SPINORY A MINKOWSKÉHO PROSTOROČAS

Michael Krbek

Obsah

1. Lineární a antilineární zobrazení

Zobrazení $\varphi\colon U \to V$ vektorových prostorů nad polem komplexních čísel $\mathbb{C}$ se nazývá *antilineárním*, splňuje-li následující podmínku

$$\varphi(au+bv) = \overline{a}\varphi(u) + \overline{b}\varphi(v) \quad \text{pro všechna } u,v \in U \text{ a } a,b \in \mathbb{C}.$$

Složením dvou antilineárních zobrazení dostaneme lineární zobrazení, složením lineárního a antilineárního zobrazení dostaneme antilineární zobrazení. Označme $U^\sharp$ vektorový prostor všech antilineárních funkcí $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$, $U^\star$ jako obvykle představuje duální prostor, tj. prostor lineárních funkcí $\varphi\colon U \to \mathbb{C}$. Obdobně jako pro duální prostor (věta o dvojím duálu) existuje rovněž kanonický izomorfizmus $U \to (U^\sharp)^\sharp$ explicitně daný přiřazením $u \mapsto (\varphi \mapsto \overline{\varphi(u)})$. Povšimněme si, že

$$\overline{\varphi(au)} = \overline{\overline{a}\varphi(u)} = a\overline{\varphi(u)},$$

a tedy izomorfizmus $U \to (U^\sharp)^\sharp$ je lineární zobrazení. Je injektivní a tedy bijektivní, vzhledem ke konečné dimenzi U.

Definujme $\overline{U} = U^{\star\,\sharp}$, tj. uvažujeme antilineární funkce na duálním prostoru k U. Nechť je zadána lineární funkce $\varphi\colon W \to \mathbb{C}$ na vektorovém prostoru W. Potom antilineární funkci dostaneme složením této funkce s komplexním sdružením $\bar{\ }\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ takto

$$\overline{\varphi} = \bar{\ } \circ \varphi, \quad \text{tj. } \overline{\varphi}(w) = \overline{\varphi(w)}, \quad \text{pro všechna } w \in W.$$

Naopak, začneme-li s antilineární funkcí, získáme složením s komplexním sdružením funkci lineární. Čili např. nejobecnější lineární funkce na $U^\star$ je $\varphi \mapsto \varphi(u)$, $u \in U$, tím pádem nejobecnější antilineární funkci na $U^\star$ dostaneme jako $\varphi \mapsto \overline{\varphi(u)}$, $u \in U$. Můžeme také psát $\varphi = \overline{\psi} = \bar{\ } \circ \psi$, kde $\psi \in U^\sharp$ a uvažovat předchozí přiřazení jako $\psi \mapsto \psi(u)$, což je lineární funkce na $U^\sharp$ a tedy kanonicky platí $\overline{U} = U^{\star\sharp} = U^{\sharp\star}$. Tímto způsobem dostaneme jednoduše

$$\overline{\overline{U}} = (U^{\star\sharp})^{\sharp\star} = U.$$

Dále máme antilineární zobrazení $u \mapsto \overline{u}$, $u \in U$, dané rovností

$$\overline{u}(\varphi) = \overline{\varphi(u)}, \qquad \text{pro všechna } \varphi \in U^\star,$$

kde $u \in U^{\star\star} = U$. Tuto rovnost lze zapsat i jako

$$\overline{u}(\psi) = \psi(u), \quad \text{kde } \psi = \overline{\varphi} \in U^\sharp.$$

Celkem tedy

$$\overline{\overline{u}}(\varphi) = \overline{\psi(u)} = \varphi(u) = u^{\star\star}(\varphi) = u(\varphi), \quad \text{pro všechna } \varphi \in U,$$

tj. $\overline{\overline{u}} = u$.

Pro tenzorový součin máme $\overline{U \otimes V} = \overline{U} \otimes \overline{V}$ pomocí zobrazení $\bar{\ }\colon U \otimes V \to \overline{U} \otimes \overline{V}$, $u \otimes v \mapsto \overline{u \otimes v} = \overline{u} \otimes \overline{v}$.

