



# **YOUNGOVY DIAGRAMY, TABULKY A JEJICH UŽITÍ**



# Reference

- [Mathworld] Eric W. Weisstein. "Partition Function  $P$ .",  
MathWorld – A Wolfram Web Resource.  
<http://mathworld.wolfram.com/PartitionFunctionP.html>
- [Sternberg] Shlomo Sternberg, *Group theory and physics*, Cambridge University Press, 1994, ISBN 0 521 55885 9
- [Wybourne] Brian G. Wybourne, Symmetric functions and the symmetric group, Lecture Notes,  
<http://www.phys.uni.torun.pl/~bgw/Symfn.html>
- [Fulton] William Fulton, *Young tableaux*, Cambridge University Press, 1997, ISBN 0 521 56724 6
- [King] Ronald C. King, Generalized Young tableaux and the general linear group, *Journal of Mathematical Physics* (11), leden 1970
- [Kraft-Procesi] Hanspeter Kraft, Claudio Procesi, *Invariant theory – A primer*, preprint, 1996.

# 1. Motivace

Jistý konkrétní problém ve variačním počtu vyžaduje rozklad souborů veličin indexovaných horními a dolními indexy na bezestopé části.

Diferenciální  $q$ -forma na  $r$ -tém prodloužení fibrované variety  $Y \rightarrow X$  je zapsána v adaptovaných souřadnicích takto

$$\rho = \sum_{p=0}^q A_{\sigma_1}^{J_1} \cdots A_{\sigma_k}^{J_k} \, j_{p+1} \cdots j_q \, dy_{J_1}^{\sigma_1} \wedge \cdots \wedge dy_{J_p}^{\sigma_p} \wedge dx^{j_{p+1}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_q}.$$

Z hlediska variačního počtu jsou podstatné pouze bezestopé komponenty. Komponenty obsahující stopu jsou variačně triviální.

Takový lokální rozklad lze provést poněkud obecněji na  $r$ -jetových prodlouženích  $n$ -rozměrných podvariet  $(n + m)$ -rozměrné variety  $Y$ .

Přestože veličiny v původním problému nemají tenzorový charakter, vykazuje problém **některé** shodné rysy s problémem rozkladu tenzorů podle stop.

## 2. Prostor smíšených tenzorů

Uvažujeme vektorový prostor  $V$ ,  $\dim V = n$ , duální vektorový prostor  $V^*$  a k nim asociovaný tenzorový prostor

$$T_s^r V = \bigotimes^r V \otimes \bigotimes^s V^*.$$

Tento prostor nazýváme **prostorem smíšených tenzorů typu  $\binom{r}{s}$** .

V konkrétní bázi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vektorového prostoru  $V$  píšeme

$$t = t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

nebo ekvivalentně

$$t_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = t(e^{i_1}, \dots, e^{i_r}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s}).$$

# 3. Stopa tenzoru

Uvažujme lineární zobrazení

$$C_\ell^k : T_s^r V \ni t \rightarrow C_\ell^k t \in T_{s-1}^{r-1} V,$$

které je pro libovolnou bázi  $\{e_1, \dots, e_n\}$  vektorového prostoru  $V$  a pevně zvolená  $k \in \{1, \dots, r\}$  a  $\ell \in \{1, \dots, s\}$  dané jako

$$T_s^r V \ni t \rightarrow C_\ell^k t = \sum_{i=1}^n t(\dots, \overset{k}{\downarrow} e_i, \dots; \dots, \overset{\ell}{\downarrow} e^i, \dots) \in T_{s-1}^{r-1} V$$

Zobrazení  $C_\ell^k$  se nazývá  $\binom{k}{\ell}$ -**kontrakcí** a tenzor  $C_\ell^k t$  se nazývá  $\binom{k}{\ell}$ -**stopou tenzoru  $t$** .

Tenzoru, jehož všechny kontrakce jsou nulové, říkáme **bezestopý**. (Obecně existuje  $r \cdot s$  různých kontrakcí.)

# 4. Rozklad tenzorů podle stop

Úloha tedy zní:

**Rozložit obecný tenzor  $t \in T_s^r V$  na část obsahující stopu a část bezestopou.**

Formálně můžeme psát

$$t = \tilde{t} + \sum_{k=1}^r \sum_{\ell=1}^s \text{id}_k^\ell C_\ell^k t,$$

kde  $\tilde{t}$  je bezestopá část  $t$  a  $\text{id}_k^\ell$  je Kroneckerův tenzor (souřadnicové vyjádření je dáno Kroneckerovým  $\delta$ ).

