Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity
Katedra teoretické fyziky a astrofyziky

MODELY ATMOSFÉR K OBRŮ

Brno 1998

Jiří Krtička

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci vypracoval samostatně a použil jsem jen literatury uvedené v seznamu.

V Brně dne 31. března 1998

Děkuji vedoucímu své diplomové práce, doc. RNDr. V. Šteflovi, CSc., za vedení diplomové práce a cenné rady. Rovněž děkuji RNDr. J. Kubátovi, CSc., za vedení diplomové praxe a za poskytnutí spekter z Ondřejovského dalekohledu. Dále děkuji Mgr. F. Hrochovi za četné rady, Mgr. M. Plonkovi a Mgr. J. Janíkovi za spolupráci při získávání spekter a všem svým blízkým za podporu.

Obsah

Kapitola 1

Úvod

1.1 Studium hvězdných atmosfér

Znalost fyzikálních parametrů atmosfér hvězd je podstatná pro studium fyzikální struktury a vývoje konkrétní hvězdy. Zřejmě nejbohatším zdrojem poznatků o hvězdách je jejich spektrum. Proto vypracování takových spolehlivých a přesných metod, které by umožnily spektra co možná nejlépe předpovídat, je důležitým úkolem moderní astrofyziky. Metoda, která je v současnosti považována za nejpřesnější, je metoda modelů atmosfér, tj. výpočet syntetického spektra hvězdy na základě určitého modelu atmosféry hvězdy[1].

1.2 Zdroje chyb

V posledních desetiletích bylo díky výraznému zlepšení pozorovacích metod a numerických technik dosaženo výrazných pokroků při studiu hvězdných atmosfér. Přesto však teorie hvězdných atmosfér není ještě dostatečně rozvinuta.

Za hlavní zdroje chyb při modelování hvězdných atmosfér se obvykle považují následující problémy ([25, 55, 73]):

- Bylo by výhodné studovat modely, které a priori nesplňují rovnici hydrostatické rovnováhy. Je známo, že v atmosférách chladných hvězd existují silné větry. Navíc mnohé z hvězd pozdních spektrálních typů vykazují proměnnost, často spojenou se zvukovými a tlakovými vlnami. Ukazuje se, že chemické složení pulsujících hvězd získané pomocí modelů atmosfér je nereálné [14]. V tomto případě je výhodnější používat metodu křivek růstu (viz. [25]).

- Současné zachycení konvekce a termických nehomogenit je pouze popisné, bez přesného pochopení konkrétní fyzikální situace. Je zřejmé že tento bod částečně souvisí s předcházejícím. Při popisu hvězdných atmosfér se předpokládá, že atmosféra se nachází v hydrostatické rovnováze, ale přesto se hovoří o konvekci, která naopak tento předpoklad vylučuje. V kap. 6.10.2 je však ukázáno, že konvekce nemá podstatný vliv na atmosféru K obrů.

[1] Modelem atmosféry se rozumí průběh důležitých fyzikálních parametrů (jako je např. teplota, hustota, koncentrace elektronů) v atmosféře hvězdy.

- Ve většině případů se předpokládá atmosféra složená z planparalelních vrstev. V případě rozsáhlých atmosfér obrů a veleobrů se toto omezení může projevit. V současné době existují sféricky symetrické modely [73], které jsou počítány především pro hvězdy pozdějších spektrálních typů (M), než je uvažovaná spektrální třída K.
- Předpoklad lokální termodynamické rovnováhy (LTE) je pro horní hranice atmosfér zcela nepoužitelný a často vede k chybám ve spočteném syntetickém spektru a získaném chemickém složení [27, 67] (viz. též kap. 7.7).
- Znalost přesných atomárních koeficientů je důležitým parametrem, ovlivňujícím přesnost daného modelu. V případě chladných hvězd je teplotní stratifikace v atmosféře ovlivněna přítomností četné čárové absorpce atomů a molekul. Existuje názor, že nadhodnocení toku záření počítaného na základě modelů atmosfér, které se pozoruje v ultrafialové oblasti spektra, je způsobeno chybějící opacitou [75].
- Modely atmosfér se počítají s jednotným relativním chemickým složením kovů, což ovlivňuje jejich reálnost [64].
- Chyby spojené se zvolenou numerickou metodou. V případě chladných hvězd je podstatný zejména způsob aproximativního započtení čárové absorpce.