Buď B bilineární forma na U. Potom $\overline{B}$ můžeme považovat za bilineární formu na $\overline{U}$ danou předpisem

$$\overline{B}(\overline{u}, \overline{v}) = \overline{B(u, v)}. \tag{1}$$

Skutečně platí

$$\overline{B}(a\overline{u}, \overline{v}) = \overline{B}(\overline{\overline{a}u}, \overline{v}) = \overline{B(\overline{a}u, v)} = \overline{\overline{a}B(u, v)} = a\overline{B(u, v)} = a\overline{B}(\overline{u}, \overline{v}),$$

pro všechna $a \in \mathbb{C}$ a $u, v \in U$. Analogicky se dokáže linearita ve druhé složce. Je-li bilineární zobrazení B symetrické (resp. antisymetrické), je také $\overline{B}$ symetrické (resp. antisymetrické).

2. Komplexní sdružení a reálné formy

Komplexní sdružení na komplexním vektorovém prostoru U je antilineární zobrazení $U \to U$, jehož čtverec je identita. Předpokládejme, že

$$\dagger : u \mapsto u^\dagger$$

je jedno takové komplexní sdružení. Potom množina vektorů, které se při komplexním sdružení nemění, tj.

$$\{u \mid u^\dagger = u\}$$

je reálným vektorovým prostorem. Takto vzniklý vektorový prostor nazýváme *reálnou formou* komplexního vektorového prostoru U vzhledem ke komplexnímu sdružení †. Tento vektorový prostor budeme označovat $U^{\mathbb{R}}_{\dagger}$ nebo je $U^{\mathbb{R}}$, pokud je komplexní sdružení † jasně určeno z kontextu. Pokud $u \in U^{\mathbb{R}}$, potom $v = \mathrm{i}u$ vyhovuje rovnici $v^\dagger = -v$ a každý vektor $w \in U$ lze zapsat jednoznačně jako

$$w = u + \mathrm{i}v, \quad \text{kde } u, v \in U^{\mathbb{R}}.$$

Zjevně platí

$$u = \tfrac{1}{2}(w + w^\dagger), \quad v = -\tfrac{\mathrm{i}}{2}(w - w^\dagger).$$

Příklady komplexního sdružení jsou:

- Na vektorovém prostoru komplexních matic řádu n je $\dagger = \bar{-} \circ {}^t$, tj. kompozice transpozice a komplexního sdružení jednotlivých prvků, jiná možnost je pouze komplexní sdružení bez transpozice.
- Buď V reálný vektorový prostor, komplexní vektorový prostor vznikne pomocí tenzorového součinu $U = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$. Komplexní sdružení je definováno jako

  $$(v \otimes_{\mathbb{R}} a)^\dagger = v \otimes_{\mathbb{R}} \overline{a}$$

  a reálná forma $U^{\mathbb{R}}$ daná tímto komplexním sdružením splývá s původním reálným vektorovým prostorem V.

Poslední příklad je univerzálním příkladem komplexního vektorového prostoru s komplexním sdružením.

V dalším budeme potřebovat dvě další podoby předchozí konstrukce. Předpokládejme, že je dán komplexní vektorový prostor U a zkonstruujme $U \otimes \overline{U}$. Komplexní sdružení definujeme jako

$$\dagger : u \otimes \overline{v} \mapsto (u \otimes \overline{v})^\dagger = v \otimes \overline{u}.$$

Reálná forma je v tomto případě $(U \otimes \overline{U})^R = \langle u \otimes \overline{u} | u \in U \rangle$.

Druhá konstrukce se provede obdobně s vektorovým prostorem $V \oplus \overline{V}$ a komplexní sdružení je zadáno jako

$$\dagger\colon u \ + \overline{v} \mapsto (u \ + \overline{v})^{\dagger} = v + \overline{u}. \tag{2}$$

Reálná forma $(V \oplus \overline{V})^{\mathbb{R}}$ daná tímto komplexním sdružením je $\{u + \overline{u}\}$ a lze ji ztotožnit s V uvažovaným jako reálný vektorový prostor (zapomeneneme na násobení komplexní jednotkou).