Takový rozklad zřejmě existuje. Ponechme nyní stranou otázku jeho jednoznačnosti.

Tuto proceduru lze použít na rozklad podle stop každého z  $rs$  tenzorů  $C_\ell^k t \in T_{s-1}^{r-1} V$ . Postupujeme-li takto  $\min(r, s)$ -krát, na pravé straně zůstanou pouze součiny Kroneckerových tenzorů a buď čistě kontravariantních nebo kovariantních tenzorů řádu  $|r - s|$ ; podle toho, zda  $r \leq s$  nebo  $r > s$ .

# 5. Symetrická grupa

Budeme nyní studovat reprezentace symetrické grupy ve vektorovém prostoru  $T^k V$  čistě kontravariantních (analogicky kovariantních) tenzorů.

Prvek  $s \in \mathfrak{S}_k$  symetrické grupy permutací  $k$  symbolů můžeme zapsat několika způsoby. V dalším budeme symboly označovat jako  $\{1, \dots, k\}$ .

— **přímý** zápis, např.  $s \in \mathfrak{S}_5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

— zápis **pomocí cyklů**, např. pro  $s$

$$\begin{array}{l} 1 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \\ 3 \rightarrow 3 \end{array} \implies (1425)(3)$$

**Konjugační třídy**  $r \sim s \Leftrightarrow \exists t \in \mathfrak{S}_k : r = tst^{-1}$  jsou určeny permutacemi se stejnou strukturou cyklů.

# 6. Youngovy diagramy

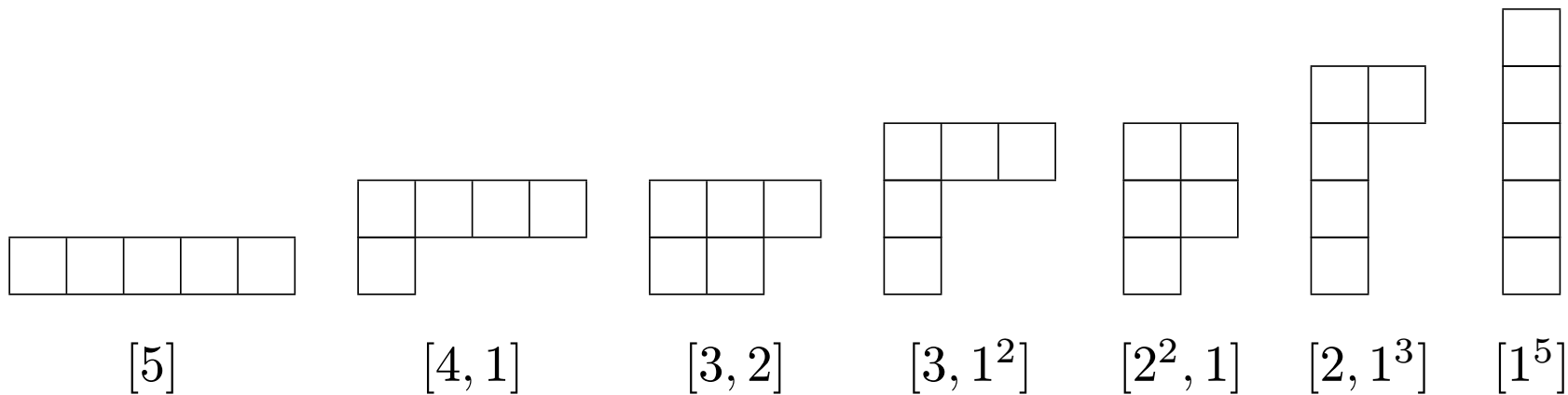
Třídy permutací jsou tedy jednoznačně určeny počtem cyklů délky 1 až  $k$ :  $\#1, \dots, \#k$ . Ty jsou zřejmě omezeny podmínkou

$$\#1 + 2\#2 + \dots + k\#k = k.$$

S výhodou můžeme zavést soubor čísel  $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_k$

$$\lambda_i = \#i + \dots + \#k, \quad \text{pro } 1 \leq i \leq k.$$

Tomuto souboru čísel  $\lambda$  se říká rozklad  $\lambda \vdash k$ . Ke každému rozkladu můžeme přiřadit Youngův diagram  $[\lambda]$ , např. pro  $\mathfrak{S}_5$