1.3 Modely atmosfér a chemické složení

Způsob určování chemického složení atmosfér hvězd (ale v podstatě také dalších parametrů) na základě jejich modelů by bylo možné podle [64] znázornit následující rovnicí:

$$MA(\epsilon_i) \longrightarrow \epsilon_{i+1} \Longrightarrow MA(\epsilon^*_{i+1}), \tag{1.1}$$

kde ϵ_i znamená i-tou aproximaci chemického složení, $MA(\epsilon_i)$ model atmosféry, spočtený na základě i-tého chemického složení, šipka $\longrightarrow$ značí výpočet syntetického spektra, šipka $\Longrightarrow$ opravu chemického složení a následný výpočet modelu atmosféry.

Závislost spektra na chemickém složení je nelineární problém. Ukazuje se (viz. [21]), že mohou existovat dvě hvězdy s obdobným spektrem, ale odlišným obsahem kovů.

Sledování obsahu některých prvků má zvláštní zajímavost, například lithia z důvodu existence hvězd obohacených o tento prvek, obsahu uhlíku, dusíku a kyslíku pro jejich účast v CNO cyklu, sledování izotopických poměrů (např. uhlíku).

1.4 Cíl diplomové práce

Cílem této diplomové práce je výběr vhodných modelů atmosfér pro K obry. Diplomová práce si navíc klade za cíl ukázat možnosti použití těchto modelů při studiu atmosfér K obrů.

V úvodních kapitolách jsou uvedeny nejdůležitější vztahy používané pro popis atmosférického plazmatu. Následují základní vztahy popisující přenos záření ve hvězdných atmosférách a principy modelů atmosfér. Dále jsou načrtnuty podstatné vztahy používané při výpočtu syntetických spekter. V další kapitole jsou popsány jednotlivé modely atmosfér, které je možné použít pro hvězdy spektrální třídy K. Předposlední kapitola se zabývá jednou z možných aplikací těchto modelů – zjišťování fyzikálních parametrů atmosfér.

1.5 Soustava jednotek

V diplomové práci se používá soustava jednotek CGS, která je běžně užívána v diskutované oblasti astrofyziky.

Kapitola 2

Popis astrofyzikálního plazmatu

Při určování stavu plazmatu je nutné vzít v úvahu velké množství procesů excitace a ionizace. Pro popis těchto procesů obecně existují dva přístupy. Za předpokladu, že se plazma v malém okolí uvažovaného bodu nachází ve stavu termodynamické rovnováhy (tedy hodnoty teploty a hustoty jsou dány lokálně), hovoříme o stavu tzv. lokální termodynamické rovnováhy (LTE). Naopak v druhém případě, označovaném jako NLTE, je nutné počítat s detailní statistickou rovnováhou a tedy vzít do úvahy všechny procesy, které mohou ovlivnit obsazení daných hladin a ionizačních stupňů. V obou těchto případech se předpokládá, že v zákonech popisujících jednotlivé fyzikální procesy vystupuje jediná teplota a že rozdělení rychlostí hmotných částic je maxwellovské.

Látku z této a následujících dvou kapitol jsem ve většině případů převzal z Mihalasovy monografie [55]. Proto se v následujících kapitolách již nebudu na tuto monografii odkazovat.

2.1 LTE

V případě LTE je stav plazmatu určen (známe-li jeho složení) dvěma nezávislými parametry, za které je možné vybrat lokální hodnoty teploty T a koncentrace částic N.

2.1.1 Základní vztahy

Excitační rovnováha – Boltzmannova rovnice

Označíme-li jako n_{ijk} koncentraci atomů prvku k na excitované hladině i ve stupni ionizace j (přičemž $j = 0$ značí neutrální atomy, $j = 1$ jednou ionizované), g_{ijk} příslušnou statistickou váhu a χ_{ijk} excitační energii, potom

$$\left(\frac{n_{ijk}}{n_{0jk}}\right)^* = \frac{g_{ijk}}{g_{0jk}}\, e^{-\chi_{ijk}/kT}. \tag{2.1}$$

Hvězdička $*$ značí hodnoty veličin v případě LTE.

Vzorec je možné přepsat tak, aby obsahoval celkovou koncentraci atomů v daném stupni ionizace N^*_{jk},

$$\left(\frac{n_{ijk}}{N_{jk}}\right)^* = \frac{g_{ijk}}{U_{jk}(T)}\, e^{-\chi_{ijk}/kT}. \tag{2.2}$$

kde $U_{jk}(T)$ je stavová suma.