Předpokládejme dále, že G je komplexně bilineární symetrické zobrazení na $V \times V$. Podle (1) definujeme komplexně bilineární symetrické zobrazení na $\overline{V} \times \overline{V}$. Můžeme proto definovat komplexně bilineární formu $G \oplus \overline{G}$ na $V \oplus \overline{V}$ tak, že prohlásíme V a $\overline{V}$ za ortogonální, tj.

$$(G \oplus \overline{G})(u + \overline{v}, w + \overline{z}) = G(u, w) + \overline{G}(\overline{v}, \overline{z}).$$

Na reálné formě $(V \oplus \overline{V})^{\mathbb{R}}$ dochází k restrikci na

$$(G \oplus \overline{G})(u + \overline{u}, v + \overline{v}) = 2\operatorname{Re} G(u, v).$$

Identifikujeme-li nyní reálnou formu $(V \oplus \overline{V})^{\mathbb{R}}$ s reálným vektorovým prostorem V, potom se symetrická bilineární forma $G \oplus \overline{G}$ vyjádří jako $2\operatorname{Re} G$. Předpokládejme dále, že G je nedegenerovaná a $(e_1, \dots, e_n)$ je ortonormální báze V vzhledem ke G, tj.

$$G(e_i, e_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Potom je $(e_1, \dots, e_n, \mathrm{i}e_1, \dots, \mathrm{i}e_n)$ ortonormální bazí v reálném vektorovém prostoru U se symetrickým bilineárním zobrazením $2\operatorname{Re} G(\mathrm{i}e_j, \mathrm{i}e_j) = -1$. To znamená, že $2\operatorname{Re} G$ má na reálném vektorovém prostoru V signaturu (n, n).

3. Struktury na tenzorových součinech

Buďte U, V komplexní vektorové prostory. Potom

$$\Lambda^2(U \otimes V) = S^2 U \ \otimes \Lambda^2 V \ \oplus \Lambda^2 U \otimes S^2 V, \tag{3}$$

kde vnější součin je dán vztahem

$$(u \otimes v) \wedge (w \otimes z) = uw \otimes v \wedge z \ + u \wedge w \otimes vz,$$

kde uw (resp. vz) značí symetrický součin v $S^2 U$ (resp. $S^2 V$). Nechť je dále na U (resp. V) definována antisymetrická bilineární forma ω (resp. η). Tyto indukují symetrickou bilineární formu na $U \otimes V$ předpisem

$$\langle u \otimes v, w \otimes z \rangle = \omega(u, w)\eta(v, z).$$

Tato symetrická bilineární forma na $U \otimes V$ indukuje standardním způsobem symetrickou bilineární formu na druhé vnější mocnině $\Lambda^2(U \otimes V)$. Explicitně máme

$$\begin{aligned}\langle u_1 \otimes v_1 \wedge u_2 \otimes v_2, u_3 \otimes v_3 \wedge u_4 \otimes v_4 \rangle &= \\ &= \omega(u_1,u_3)\omega(u_2,u_4)\eta(v_1,v_3)\eta(v_2,v_4) - \omega(u_1,u_4)\omega(u_2,u_3)\eta(v_1,v_4)\eta(v_2,v_3)\end{aligned}$$

Tento skalární součin můžeme interpretovat rovněž jinak. Definujme skalární součin na S^2U (resp. $\Lambda^2 U$)) předpisem

$$\langle u_1u_2, u_3u_4\rangle = \tfrac{1}{2}(\omega(u_1,u_3)\omega(u_2,u_4) + \omega(u_1,u_4)\omega(u_2,u_3)),$$

resp.

$$\langle u_1 \wedge u_2, u_3 \wedge u_4\rangle = \tfrac{1}{2}(\omega(u_1,u_3)\omega(u_2,u_4) - \omega(u_1,u_4)\omega(u_2,u_3)),$$

a obdobně pro S^2V a Λ^2V.

Výše uvedenou konstrukci aplikujeme na situaci $V = \overline{U}$ a $\eta = \overline{\omega}$. Komplexní sdružení je v této situaci dáno na homogenních prvcích jako

$$\begin{aligned}\dagger\colon S^2(U) \otimes \Lambda^2(\overline{U}) &\to \Lambda^2(U) \otimes S^2(\overline{U}) \\ uv \otimes \overline{w} \wedge \overline{z} &\mapsto w \wedge z \ \otimes \overline{uv},\end{aligned}$$

což je situace popsaná výše v (2) pro přímý součet, v roli vektorového prostoru V je $S^2(U) \otimes \Lambda^2(\overline{U})$. Symetrická bilineární forma na $S^2(U) \otimes \Lambda^2(\overline{U})$ je přirozeně indukována antisymetrickou bilineární formou ω na U.