# 7. Generování rozkladů

Program na vygenerování všech rozkladů daného čísla:

```
from __future__ import generators
def rozklady(k):
    if k == 0:
        yield []
        return

    for p in rozklady(k-1):
        yield p + [1]
    if p and (len(p) == 1 or p[-2] > p[-1]):
        yield p[:-1] + [p[-1] + 1]

for q in rozklady(5):
    print q,
```

Jeho výstup pro  $k = 5$ :

```
[1, 1, 1, 1, 1] [2, 1, 1, 1] [2, 2, 1] [3, 1, 1] [3, 2] [4, 1] [5]
```

# 8. Počet rozkladů

$k$	Počet rozkladů $p(k)$	$k$	Počet rozkladů $p(k)$
1	1	6	11
2	2	7	15
3	3	8	22
4	5	20	627
5	7	100	190569292

Vytvořující funkce pro počet rozkladů je

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^m} = \sum_{k=0}^{\infty} p(k)x^k.$$

Asymptotická formule (Ramanujan, Hardy, Rademacher):

$$p(k) \sim \frac{1}{4k\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2k/3}}$$

# 9. Reprezentace symetrické a obecné lineární grupy v prostoru $T^k V$ tenzorů

Pro každou konečnou grupu je počet ireducibilních reprezentací roven počtu konjugačních tříd, tj. počtu Youngových diagramů  $[\lambda]$  s  $k$  čtverečky ( $|\lambda| = k$ ).

**Symetrická grupa**  $\mathfrak{S}_k$  působí na homogenní prvky

$$\mathfrak{S}_k \times T^k V \ni (s, e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \rightarrow (e_{s^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{s^{-1}(k)}) \in T^k V.$$

**Obecná lineární grupa**  $\mathrm{GL}(n)$  působí na homogenní prvky

$$\mathrm{GL}(n) \times T^k V \ni (A, e_1 \otimes \cdots \otimes e_k) \rightarrow (Ae_1 \otimes \cdots \otimes Ae_k) \in T^k V.$$

Tyto dvě akce spolu zřejmě komutují. Lze ukázat, že mezi ireducibilními reprezentacemi těchto grup na  $T^k V$  je krásný vztah (Issai Schur, 1902).

**Ireducibilní reprezentace  $\mathfrak{S}_k$  resp.  $\mathrm{GL}(n)$  na  $T^k V$  jsou parametrizovány Youngovými diagramy  $\lambda$ ,  $|\lambda| = k$  s násobnostmi rovnými dimenzi ireducibilní reprezentace  $\mathrm{GL}(n)$  resp.  $\mathfrak{S}_k$  příslušné témuž Youngovu diagramu.**

# 10. Dimenze ireducibilních reprezentací

Formálně tedy platí

$$T^k V = \sum_{|\lambda|=k} [\lambda] \otimes \{\lambda\},$$

kde  $[\lambda]$  resp.  $\{\lambda\}$  jsou ireducibilní reprezentace  $\mathbb{GL}(n)$  resp.  $\mathfrak{S}_k$ .

Pro dimenzi  $\{\lambda\}$  dostaneme  $\dim\{\lambda\} = \frac{k!}{\text{hook}(\lambda)}$ ,

kde  $\text{hook}(\lambda)$  je součin délek všech háčeků.

Pro dimenzi  $[\lambda]$  získáme  $\dim[\lambda] = \frac{\prod_{i,j \in \lambda} (n + j - i)}{\text{hook}(\lambda)}$ .

$$\dim \left\{ \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \square & \square & & \end{array} \right\} = 70,$$

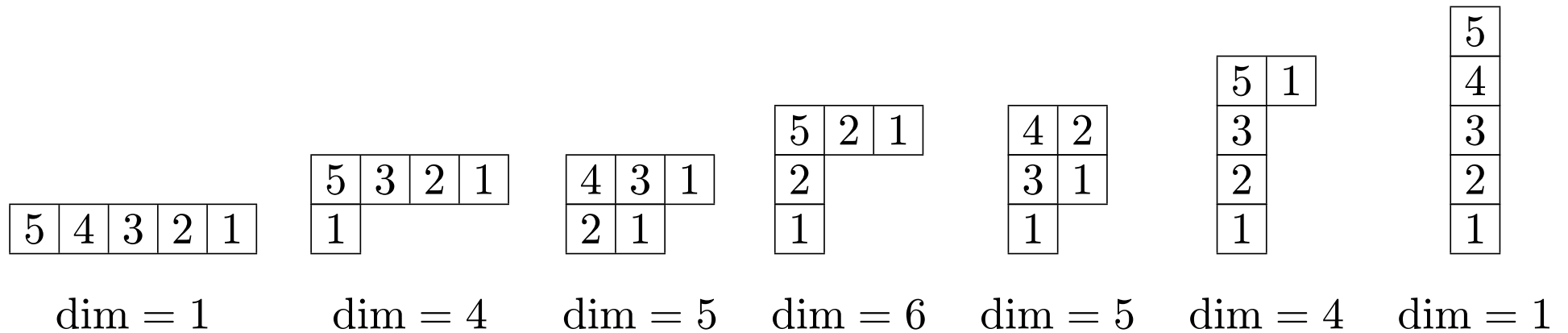
$$\text{hook} \left( \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \square & & & \end{array} \right) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 6 & 4 & 3 & 1 \\ \hline 4 & 2 & 1 & \\ \hline 1 & & & \\ \hline \end{array} = 576,$$