Ionizační rovnováha – Sahova rovnice

Se zachováním předchozího značení lze napsat Sahovu rovnici, popisující ionizaci, ve tvaru

$$n^*_{0jk} = n^*_{0,j+1,k} n^*_e \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \frac{g_{0jk}}{g_{0,j+1,k}} \; e^{\chi_{Ijk}/kT}, \tag{2.3}$$

kde χ_{Ijk} značí ionizační potenciál, m klidovou hmotnost elektronu, n^*_e koncentraci elektronů. S použitím Sahovy rovnice lze vypočítat poměr počtu atomů prvku k stupně ionizace j N_{jk} k celkovému počtu atomů daného typu N_k jako

$$f_{jk}(n_e,T) = \left(\frac{N_{jk}}{N_k} \right)^* = \frac{\prod\limits_{l=j}^{J_k-1} n^*_e \tilde{\Phi}_{lk}(T)}{\sum\limits_{m=0}^{J_k} \prod\limits_{l=m}^{J_k-1} n^*_e \tilde{\Phi}_{lk}(T)}, \tag{2.4}$$

kde J_k je číslo posledního stadia ionizace daného prvku a $\tilde{\Phi}_{lk}(T)$ je definováno jako

$$\tilde{\Phi}_{lk}(T) \equiv \frac{1}{2} \frac{U_{l,k}(T)}{U_{l+1,k}(T)} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \; e^{\chi_{Ilk}/kT}. \tag{2.5}$$

Pro koncentraci n_{ijk} je možné napsat obdobný vzorec

$$n^*_{ijk} = N^*_{j+1,k} n^*_e \tilde{\Phi}_{ijk}(T), \tag{2.6}$$

kde $\tilde{\Phi}_{ijk}(T)$ je definován jako

$$\tilde{\Phi}_{ijk}(T) \equiv \frac{1}{2} \frac{g_{ijk}}{U_{j+1,k}(T)} \left(\frac{h^2}{2\pi mkT} \right)^{3/2} \exp\left[\left(\chi_{Ijk} - \chi_{ijk} \right) / kT \right]. \tag{2.7}$$

Ionizační a excitační rovnováha v případě dvouatomových molekul

Sahova rovnice pro případ dvouatomové molekuly AB, vzniklé z atomů A, B má tvar [2]:

$$\frac{N^*_A N^*_B}{N^*_{AB}} = \left(\frac{2\pi m_{AB} kT}{h^2} \right)^{3/2} \frac{U_A U_B}{U_{AB}} \; e^{-D/kT}, \tag{2.8}$$

kde D je disociační energie dané molekuly, N^*_A, N^*_B, N^*_{AB} rovnovážné koncentrace atomů a molekuly, U_A, U_B, U_{AB} příslušné stavové sumy, m_{AB} redukovaná hmotnost definovaná jako

$$m_{AB} = \frac{m_A m_B}{m_A + m_B}. \tag{2.9}$$

Obsazení hladiny je dáno Boltzmannovým rozdělením 2.2. Tento vzorec je možné zapsat tak, aby obsahoval koncentraci molekuly N^*_{AB}. Je-li $N^*(e,v,J)$ počet molekul v jednotkovém objemu na hladině určené rotačním kvantovým číslem J, vibračním kvantovým číslem v, elektronové konfigurace e, pak při LTE platí

$$\frac{N^*(e,v,J)}{N^*_{AB}} = \frac{g(e,v,J)}{U_{AB}} \; e^{-E/kT}, \tag{2.10}$$

kde $g(e,v,J)$ je statistická váha daného stavu. Příslušná excitační energie je součtem energie rotační, vibrační a elektronové [28, 48]:

$$E = E_{\mathrm{rot}} + E_{\mathrm{vib}} + E_{\mathrm{el}}. \tag{2.11}$$

Rotační energie je dána výrazem

$$E_{\mathrm{rot}} = hcB_v J(J+1), \tag{2.12}$$

kde J je rotační kvantové číslo, B_v je příslušná rotační konstanta[1], pro kterou platí vztah

$$B_v = B_e - a_e\left(v + \frac{1}{2}\right). \tag{2.13}$$

Konstanty B_e, a_e jsou tabelovány. Vibrační energie je dána výrazem [2]

$$E_{\mathrm{vib}} = hc\left[\omega_e v - \omega_e x_e(v^2 + v)\right], \tag{2.14}$$

kde v je vibrační kvantové číslo, ω_e je frekvence kmitů v lineárním přiblížení, $\omega_e x_e$ je koeficient charakterizující anharmonicitu. Elektronová energie je dána vzorcem [2]

$$E_{\mathrm{el}} = hcT_{\mathrm{el}}, \tag{2.15}$$

kde elektronový term T_{el} se obvykle tabeluje.