4. Spinory a Minkowského prostoročas

V tomto případě je U komplexní vektorový prostor, $\dim_{\mathbb{C}} U = 2$ s antisymetrickou bilineární formou ω. Konstrukcí z předchozího odstavce získáme symetrickou bilineární formu na $U \otimes \overline{U}$. Musíme nyní ověřit, že restrikce této symetrické bilineární formy na reálný podprostor $(U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}}_{\dagger}$, kde $\dagger\colon u \otimes \overline{v} \mapsto v \otimes \overline{u}$, má signaturu $(1,3)$, tedy že se jedná o Minkowského prostoročas. Zvolme libovolný vektor $u \in U$, $u \neq 0$. Povšimněme si, že pro libovolný vektor $w \in U$ je vektor $u \otimes \overline{w}$ vzhledem k indukované symetrické bilineární formě světelný. Vskutku

$$\langle u \otimes \overline{w}, u \otimes \overline{w}\rangle = \omega(u,u)\omega(w,w).$$

Dále zvolme další nenulový vektor $v \in U$ tak, aby $\omega(u,v) = 1/\sqrt{2}$. Potom platí

$$\langle u \otimes \overline{u} + v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u} + v \otimes \overline{v}\rangle = \langle u \otimes \overline{u}, v \otimes \overline{v}\rangle + \langle v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u}\rangle = 2\omega(u,v)^2 = 1.$$

Vektor $u \otimes \overline{u} + v \otimes \overline{v}$ je reálný, časupodobný a má jednotkovou velikost. Obdobně dostáváme prostorupodobné reálné vektory

$$\begin{aligned}\langle u \otimes \overline{u} - v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u} - v \otimes \overline{v}\rangle &= -1\\ \langle u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}, u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}\rangle &= -1\\ \langle \mathrm{i}(u \otimes \overline{v} - v \otimes \overline{u}), \mathrm{i}(u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u})\rangle &= -1.\end{aligned}$$

Všechny čtyři vektory

$$(u \otimes \overline{u} + v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u} - v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}, \mathrm{i}(u \otimes \overline{v} - v \otimes \overline{u})) \tag{4}$$

tvoří ortogonální bázi a jsou reálné, skutečně tedy má symetrická bilineární forma na $(U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}}$ výše značená pouze $\langle \cdot, \cdot \rangle$ signaturu $(1,3)$.

Označme $\lambda = u \wedge v$; je to jediný prvek $\Lambda^2 U$, pro který platí $\omega(a) = 1/2$. Dále uvažme reálný světelný vektor $u \otimes \overline{u}$ a další prostorupodobný vektor $u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}$ a spočtěme jejich vnější součin

$$\sigma_u = (u \otimes \overline{u}) \wedge (u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}) == u^2 \otimes \overline{\lambda} + \lambda \otimes \overline{u}^2.$$

Jedná se o prvek prostoru $\Lambda^2(U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}}$, který je vnějším součinem světelného a prostorupodobného vektoru, tj. určuje světelnou rovinu σ_u obsahující světelný vektor $u \otimes \overline{u}$. Konstrukce této světelné roviny nezávisí na volbě v, místo něj lze zvolit též $v + ku$, $k \in \mathbb{C}$, stále platí $\omega(u, v + ku) = 1/2$.

Každý nenulový vektor $u \in U$ tedy určuje světelný vektor $\nu_u = u \otimes \overline{u} \in (U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}}$ a světelnou rovinu určenou rozložitelnou 2-formou $\sigma_u = u^2 \otimes \overline{\lambda} + \lambda \otimes \overline{u}^2$. Dvojici vektor, rovina (ν_u, σ_u) se říká obvykle *vlajka*.

Vynásobíme-li u fázovým faktorem $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, zůstane světelný vektor $u \otimes \overline{u}$ zjevně nezměněn. Pro světelnou rovinu ale dostaneme $\sigma_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} u} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\psi} u^2 \otimes \overline{\lambda} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\psi} \lambda \otimes \overline{u}^2$. Fázové faktory odstraní nahrazení vektoru v vektorem $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi} v$, takže prostorupodobný vektor $u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}$ přejde na $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\psi} u \otimes \overline{v} + \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\psi} v \otimes \overline{u}$, což odpovídá rotaci o úhel 2ψ v rovině určené vektory $(u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}, \mathrm{i}(u \otimes \overline{v} - v \otimes \overline{u}))$. Rovinu $\sigma_{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} u}$ získáme z roviny σ_u rotací o úhel 2ψ.