$$\dim \left[ \begin{array}{cccc} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \\ \square & & & \end{array} \right] = \frac{\prod \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline n & n+1 & n+2 & n+3 \\ \hline n-1 & n & n+1 & \\ \hline n-2 & & & \\ \hline \end{array}}{576}.$$

# 11. Rozklady ko- a kontravariantních tenzorů

Rozklad  $T^5V$  na ireducibilní komponenty vzhledem k akci  $\mathfrak{S}_5$ .

Existuje 7 různých Youngových diagramů



Celkem tedy dostáváme

$$T^5V = S^5V + 4 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \end{array} V + 5 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array} V + 6_3 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \end{array} V + 5_3 \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \end{array} V + 4_4 \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} V + 1_5 \Lambda^5 V,$$

kde Youngův diagram působí na tenzory jako

$$\lambda \rightarrow \sum_q \sum_p \text{sgn}(q) qp,$$

$p$  permutují řádky diagramu,  
 $q$  permutují sloupce diagramu.

# 12. Reprezentace na prostoru smíšených tenzorů

Budeme uvažovat reprezentaci grupy  $\mathrm{GL}(n)$  na prostoru smíšených tenzorů typu  $\binom{r}{s} T_s^r V$ , tzn.

$$\begin{aligned} \mathrm{GL}(n) \times T_s^r V &\ni (A, e_1 \otimes \cdots \otimes e_r \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^s) \rightarrow \\ &\rightarrow Ae_1 \otimes \cdots \otimes Ae_r \otimes A^{-1}e^1 \otimes \cdots \otimes A^{-1}e^s \in T_s^r V. \end{aligned}$$

Dále uvažujme reprezentaci grupy  $\mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s$  na prostoru smíšených tenzorů

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_r \times \mathfrak{S}_s \times T_s^r V &\ni (a, b, e_1 \otimes \cdots \otimes e_r \otimes e^1 \otimes \cdots \otimes e^s) \rightarrow \\ &\rightarrow e_{a^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e_{a^{-1}(r)} \otimes e^{b^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes e^{b^{-1}(s)} \in T_s^r V. \end{aligned}$$

Ukazuje se, že ireducibilní reprezentace  $\mathrm{GL}(n)$  jsou reprezentace, u kterých mají jak horní indexy tak dolní indexy symetrie dané Youngovými diagramy  $\lambda \vdash r$  a  $\mu \vdash s$  a navíc jsou bezestopé.