Zákon zachování elektrického náboje

Označíme-li jako α_k podíl počtu atomů prvku k ku celkovému počtu atomů, pak vztah mezi koncentrací částic daného atomu N_k a celkovým počtem částic v jednotce objemu N lze napsat ve tvaru

$$N_k = \alpha_k(N - n_e). \tag{2.16}$$

Díky tomu, že plazma je jako celek elektricky neutrální, je koncentrace elektronů n_e dána

$$n_e = \sum_k \sum_{j=1}^{J_k} jN_{jk} = (N - n_e)\sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} jf_{jk}(n_e,T). \tag{2.17}$$

2.1.2 Metoda linearizace

Při výpočtu modelů atmosfér jsou hodnoty T a N známy pouze přibližně v daném kroku iterace. Proto je výhodné najít závislost mezi δn_e a δT a δN

Variací rovnice 2.17 v proměnných T, N pak výraz pro δn_e

$$\delta n_e = \left(\frac{\partial n_e}{\partial N}\right)_T \delta N + \left(\frac{\partial n_e}{\partial T}\right)_N \delta T = \frac{\tilde{\Sigma}\delta N + (N - n_e)\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial T}\delta T}{1 + \tilde{\Sigma} - (N - n_e)\frac{\partial\tilde{\Sigma}}{\partial n_e}}, \tag{2.18}$$

kde pro zjednodušení zavede označení

$$\tilde{\Sigma}(n_e,T) \equiv \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} jf_{jk}(n_e,T). \tag{2.19}$$

[1] Lang [48] používá konstantu B, která souvisí s B_v uváděnou v [2, 28] vztahem $B = cB_v$.

Obdobně pro obsazení hladiny n_{ijk} je možné s pomocí 2.6, 2.2, 2.16 napsat vzorec

$$n_{ijk} = N_{j+1,k} n_e \tilde{\Phi}_{ijk}(T) = \alpha_k \left(N - n_e\right) n_e f_{j+1,k}(n_e, T) \tilde{\Phi}_{ijk}(T). \tag{2.20}$$

Variací této rovnice pomocí 2.18 je možné vyjádřit δn_{ijk} pomocí δN, δT v obecném tvaru

$$\delta n_{ijk} = \left(\frac{\partial n_{ijk}}{\partial N}\right)_T \delta N + \left(\frac{\partial n_{ijk}}{\partial T}\right)_N \delta T. \tag{2.21}$$

2.2 NLTE

V případě NLTE, kdy již není možné předpokládat termodynamickou rovnováhu, zastupuje její funkci rovnováha statistická. V následujícím se uplatní při popisu plazmatu v případě, kdy se předpokládá plné přerozdělení v čarách.

2.2.1 Statistická rovnováha

Vezmeme-li v úvahu element objemu látky, pohybující se rychlostí $\mathbf{v}$, pak pro změnu koncentrace částic prvku k v ionizačním stupni j platí

$$\frac{\partial n_{ik}}{\partial t} = -\nabla \left(n_{ik} \mathbf{v}\right) + \sum_{j \neq i} \left(n_{jk} P_{jik} - n_{ik} P_{ijk}\right), \tag{2.22}$$

kde P_{ijk} je celková pravděpodobnost přechodu z hladiny i na j. Pro případ nepohybující se látky ve statistické rovnováze je možné vzorec přepsat do jednoduššího tvaru

$$n_{ik} \sum_{j \neq i} P_{ijk} - \sum_{j \neq i} n_{jk} P_{jik} = 0. \tag{2.23}$$

2.2.2 Přechody ovlivňující statistickou rovnováhu

Mezi fyzikální procesy, které mohou ovlivnit statistickou rovnováhu plazmatu ve hvězdné atmosféře patří např. zářivé vázaně vázané přechody, zářivé vázaně volné přechody, srážkové volně vázané přechody apod.

Ukazuje se, že detailním započítáním všech přechodů se dostane systém rovnic, který lze obecně zapsat ve tvaru

$$\mathcal{A}\mathbf{n} = \vec{\mathcal{B}}, \tag{2.24}$$

přičemž jako $\mathbf{n}$ se označuje vektor dimenze $l+1$, jehož komponentami jsou obsazení jednotlivých NLTE hladin, vektor pravých stran $\vec{\mathcal{B}}$ má dimenzi $l+1$ a matice $\mathcal{A}$ je matice řádu $l+1$.

