J(x)}{2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2,$$

kde x míří podél směru nezdeformované tyče a y ve směru deformace. Pokud je tyč položena na pružné podložce, je třeba dále uvažovat energii deformace této pružné podložky, která je dána jako

$$\frac{K}{2}\int_a^b y^2(x)\mathrm{d}x,$$

kde K je kompresní modul.

Nakonec je třeba ještě uvážit lineární hustotu sil $q(x)$ působících na tyč, která je dána výrazem

$$\int_a^b q(x)y(x)\mathrm{d}x.$$

Jako jednoduchý příklad uvažme deformaci vlivem vlastní tíhy pro tyč kruhového (obecně proměnného) průřezu upevněnou na koncích. V tomto případě není přítomna podložka a tedy energie spojená s její deformací je nulová. Pro energii v tomto případě dostaneme funkcionál

$$I[y]=\int_0^\ell \mathrm{d}x\left[\frac{EJ}{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+\lambda g y\right],$$

kde ℓ je délka tyče, λ její lineární hustota a g gravitační zrychlení. Vhodnou volbou jednotek na ose x a y lze odstranit všechny rozměrné konstanty $x\to x\ell, y\to y\lambda g/E$ až na konstantní kladný faktor před integrálem, který je pro minimalizaci nepodstatný. Dostaneme tedy

$$I[y]=\int_0^1 \mathrm{d}x\left[\frac{1}{2}J(x)\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2+y\right].$$

Je tedy $q(x)=1$. Proveďme nyní první variaci funkcionálu I.

$$\begin{aligned}\delta I=\int_0^1\left[J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2\delta y}{\mathrm{d}x^2}+q\delta y\right]\mathrm{d}x=\\ =\int_0^1\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}+q\delta y\right]\mathrm{d}x+\left[J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right]_0^1=\\ =\int_0^1\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)+q\right]\delta y\mathrm{d}x-\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)\delta y\right]_0^1+\left[J\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}\delta y}{\mathrm{d}x}\right]_0^1.\end{aligned}$$

Můžeme tedy uvážit různé druhy okrajových podmínek. Jsou to např.

(a) Oba konce tyče jsou vodorovně vetknuty do bočních stěn. Pak $\delta y(0)=\delta y(1)=\delta y'(0)=\delta y'(1)=0$.

(b) Levý konec tyče je vetknut do boční stěny a pravý konec je volný. Pak $\delta y(0)=\delta y'(0)=0$ a $Jy''(1)=(Jy'')'(1)=0$.

(c) Levý i pravý konec tyče jsou volně položeny přes hrany bočních stěn. Pak $y(0) = y(1) = Jy''(0) = Jy''(1) = 0$.

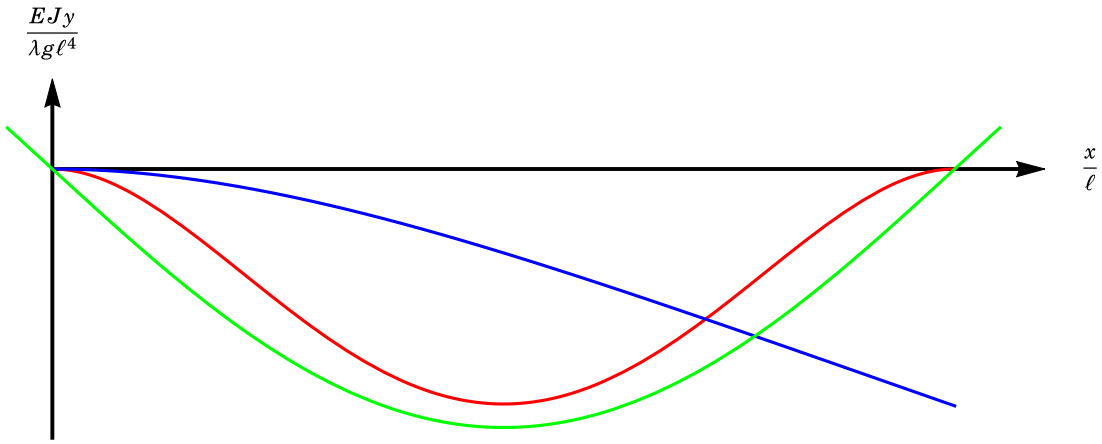
Euler-Lagrangeovy rovnice

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(J\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right) + q = 0$$

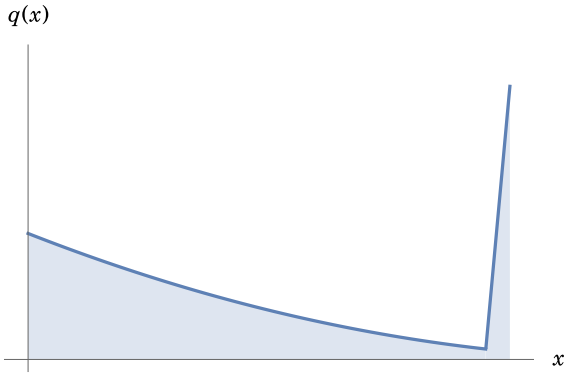
společně s okrajovými podmínkami (a), (b), resp. (c) pro neproměnný profil $J = 1$ průřezu a $q = 1$ dávají řešení