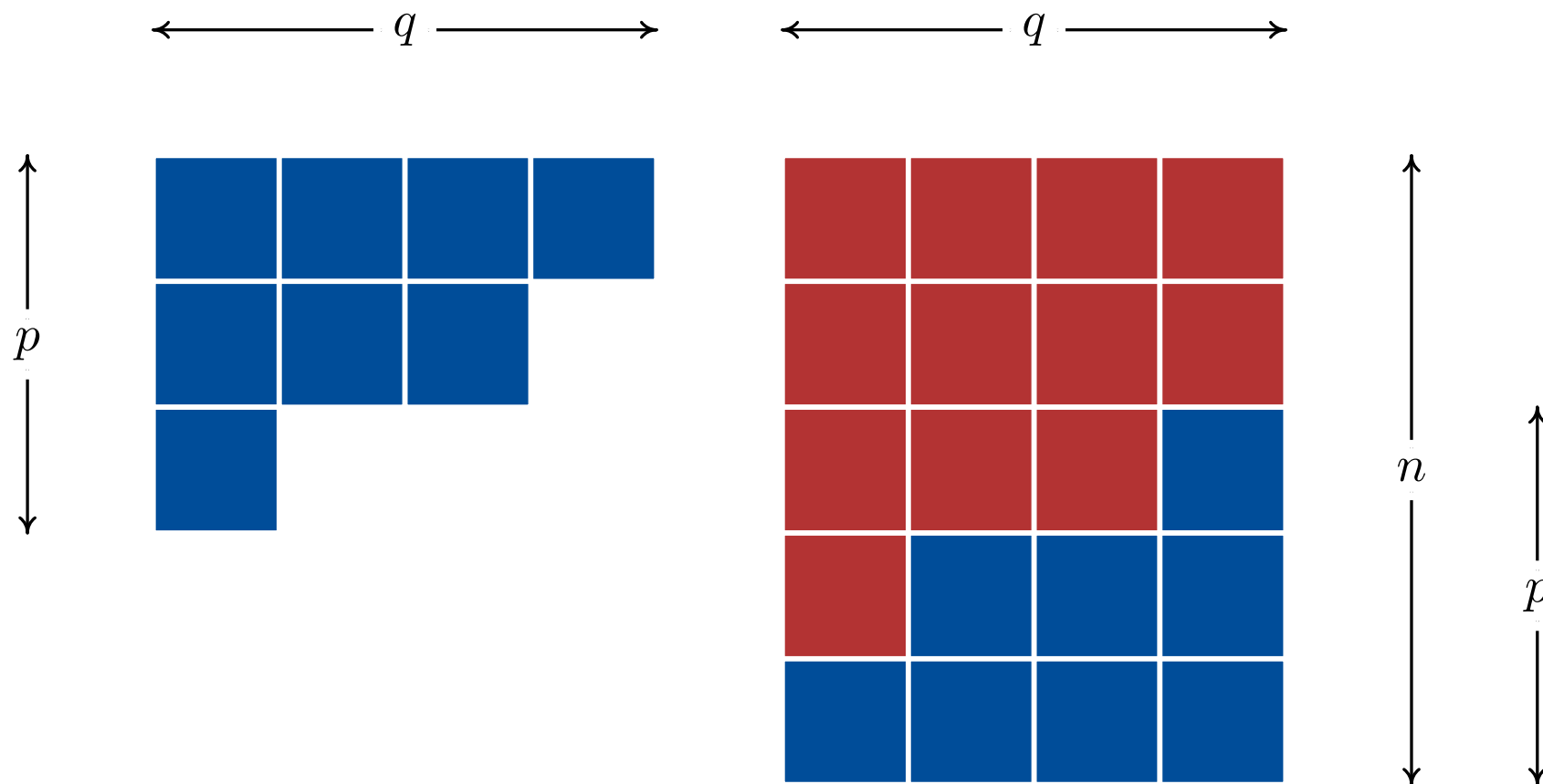
# 13. Rozklad reprezentací $\mathbb{GL}(n)$ v $T_s^r V$ na ireducibilní komponenty

Označme  $[\lambda]^r$  ireducibilní reprezentaci  $\mathbb{GL}(n)$  na prostoru kontravariantních tenzorů  $T^r V$  a  $[\mu]_s$  ireducibilní reprezentaci  $\mathbb{GL}(n)$  na prostoru kovariantních tenzorů  $T^s V^*$  ( $\lambda \vdash r$  a  $\mu \vdash s$ ).

Tyto reprezentace určují reprezentaci  $\mathbb{GL}(n)$  na  $T_s^r V$ , která ovšem obecně není ireducibilní. V [King] je uveden a dokázán postup, kterým příslušnou ireducibilní reprezentaci  $[\lambda; \mu]_s^r$  získáme. Tento postup vede na rozklad podle stop.

K jeho odvození je třeba využít sdruženosti reprezentací na  $T^r V$  a  $T^s V^*$  dané volbou jednotkového objemu. V souřadnicovém vyjádření se tato skutečnost projevuje jako používání úplně antisymetrického Kroneckerova tenzoru ke „zvedání“ a „snižování“ indexů.

# 14. Sdruženost reprezentací



Youngův diagram  $\lambda^* = [4^2, 3, 1]$  reprezentace sdružené k reprezentaci s Youngovým diagramem  $\lambda = [4, 3, 1]$  pro  $\dim V = n = 5$ .