2.2.3 Linearizace

Rovnice 2.24 se linearizuje tak, aby vzniklou soustavu rovnic bylo možné použít pro metodu úplné linearizace (kap. 4.4).

Kapitola 3

Popis záření

3.1 Veličiny popisující záření

V dalších kapitolách budeme uvažovat planparalelní, horizontálně homogenní atmosféru. Předpokládejme, že plazma je ve stavu hydrostatické rovnováhy a že nevykazuje makroskopické pohyby[1].

Intenzita záření $I(\mathbf{r},\mathbf{n},\nu,t)$ se v astrofyzice definuje pomocí množství energie $d\mathcal{E}$, prošlé jednotkovou plochou dS v bodě $\mathbf{r}$ ve směru $\mathbf{n}$ do prostorového úhlu $d\omega$ v intervalu frekvencí $(\nu,\nu+d\nu)$ v čase t za čas dt. Tedy

$$d\mathcal{E} = I(\mathbf{r},\mathbf{n},\nu,t)\, dS cos\theta d\omega d\nu dt, \tag{3.1}$$

kde θ je úhel mezi směrem $\mathbf{n}$ a normálou k ploše dS.

Zavádí se střední intenzita záření $J(\mathbf{r},\nu)$ vztahem

$$J(\mathbf{r},\nu,\mathbf{t}) \equiv \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r},\mathbf{n},\nu,t)\, d\omega, \tag{3.2}$$

který lze v případě nepohybujících se, horizontálně homogenních vrstev zjednodušit na

$$J(z,\nu) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} I(z,\mu,\nu)\, d\mu. \tag{3.3}$$

Zde je zavedena, jak je v astrofyzice běžným zvykem, proměnná μ vztahem $\mu = \cos\theta$. Na tomto příkladě je vidět přechod od obecné, nestatické atmosféry bez horizontální symetrie, k atmosféře složené ze statických planparalelních vrstev. Bylo by možné budovat teorii obecné atmosféry a poté, v případě potřeby, přejít k atmosféře jednodušší. Protože ale je cílem budovat vztahy pro jednodušší atmosféry a obecné vztahy samotné by se nepoužily, je možné přejít od závislosti $(\mathbf{r},\mathbf{n},\nu,t)$ k jednodušší (z,μ,ν).

Dále je výhodné definovat astrofyzikální tok záření vztahem[2]

$$F(z,\nu) \equiv 2 \int_{-1}^{1} I(z,\mu,\nu)\, \mu d\mu \tag{3.4}$$

[1] Jako jsou například pulsace. Konvekci (i v makroskopických měřítkách) je naopak nutné uvažovat.

[2] Znovu bychom mohli tok definovat jako vektor, ale v našem případě bude důležitá (a nenulová) pouze jeho z–ová složka.

a podobně i Eddingtonovský tok (první moment)

$$H(z,\nu) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(z,\mu,\nu)\,\mu d\mu. \tag{3.5}$$

Analogicky se definuje druhý moment vztahem

$$K(z,\nu) \equiv \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(z,\mu,\nu)\,\mu^2 d\mu. \tag{3.6}$$

V následujícím se ukáže výhodné zavést proměnný Eddingtonovský faktor

$$f(z,\nu) \equiv K\ (z,\nu)\,/J(z,\nu)\,. \tag{3.7}$$

3.2 Rovnice přenosu záření

3.2.1 Rovnice přenosu záření a veličiny v ní vystupující

Během průchodu fotonů hvězdnou atmosférou dochází k jejich několikanásobnému pohlcování a opětovnému vyzařování. Tyto procesy se jako celek označují jako přenos záření. Je výhodné tyto procesy rozdělit na procesy, vedoucí k pohlcování světelné energie a na procesy, kdy látka ve hvězdné atmosféře záření vyzařuje. Proto se zavádí absorbční koeficient $\chi(z,\mathbf{n},\nu)$ a koeficient záření $\eta(z,\mathbf{n},\nu)$. Budeme sledovat elementární objem, omezený plochou dS a tloušťkou ds. Část energie $\delta\mathcal{E}$ pohlcené tímto elementem za čas dt ze záření o intenzitě $I(z,\mathbf{n},\nu)$ v intervalu frekvencí $d\nu$, dopadajícího ve směru normály k dS v elementu tělesného úhlu $d\omega$ je rovna

$$\delta\mathcal{E} = \chi(z,\mathbf{n},\nu)\,I(z,\mathbf{n},\nu) dS ds d\omega d\nu dt. \tag{3.8}$$