Uvažme nyní obecnou transformaci $\alpha : U \to U$ zachovávající antisymetrickou formu ω. Tato transformace indukuje Lorentzovu transformaci $L_\alpha : (U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}} \to (U \otimes \overline{U})^{\mathbb{R}}$, $L_\alpha \in \mathbb{SO}_0(1,3)$. Stejnou transformaci rovněž indukuje $-\alpha$.

Příklad 1: Určete explicitní tvar transformace α, jež zachovává antisymetrickou formu ω, tj. $\omega(\alpha(u), \alpha(v)) = \omega(u, v)$ pro všechna $u, v \in U$.

Příklad 2: Určete explicitní tvar transformace L_α pro konkrétně zadané α.

5. Operace se spinory a jejich odraz na vektorech v Minkowského prostoročase

Násobení skalárem. Vektor $u \in U$ můžeme násobit skalárem $a \in \mathbb{C}$. Nulový vektor $u \otimes \overline{u}$ přejde na nulový vektor $a\overline{a}u \otimes \overline{u}$, je tedy vynásoben čtvercem čtvercem modulu komplexního čísla a. Rozložitelná 2-forma $u^2 \otimes \overline{\lambda} + \lambda \otimes \overline{u}^2$ přejde v rozložitelnou 2-formu $a^2u^2 \otimes \overline{\lambda} + \overline{a}^2\lambda \otimes \overline{u}^2$, tzn. plocha vlajky se zvětší $a\overline{a}$-krát, což odpovídá zvětšení vektoru $u \otimes \overline{u}$ a vlajka se zároveň otočí o úhel $2\arg a$ v rovině $(u \otimes \overline{v} + v \otimes \overline{u}, \mathrm{i}(u \otimes \overline{v} - v \otimes \overline{u}))$.

Evaluace dvou spinorů na antisymetrické formě ω. Vezměme dva spinory $u, v \in U$ a spočtěme komplexní číslo $\omega(u,v)$. Dále vezměme jim odpovídající světelné vektory $u \otimes \overline{u}$ a $v \otimes \overline{v}$ a spočtěme velikost jejich rozdílu pomocí symetrické bilineární formy $\langle\cdot,\cdot\rangle$ indukované formou ω, máme

$$\langle u \otimes \overline{u} - v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u} - v \otimes \overline{v}\rangle = -\langle u \otimes \overline{u}, v \otimes \overline{v}\rangle - \langle v \otimes \overline{v}, u \otimes \overline{u}\rangle = -2\omega(u,v)\overline{\omega(u,v)}.$$

Tím jsme interpretovali modulus $\omega(u,v)$, musíme ještě interpretovat argument $\arg\omega(u,v)$. Tento argument bude souviset s úhlem, který svírají světelné roviny σ_u a σ_v. Zadejme $\lambda = w \wedge z$, $\omega(\lambda) = 1/2$. Potom máme

$$\langle \sigma_u, \sigma_v\rangle = \omega(u,v)^2 + \overline{\omega(u,v)^2} = 2\,\mathrm{Re}\,\omega(u,v)^2,$$

z čehož okamžitě plyne, že

$$\arg\omega(u,v) = \frac{1}{2}\arg\omega(u,v)^2 = \frac{1}{2}\arccos\frac{\mathrm{Re}\,\omega(u,v)^2}{\omega(u,v)\overline{\omega(u,v)}} = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{\langle\sigma_u,\sigma_v\rangle}{\langle \nu_u - \nu_v, \nu_u - \nu_v\rangle}\right).$$

Sčítání spinorů. Sčítání spinorů úzce souvisí s antisymetrickou bilineární formou ω, platí totiž

$$u + v = w \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(u,z) + \omega(v,z) = \omega(w,z) \text{ pro všechna } z \in U. \tag{5}$$