# 15. Mřížkové permutace

Slovo  $i_1 \cdots i_r$  ze symbolů  $i_1, \dots, i_r$ , kde  $1 \leq i_1, \dots, i_r \leq n$ , nazveme mřížkovou permutací, jestliže žádné jeho podslovo  $i_1 \cdots i_s$  neobsahuje více  $i + 1$  než  $i$  pro  $1 \leq i \leq n - 1$ .

Příklad:

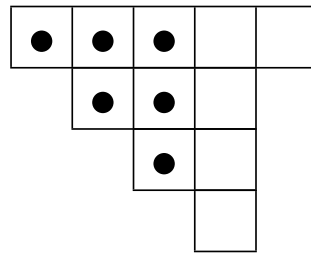
- (1) Mřížková permutace **není** permutací!
- (2) Slovo 112321 je mřížkovou permutací.
- (3) Slovo 112331 není mřížkovou permutací, protože jeho podslovo 11233 obsahuje vícekrát 3 než 2.

## Clebsch-Gordanovy rozklady

Mřížkové permutace je třeba uvažovat při rozkladech tenzorových součinů ireducibilních reprezentací  $[\lambda] \otimes [\mu]$  na ireducibilní reprezentace  $[\nu]$ .

# 16. Postup pro získání ireducibilní reprezentace

Diagramy charakterizující reprezentace na  $T_s^r V$  jsou dány dvojicemi Youngových diagramů  $(\lambda, \mu)_s^r$ . Je vhodné dvojice zapisovat „zády k sobě“ a označovat diagram určující kontravariantní tenzory odlišně např. tečkami, pro  $([3, 2, 1], [2, 1^3])$



Ireducibilní reprezentace získáme Clebsch-Gordanovým rozkladem diagramu  $\lambda$  a diagramu sdruženého k  $\mu$ . Formálně můžeme psát

$$[\lambda]^r \otimes [\mu]_s = \sum_{\nu \rho} m_{\mu \rho}^{\lambda \nu} [\nu; \rho]_{s-t}^{r-t}, \quad \text{kde } 0 \leq t \leq \min(r, s).$$

Zbývá určit rozklad  $m_{\mu \rho}^{\lambda \nu}$  a k tomu slouží postup [King].

# 17. Určení rozkladu

- (1) Diagramy napíšeme „zády k sobě“, v diagramu pro kovariantní tenzory umístíme tečky.
- (2) V prázdném diagramu vyplníme 1. řádek symbolem 1, 2. řádek symbolem 2,  $\dots$ ,  $s$ . řádek symbolem  $s$ .
- (3) Pod každý z  $t$  symbolů umístíme čáru.
- (4) Všechny symboly s čarou umístíme místo teček všemi možnými způsoby.

## **V každém kroku dodržujeme následující pravidla:**

- (a) Výsledný obrazec opět odpovídá dvojici Youngových diagramů, pokud nahradíme nepřepsané tečky a symboly bez čar prázdnými čtverci.
- (b) Výsledný obrazec neobsahuje dva stejné přepsané symboly v žádném sloupci.
- (c) Čteme-li nečárkované symboly zprava doleva odshora dolů po řádcích diagramu  $\mu$  dostaneme mřížkovou permutaci.
- (d) Čteme-li symboly, kterými jsme přepsali tečky, zprava doleva zdola nahoru po řádcích diagramu  $\lambda$  dostaneme mřížkovou permutaci.

# 18. Určení rozkladu – pokračování

Koeficient rozkladu  $m_{\mu\rho}^{\lambda\nu}$  je počet různě očíslovaných diagramů odpovídajících diagramu  $[\nu; \rho]_{s-t}^{r-t}$  získaných předchozím postupem.

Dále označme  $N$  počet řádků diagramu  $\nu$ ,  $R$  počet řádků diagramu  $\rho$  a  $I$  číslo nejvýše umístěného symbolu v prvním sloupci diagramu  $\lambda$ . Vždy musí platit

$$N + R \leq n = \dim V, \quad N + I \leq n = \dim V.$$

Těmito vzorci jsme schopni určit minimální dimenzi  $n_0$  vektorového prostoru  $V$ , pro niž je reprezentace netriviální.

# 19. Příklad

Rozklad  $[3, 2, 1] \otimes [2^2]$ .