Dále tento element vyzařuje energii $\delta\mathcal{E}$ v intervalu frekvencí $d\nu$ do tělesného úhlu $d\omega$ ve směru $\mathbf{n}$ za čas dt, pro kterou platí:

$$\delta\mathcal{E} = \eta(z,\mathbf{n},\nu)\, dS ds d\omega d\nu dt. \tag{3.9}$$

V případě stacionární atmosféry jsou koeficienty χ, η izotropní.

Rovnici pro přenos záření lze v našem případě zapsat jako

$$\mu\frac{\partial I(z,\mu,\nu)}{\partial z} = \eta(z,\nu) - \chi(z,\nu)\,I(z,\mu,\nu) \tag{3.10}$$

Zavedeme-li optickou hloubku $\tau(z,\nu)$ vztahem

$$\tau(z,\nu) = \int_{z}^{\infty} \chi(z',\nu)\,dz' \tag{3.11}$$

a funkci zdroje $S(z,\nu)$ jako poměr koeficientů emise a absorbce

$$S(z,\nu) = \eta(z,\nu)\,/\chi(z,\nu)\,, \tag{3.12}$$

lze zjednodušit rovnici přenosu záření 3.10 na tvar

$$\mu\frac{\partial I(z,\mu,\nu)}{\partial\tau(z,\nu)} = I(z,\mu,\nu) - S(z,\nu)\,. \tag{3.13}$$

V astrofyzice je běžné při psaní těchto těchto vzorců vynechávat závislost proměnných na z a μ. Dále se frekvenční závislost obvykle vyznačuje dolním indexem τ. Tedy se např. označuje $S_\nu \equiv S(z,\nu)$, $I_\nu \equiv I(z,\mu,\nu)$ apod.

V případě LTE se funkce zdroje zapisuje pomocí koeficientů k_ν a σ_ν, charakterizujících tepelné záření a pohlcování a monochromatický koherentní rozptyl. Za předpokladu

$$\chi_\nu = k_\nu + \sigma_\nu, \tag{3.14}$$

lze vyjádřit

$$S_\nu = (k_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu) / (k_\nu + \sigma_\nu). \tag{3.15}$$

Zderivuje-li se definiční vztah pro Eddingtonovský tok 3.5 podle τ_ν, dostane se použitím rovnice přenosu 3.13 první momentovou rovnici, svazující tok H_ν s intenzitou I_ν a funkcí zdroje S_ν

$$\frac{\partial H_\nu}{\partial \tau_\nu} = J_\nu - S_\nu. \tag{3.16}$$

Podobně se dostává derivací definice 3.6 podle τ_ν rovnice spojující derivaci druhého momentu s prvním momentem:

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial \tau_\nu} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu^2 \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau_\nu} d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mu\,(I_\nu - S_\nu)\, d\mu = H_\nu. \tag{3.17}$$

Při výpočtu se postupně užije rovnice přenosu 3.13, izotropie funkce zdroje, ze které plyne

$$\int_{-1}^{1} \mu S_\nu d\mu = 0 \tag{3.18}$$

a definice Eddingtonovského toku 3.5.

3.2.2 Přesné řešení rovnice přenosu

Je možné nalézt přesné řešení rovnice 3.13. Vynásobíme-li tuto rovnici integračním faktorem $\exp(-\tau_\nu/\mu)$ dostaneme

$$I(\tau_1,\mu,\nu) = I(\tau_2,\mu,\nu)\, e^{-(\tau_2-\tau_1)/\mu} + \frac{1}{\mu}\int_{\tau_1}^{\tau_2} S_\nu(t)\, e^{-(t-\tau_1)/\mu} dt. \tag{3.19}$$

Zajímavá řešení rovnice přenosu se dostanou pro $\tau_1 \equiv \tau_\nu, \tau_2 = \infty$. Potom pro $\mu \geq 0$ platí

$$\lim_{\tau_\nu \to \infty} I(\tau_\nu,\mu,\nu)\, e^{-\tau_\nu/\mu} = 0.$$

Přesné řešení 3.13 je možné přepsat ve tvaru

$$I(\tau_\nu,\mu,\nu) = \frac{1}{\mu}\int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) \exp\left(-(t-\tau_\nu)/\mu\right) dt, \quad 0 \leq \mu \leq 1. \tag{3.20}$$