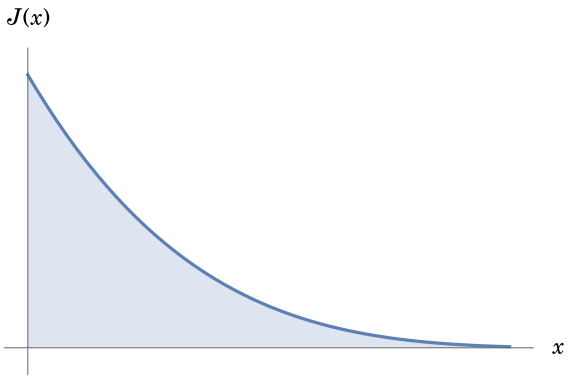
$$\text{(a)} \quad y = -\frac{1}{24}(1-x)^2x^2, \quad \text{červeně}$$
$$\text{(b)} \quad y = -\frac{1}{24}x^2(x^2-4x+6), \quad \text{modře}$$
$$\text{(c)} \quad y = -\frac{1}{24}x(1-x)(1+x-x^2), \quad \text{zeleně}$$

vyobrazená níže



V přídadě, že J a q nejsou konstantní, je přímé řešení Euler-Lagrangeovy rovnice nesnadné a nabízí se Ritzova metoda. Vypočítáme deformaci tyče vetknuté kolmo ve svislé stěně. Poloměr tyče nechť se mění lineárně od jednoho konce k druhému, tj. $a = a_0 + (a_1 - a_0)x$, kde a_0 je poloměr na levém konci a a_1 její poloměr na pravém konci. Kromě vlastní tíhy tyče je na jejím konci zavěšeno další těleso, tj. $q(x) = mY(x-s)Y(1-x)\frac{x-s}{s(1-s)}$, kde $0 < s < 1$. Viz níže na obrázcích: zátěž tyče (nalevo), plošný moment setrvačnosti tyče (napravo).





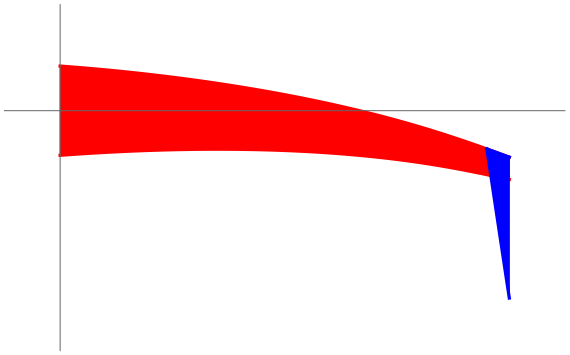
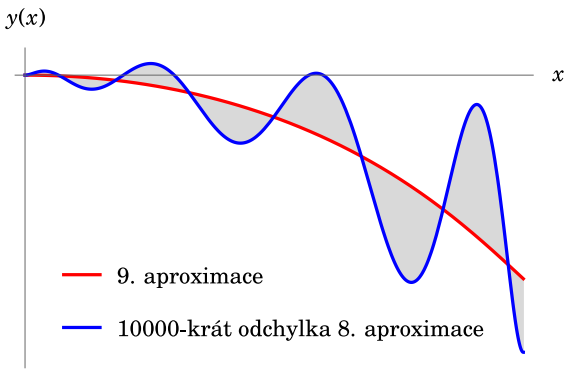
Energie, kterou budeme minimalizovat tedy je

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \left\{ \tfrac{1}{2}[a_0+(a_1-a_0)x]^4 \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)^2 + \tfrac{1}{2}ky^2 + \left\{ [a_0+(a_1-a_0)x]^2 + mY(x-s)Y(1-x)\frac{x-s}{s(1-s)} \right\} y \right\}$$

Zvolil jsem $m=2$, $k=0.001$, $s=0.95$, $a_0=1$, $a_1=0.25$. Jako systém aproximujících funkcí vezmeme

$$\varphi_n = x^{n+1}$$

Pro systém $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_9\}$ mimimalizujeme funkci $I(a_1,\ldots,a_9)$ a dostaneme

$$y_9 = 0.650678x^{10} - 2.37751x^9 + 3.63477x^8 - 3.00055x^7 + 1.43313x^6 - 0.407464x^5 + \\ + 0.0530489x^4 - 0.019224x^3 - 0.0960484x^2.$$

Pro částečnou kontrolu správnosti výsledku provedeme kontrolu rozdílu 8. aproximace od 9. aproximace. Níže nalevo je znázorněna deformovaná tyč a napravo je znázorněna chyba násobená 10^4!