$t = 0, n_0 = 5 :$

•	•	•	1	1
	•	•	2	2
		•		

$t = 1, n_0 = 5 :$

2	•	•	1	1
	•	•	2	<u>2</u>
		•		

,  

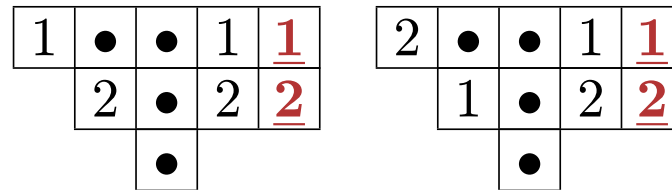
•	•	•	1	1
	2	•	2	<u>2</u>
		•		

$t = 1, n_0 = 4 :$

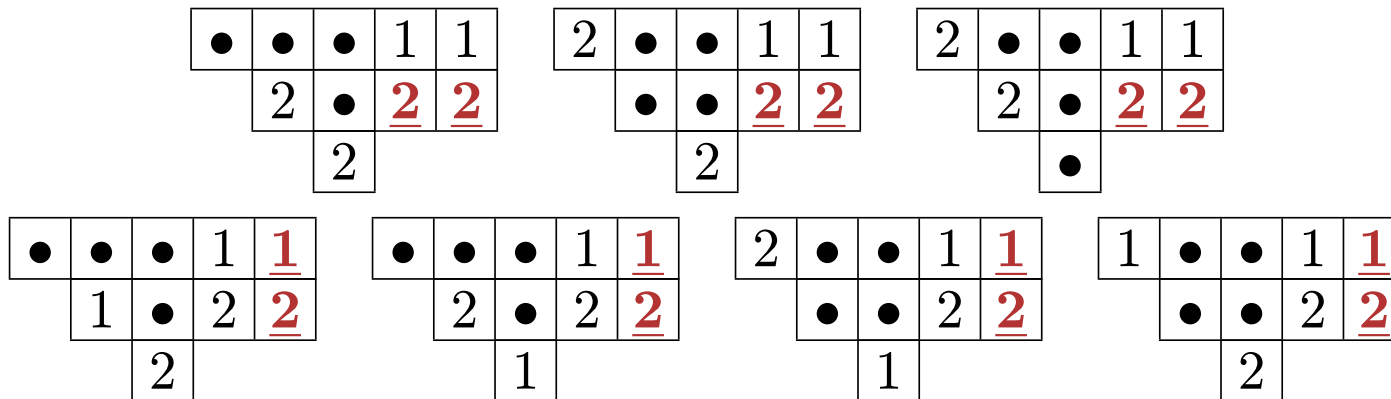
•	•	•	1	1
	•	•	2	<u>2</u>
		2		

# 20. Příklad – pokračování

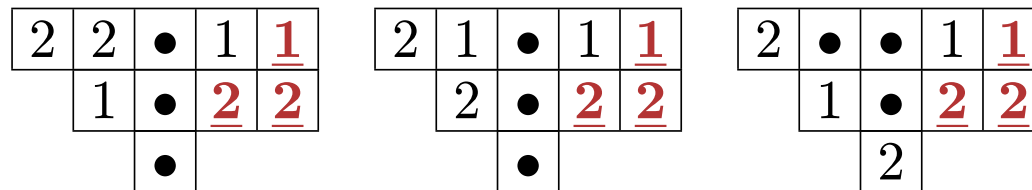
$t = 2, n_0 = 5 :$



$t = 2, n_0 = 4 :$

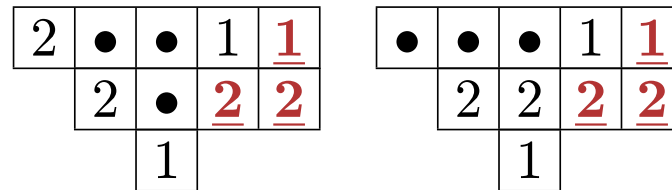


$t = 3, n_0 = 4 :$

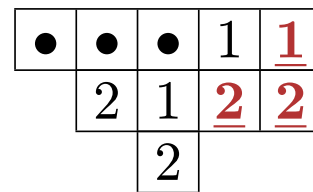


# 21. Příklad – pokračování

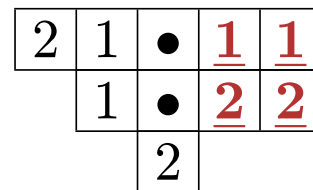
$t = 3, n_0 = 3 :$



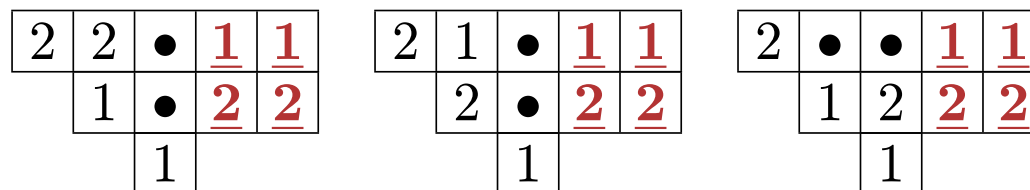
$t = 3, n_0 = 2 :$



$t = 4, n_0 = 4 :$



$t = 4, n_0 = 3 :$



## 22. Příklad – pokračování

$$t = 4, n_0 = 2 :$$

2	●	●	<u>1</u>	<u>1</u>	2	●	●	<u>1</u>	<u>1</u>
	2	1	<u>2</u>	<u>2</u>		1	1	<u>2</u>	<u>2</u>
		1					2		

Celkem tedy dostaneme

$$\begin{aligned}
 [3, 2, 1]^6 \otimes [2^2]_4 &= 1_5 [3, 2, 1; 2^2]_4^6 + \\
 &\quad + 1_5 [3, 1^2; 2, 1]_3^5 + 1_5 [2^2, 1; 2, 1]_3^5 + 1_4 [3, 2; 2, 1]_3^5 + \\
 &+ 2_5 [2, 1^2; 1^2]_2^4 + 2_4 [3, 1; 1^2]_2^4 + 2_4 [2^2; 1^2]_2^4 + 1_4 [3, 1; 2]_2^4 + 1_4 [2^2; 2]_2^4 + 1_4 [2, 1^2; 2]_2^4 + \\
 &\quad + 2_4 [1^3; 1]_1^3 + 2_{4+3} [2, 1; 1]_1^3 + 2_{3+2} [3; 1]_1^3 + \\
 &\quad\quad\quad + 3_{4+3+3} [1^2; \emptyset]_0^2 + 3_{3+2+2} [2; \emptyset]_0^2.
 \end{aligned}$$



# 23. Příklad – pokračování

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \\ \hline \bullet & & \\ \hline \end{array} \otimes \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} = 1_5 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \hline \bullet & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline \end{array} + \\
 + 1_5 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline \end{array} + 1_5 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & & \\ \hline \bullet & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline \end{array} + 1_4 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & \bullet & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} + \\
