ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 1

Varieta všech orientovaných přímek v euklidovském prostoru

(a) Ukažte, že na množině orientovaných přímek v euklidovském prostoru $\mathbb{E}^3$ lze zavést hladkou strukturu.

(b) Dále ukažte, že tato varieta je izomorfní k tečnému prostoru ke sféře $\mathbb{S}^2$.

(c) Jak jsou reprezentovány body $\mathbb{E}^3$ v $T\mathbb{S}^2$?

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 2

Věta o regulární hodnotě a její zobecnění na variety

Dokažte větu o regulární hodnotě hladkého zobrazení $F\colon M \to N$ z přednášky napřed pro euklidovské prostory, potom pro variety.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 3

Lieovy derivace

Lieovu derivaci tenzorového pole podle vektorového pole X lze definovat axiomaticky

(i) $\mathscr{L}(X)f = Xf$ pro hladkou funkci f.

(ii) $\mathscr{L}(X)Y = [X,Y]$ pro vektorové pole Y.

(iii) Platí Leibnizovo pravidlo vzhledem k tenzorovému součinu tenzorových polí:

$$\mathscr{L}(\sigma \otimes \tau) = \mathscr{L}\sigma \otimes \tau + \sigma \otimes \mathscr{L}\tau.$$

(iv) Platí Leibnizovo pravidlo vzhledem ke kontrakci:

$$\mathscr{L}(X)(\tau(Y_1,\dots,Y_k)) = (\mathscr{L}(X)\tau)(Y_1,\dots,Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \tau(Y_1,\dots,Y_{i-1},\mathscr{L}(X)Y_i,Y_{i+1},\dots,Y_n).$$

(a) Vyjádřete souřadnicově Lieovu derivaci tenzorového pole $\tau \in \Gamma T^r_s M$ podle vektorového pole X.

(b) Nechť D je derivace na vnější algebře forem ΩM na varietě M. Derivace D je *stupně* $|D| = k$, jestliže platí $D\Omega^p M \subset \Omega^{p+k} M$ a $D(\alpha \wedge \beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{pk} \alpha \wedge D\beta$ pro $\alpha \in \Omega^p M$, $\beta \in \Omega M$. Pro derivace D a D' definujme tzv. superkomutátor

$$\{D, D'\} = DD' + (-1)^{|D||D'|} D'D.$$

Ukažte, že kontrakce $\iota(X)$ je derivace stupně -1, vnější derivace d je derivace stupně 1 a Lieova derivace $\mathscr{L}(X)$ je derivace stupně 0. Dále ukažte, že pro $\iota(X)$, $\mathscr{L}(X)$ a d platí Jacobiho identita a komutační relace.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 4

Lieova algebra obecné lineární grupy

Buď $G = GL(n)$ obecná lineární grupa řádu n. Pro každý prvek $g \in G$ existuje difeomorfizmus $L_g : G \to G$, $L_g(h) = gh$ (ukažte). Těmto difeomorfizmům říkáme *levé translace*

Řekneme, že vektorové pole $X \in \mathscr{X}(M)$ je invariantní vůči difeomorfizmu $\psi : M \to M$, jestliže $\psi_* X = X$.

Specielně pro $M = G$ a $\psi = L_g$ získáváme tzv. *levoinvariantní* vektorová pole. Ukažte, že každé levoinvariantní vektorové pole je určeno svou hodnotou v jedničce $e \in G$. Dále ukažte, že naopak každý prvek $X \in T_e G$ určuje levoinvariantní vektorové pole $\xi(X)$ a že tato přiřazení jsou jedno-jednoznačná. Nakonec ukažte, že $[\xi(X), \xi(Y)] = \xi(XY - YX)$.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 5

Izometrie Minkowského prostoročasu

Buď $V = \mathbb{R}^{n+1}$ vektorový prostor dimenze $n+1$ (uvažujme ho jako hladkou varietu) a g metrické tenzorové pole na V dané v kanonických souřadnicích $(x^i)_{i=0\ldots n}$ na V jako

$$g = \mathrm{d}x^0 \odot \mathrm{d}x^0 - \sum_{i=1}^{n} \mathrm{d}x^i \odot \mathrm{d}x^i.$$

Buď dále $\phi : V \to V$ hladké zobrazení, pro které platí $g(\phi_* X, \phi_* Y) = g(X, Y)$ pro X, Y vektorová pole na V.

(a) Ukažte, že ϕ je afinní zobrazení, tj. $\phi(x) = Ax + b$, kde $A^T G A = G$, $b \in V$ a $G = \mathrm{diag}(1, -1, \dots, -1)$ je symetrická bilineární forma.