Dále pro $\mu \leq 0$ předpokládáme, že při $\tau = 0$ je $I(\tau_\nu,\nu) = 0$ a tedy položíme $\tau_2 = 0$, což vede k

$$I(\tau_\nu,\mu,\nu) = -\frac{1}{\mu}\int_{0}^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp\left(-(t-\tau_\nu)/\mu\right) dt, \quad -1 \leq \mu \leq 0. \tag{3.21}$$

Pomocí těchto vzorců je možné zjednodušit výpočet střední intenzity $J_\nu(\tau_\nu)$. Dosadíme-li do 3.3 vzorce 3.20 a 3.21, obdržíme po substituci $w = \pm 1/\mu$

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_{\tau_\nu}^{\infty} dt S_\nu(t) \int_1^{\infty} dw \exp\left(-w\left(t-\tau_\nu\right)\right)/w + \tag{3.22}$$

$$+ \int_0^{\tau_\nu} dt S_\nu(t) \int_1^{\infty} dw \exp\left(-w\left(\tau_\nu - t\right)\right)/w. \tag{3.23}$$

Zavedeme-li funkci

$$E_n(x) \equiv \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-xt} dt, \tag{3.24}$$

pak je možné vzorec 3.22 jednoduše přepsat:

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} S_\nu(t_\nu) E_1\left(|t_\nu - \tau_\nu|\right) dt_\nu. \tag{3.25}$$

Protože se integrál vystupující v tomto vzorci často vyskytuje v teorii přenosu záření, zavádí se nový operátor Λ_τ definicí

$$\Lambda_\tau[f(t)] \equiv \frac{1}{2}\int_0^{\infty} f(t) E_1\left(|t-\tau|\right) dt. \tag{3.26}$$

S pomocí nového operátoru Λ_τ lze elegantně přepsat 3.25

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_\tau[S_\nu]. \tag{3.27}$$

3.2.3 Stav zářivé rovnováhy

V atmosférách běžných hvězd nedochází k uvolňování energie. Musí tedy platit, že tok energie je ve všech místech atmosféry stejný. Navíc, pokud dominuje přenos energie zářením, můžeme využít vybudovaného matematického popisu atmosféry k zapsání zákona zachování energie. Ve stavu zářivé rovnováhy musí být celková energie pohlcená látkou posléze látkou znovu vyzářena. Celkovou pohlcenou energii lze zapsat (viz. 3.8) jako

$$\int_0^{\infty} d\nu \oint d\omega\, \chi\left(z,\nu\right) I\left(z,\mu,\nu\right) = 4\pi \int_0^{\infty} \chi\left(z,\nu\right) J\left(z,\nu\right) d\nu. \tag{3.28}$$

Dále, celkovou vyzářenou energii lze zapsat (viz. 3.9)

$$\int_0^{\infty} d\nu \oint d\omega\, \eta\left(z,\nu\right) = 4\pi \int_0^{\infty} \chi\left(z,\nu\right) S\left(z,\nu\right) d\nu. \tag{3.29}$$

Spojením obou těchto vztahů lze pro stav zářivé rovnováhy napsat

$$\int_0^{\infty} \chi_\nu \left(S_\nu - J_\nu\right) d\nu = 0. \tag{3.30}$$

3.2.4 Difuzní přiblížení

V nejhlubších vrstvách atmosféry stav látky přechází ke stavu termodynamické rovnováhy, kdy se S_ν blíží k Planckovu rozdělení B_ν. Vybere se bod $\tau_\nu \gg 1$ a rozvine se S_ν v řadu:

$$S_\nu(t_\nu) \approx B_\nu(t_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n B_\nu}{d\tau_\nu^n}(t_\nu - \tau_\nu)^n. \tag{3.31}$$

Potom z přesného řešení 3.20 dostáváme vzorec popisující úhlovou závislost $I_\nu(\tau_\nu,\mu)$ pro $0 \leq \mu \leq 1$ jako

$$I_\nu(\tau_\nu,\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B_\nu}{d{\tau_\nu}^n}. \tag{3.32}$$

Pro hluboké vrstvy atmosféry se τ_ν mění mnohem rychleji než B_ν a proto je možné ponechat v řadě pouze první členy a ostatní zanedbat:

$$I_\nu(\tau_\nu,\mu) = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \tag{3.33}$$