Dále bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $u \neq av$. Pokud by totiž platilo $u = av$, potom $w = (a+1)v$ a jedná se o násobení skalárem. Ekvivalentní tvrzení v 5 vpravo stačí ověřit místo pro všechna $z \in U$ pouze pro lineárně nezávislý systém dvou vektorů ($\dim_{\mathbb{C}} U = 2$), vyberme tedy přímo (u,v). Musí tedy platit $\omega(u,v) = -\omega(v,w)$ a $\omega(u,v) = -\omega(w,u)$. Z předchozího máme, že

$$\begin{aligned}
|\omega(u,v)|^2 &= -\frac{1}{2}\langle \nu_u - \nu_v, \nu_u - \nu_v\rangle \\
|\omega(v,w)|^2 &= -\frac{1}{2}\langle \nu_v - \nu_w, \nu_v - \nu_w\rangle \\
|\omega(w,u)|^2 &= -\frac{1}{2}\langle \nu_w - \nu_u, \nu_w - \nu_u\rangle.
\end{aligned}$$

Tím jsme ukázali, že vektory ν_u, μ_v a ν_{u+v} tvoří rovnostranný trojúhelník v Minkowského prostoročase. Pro světelné roviny σ_u, σ_v a σ_{u+v} máme obdobně

$$\arg\omega(u,v) = \arg\omega(w,v) = \arg\omega(u,w),$$

a porovnáním dostaneme

$$\langle\sigma_u,\sigma_v\rangle = \langle\sigma_{u+v},\sigma_v\rangle = \langle\sigma_u,\sigma_{u+v}\rangle,$$

tj. patřičné roviny svírají shodné úhly.

6. Antisymetrické 2-formy a spinory

Využijme vzorec (3) poněkud jiným způsobem, přičemž za U dosadíme $U^\star$ a za V zase $\overline{U}^\star$, tj.

$$\Lambda^2(U^\star \otimes \overline{U}^\star) = S^2U^\star \otimes \Lambda^2\overline{U}^\star \oplus \Lambda^2U^\star \otimes S^2\overline{U}^\star.$$

Vezměme libovolný symetrický spinor $\varphi \in S^2(U^\star)$, tento lze interpretovat jako symetrickou bilineární formu na U a konstrukcí s předpisem (1) lze definovat symetrickou bilineární formu na $\overline{U}$, tj. symetrický spinor $\overline{\varphi} \in S^2(\overline{U}^\star)$. Antisymetrická bilineární forma $\omega \in \Lambda^2U^\star$ určuje také antisymetrickou formu $\overline{\omega} \in \Lambda^2(\overline{U}^\star)$. Výše uvedené tedy ukazuje, že symetrický spinor $\varphi \in S^2(U^\star)$ jednoznačně určuje antisymetrickou 2-formu $F \in \Lambda^2(U^\star \otimes \overline{U}^\star)_\mathbb{R}$, již dříve jsme ukázali, že $(U^\star \otimes \overline{U}^\star)_\mathbb{R} = M^\star$ je Minkowského prostoročas. Naopak, reálná antisymetrická 2-forma F na M jednoznačně určuje symetrický spinor φ na U (dimenzionálně vše souhlasí, antisymetrická 2-forma na M má $3+2+1=6$ nezávislých reálných komponent, symetrická 2-forma na U má $2+1=3$ nezávislé komplexní komponenty, tj. opět šest reálných). Zobrazení $Z : S^2U \to \Lambda^2M$ je tedy kanonický izomorfizmus.

Příklad 3: Spočtěte explicitně izomorfizmus popsaný výše. Pracujte v duální bázi $(u^\star, v^\star)$ k bázi (u,v) z odstavce 4. a použijte duální bázi k ortonormální bázi v M, jež byla rovněž zmíněna v tomto odstavci.

Na prostorech antisymetrických forem nad prostorem M s vnitřním součinem $\langle\cdot,\cdot\rangle$, lze zavést lineární operaci $* : \Lambda^k(M^\star) \to \Lambda^{n-k}(M^\star)$, $\dim M = n$ zvanou Hodgeova dualita definičním vztahem

$$F \wedge (*G) = \langle F, G\rangle\omega,$$

který musí platit pro všechna $F \in \Lambda^kM^\star$. Skalární součin na M určuje skalární součin na $\Lambda^kM^\star$, který značíme stejně, $\omega \in \Lambda^nM^\star$ označujeme objemový element definovaný tímto skalárním součinem (požadujeme, aby krychle určená n-ticí ortonormálních vektorů měla jednotkový objem). Potom musí platit $Z(-\mathrm{i}\varphi) = *Z(\varphi)$.

Příklad 4: Předchozí tvrzení dokažte. Opět použijte bázi z předchozího příkladu.