(b) Dokažte, že všechna taková zobrazení tvoří grupu P (zvanou Poincarého grupa) vzhledem k operaci skládání zobrazení.

(c) Ukažte, že i matice A splňující $A^T G A = G$ tvoří grupu L a že každý prvek z P lze jednoznačně zapsat jako kompozici prvku z L a prvku z V.

(d) Dokažte, že L a P jsou hladké variety a grupová operace $.: L \times L \to L$ resp. $.: P \times P \to P$ je hladké zobrazení.

(e) Určete všechny souvislé komponenty L. Využijte skutečnosti, že pro variety splývají pojmy souvislost a oblouková souvislost (tj. množina je souvislá, právě lze-li každé její dva body spojit hladkou křivkou). Dále využijte polární rozklad matic z L.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 6

Hopfova fibrace

Hopfova fibrace je zobrazení $\phi \colon \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ sfér definované následovně: $\mathbb{S}^3 = \{z | z^\dagger z = 1\}$ realizujeme jako podmnožinu jednotkových vektorů z $\mathbb{C}^2$. Definujeme projektivní rovinu $\mathbb{C}P^1$ jako množinu všech přímek v $\mathbb{C}^2$. Každý nenulový vektor v $\mathbb{C}^2$ ovšem určuje přímku. Ale komplexní projektivní rovinu $\mathbb{C}P^1$ lze identifikovat s Riemannovou sférou $\mathbb{S}^2$.

(a) Explicitně popište Hopfovu fibraci jako hladké zobrazení (nebo jako jejich složení).

(b) Ukažte, že ϕ je surjektivní a ϕ_* je rovněž surjektivní.

(c) Ukažte, že $\mathbb{S}^3 \neq \mathbb{S}^2 \times X$ pro žádnou varietu X. Napřed najděte objemovou formu σ na $\mathbb{S}^2$, tj. $\int_{\mathbb{S}^2} \sigma = 1$. Určete $\phi^* \sigma$ a najděte 1-formu ω tak, že $\phi^* \sigma = \mathrm{d}\omega$. Spočtěte integrál $\int_{\mathbb{S}^3} \omega \wedge \mathrm{d}\omega$. Jaká by byla hodnota tohoto integrálu, pokud by $\mathbb{S}^3 = \mathbb{S}^2 \times X$?

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 7

Zobecněná komplexní geometrie

Buď M hladká varieta, $\dim M = n$ a uvažme na ní vektorový bandl $(T \oplus T^*)M$, tj. vlákno nad každým bodem $x \in M$ je dáno přímým součtem tečného a kotečného prostoru.

(a) Ukažte, že $(T \oplus T^*)M$ je hladká varieta dimenze $3n$ a že má strukturu vektorového bandlu.

(b) Uvažte libovolný difeomorfizmus $f : M \to M$ a ukažte, že určuje izomorfizmus vektorového bandlu $(T \oplus T^*)M$.

(c) Definujme na $(T \oplus T^*)_x M$ vnitřní součin $\left\langle (u,\alpha),(v,\beta) \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\alpha(v) + \beta(u)\right]$. Ukažte, že je nedegenerovaný a jeho signatura je (n,n).

(d) Pro řezy vektorového bandlu $(T \oplus T^*)M \to M$ (tj. dvojice (X,ξ), kde X je vektorové pole na M a ξ je 1-forma na M) definujeme tzv. Courantovu závorku vztahem

$$[(X,\xi),(Y,\eta)] = [X,Y] + \mathscr{L}_X \eta - \mathscr{L}_Y \xi - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}(\imath_X \eta - \imath_Y \xi).$$

Ukažte, že tato závorka je antisymetrická, ale že neplatí tzv. Jacobiho identita, tj.

$$[[(X,\xi),(Y,\eta)],(Z,\zeta)] + [[(Y,\eta),(Z,\zeta)],(X,\xi)] + [[(Z,\zeta),(X,\xi)],(Y,\eta)]$$

se nerovná nule. Ukažte, že se předchozí výraz rovná vnější derivaci jisté funkce na M a tuto funkci spočtěte.

ZÁPOČTOVÝ PŘÍKLAD 8

Geodetiky na sféře

Buď $\mathbb{S}^2$ sféra, realizovaná v $\mathbb{R}^3$ jako množina bodů splňující rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, kde x, y, z jsou standardní souřadnice v $\mathbb{R}^3$ s metrikou indukovanou standardní metrikou v $\mathbb{R}^3$. Určete geodetiky pro Levi-Civitovu konexi na $\mathbb{S}^2$. Výsledek geometricky interpretujte.