 + 2_5 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \\ \hline & \bullet & \\ \hline & \bullet & \\ \hline \end{array} + 2_4 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline & \bullet & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + 2_4 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & \\ \hline \bullet & \bullet & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + 1_4 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & & & \\ \hline & & \bullet & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} + 1_4 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & & & \\ \hline \bullet & \bullet & & & & \\ \hline & & & & & \\ \hline \end{array} + 1_4 \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline & \bullet & & & \\ \hline \end{array} + \\
 + 2_4 \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \\ \hline \bullet & \\ \hline \end{array} + + 2_{4+3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \\ \hline & \bullet & \\ \hline & & \\ \hline \end{array} + 2_{3+2} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline \end{array} + \\
 + 3_{4+3+3} \begin{array}{|c|} \hline \bullet \\ \hline \bullet \\ \hline \end{array} + 3_{3+2+2} \begin{array}{|c|c|} \hline \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}.
 \end{array}$$

# 24. Pro která číselná tělesa můžeme rozklad provádět?

- Reprezentace grup  $\mathfrak{S}_k$  a  $\mathrm{GL}(n)$  musí být ve vektorových prostorech nad tělesem  $\mathbb{K}$  **úplně reducibilní**.
- Pro konečné grupy je rozhodnutí o úplné reducibilitě jednoduché: Počet prvků grupy nesmí být dělitelný charakteristikou tělesa, speciálně pro  $\mathfrak{S}_k$

$$\mathrm{Char} \mathbb{K} > k.$$

- Je-li  $\mathfrak{S}_k$  úplně reducibilní, potom i k ní korespondující grupa je úplně reducibilní (Věta o dvojitým centralizéru).
- Korespondence mezi  $\mathfrak{S}_k$  a  $\mathrm{GL}(n)$  platí pro  $\mathrm{Char} \mathbb{K} = 0$  a pro  $\mathrm{Char} \mathbb{K} \neq 0$  koresponduje k  $\mathfrak{S}_k$  obecně jiná grupa.
- Celkem tedy uvedené postupy platí pro  $\mathrm{Char} \mathbb{K} = 0$ , tzn. např. komplexní, reálná a racionální čísla (detaily [Kraft-Procesi]).