3.3 Diferenciální metody řešení rovnice přenosu

3.3.1 Rovnice přenosu jako diferenciální rovnice druhého řádu

Ukazuje se výhodné přepsat rovnici přenosu ve tvaru diferenciální rovnice druhého řádu. Toho lze dosáhnout rozdělením intenzity $I(z,\mu,\nu)$ na část symetrickou a na část antisymetrickou vůči proměnné μ:

$$u(z,\mu,\nu) \equiv (I(z,\mu,\nu) + I(z,-\mu,\nu))/2, \tag{3.34}$$

$$v(z,\mu,\nu) \equiv (I(z,\mu,\nu) - I(z,-\mu,\nu))/2. \tag{3.35}$$

Rovnice přenosu 3.13 platí pro obě hodnoty $\pm\mu$:

$$\pm\mu \frac{\partial I(z,\pm\mu,\nu)}{\partial z} = \chi(z,\nu)\left(S(z,\nu) - I(z,\pm\mu,\nu)\right). \tag{3.36}$$

Sečtením obou těchto rovnic se dostane

$$\mu \frac{\partial v(z,\mu,\nu)}{\partial z} = \chi(z,\nu)\left(S(z,\nu) - u(z,\mu,\nu)\right), \tag{3.37}$$

jejich odečtením pak

$$\mu \frac{\partial u(z,\mu,\nu)}{\partial z} = -\chi(z,\nu)\, v(z,\mu,\nu). \tag{3.38}$$

Dosazením 3.38 do 3.37 je možné vyloučit v, čímž se dostane rovnice druhého řádu v proměnné u:

$$\frac{\mu^2}{\chi(z,\nu)} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\chi(z,\nu)} \frac{\partial u(z,\mu,\nu)}{\partial z}\right) = u(z,\mu,\nu) - S(z,\nu). \tag{3.39}$$

S použitím proměnné τ_ν, definované vztahem 3.11, lze tuto rovnici zjednodušit na

$$\mu^2 \frac{\partial^2 u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu^2} = u_{\mu\nu} - S_\nu. \tag{3.40}$$

Hraniční podmínky je možné volit stejně jako při výpočtu přesného řešení v kap. 3.2.2 pro $\tau = 0$ a pro $\tau = \tau_{max}$. Tedy, pro $\tau = 0$ je $I(0, -\mu,\nu) = 0$, tedy $v_{\mu\nu}(0) = u_{\mu\nu}(0)$, z čehož plyne že

$$\mu \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu}\bigg|_{\tau=0} = u_{\mu\nu}(0). \tag{3.41}$$

Pokud je možné při $\tau = \tau_{max}$ použít difusní přiblížení 3.33

$$I_\nu(\tau_{max}, \mu,\nu) = B_\nu(\tau_{max}) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}\bigg|_{\tau=\tau_{max}}, \tag{3.42}$$

pak z definic 3.34 a 3.35 plyne

$$u_{\mu\nu}(\tau_{max}) = B_\nu(\tau_{max}), \tag{3.43}$$

$$v_{\mu\nu}(\tau_{max}) = -\frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu}{\partial z}\bigg|_{\tau=\tau_{max}}. \tag{3.44}$$

S použitím 3.38 je možné napsat, že

$$\mu \frac{\partial u_{\mu\nu}}{\partial \tau_\nu}\bigg|_{\tau=\tau_{max}} = \frac{\mu}{\chi_\nu} \left|\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right|_{\tau=\tau_{max}} \equiv \zeta_\nu. \tag{3.45}$$

3.3.2 Zápis rovnice přenosu ve tvaru diferenční rovnice

S využitím okrajových podmínek je možné rovnici 3.40 přepsat do tvaru diferenční rovnice. Vybere se síť bodů následujícím způsobem:

- body v optických hloubkách $\{\tau_d\}_{d=1,2,\ldots,D}$, přičemž platí $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_D$
- body v úhlové proměnné $\{\mu_m\}_{m=1,2,\ldots,M}$
- body pro různé frekvence $\{\nu_m\}_{n=1,2,\ldots,N}$

Dále se zavede označení odpovídající veličiny g:

$$g_{dmn} \equiv g(\tau_d,\mu_m,\nu_n).$$

Protože je nevýhodné pracovat s maticemi řádu $D \times M \times N$, zavede se nový index i tak, že platí

$$g_{di} \equiv g_{dmn}, \text{ přičemž } i = m + (n-1)M.$$

Příslušné integrální výrazy, vznikající při výpočtu S_ν je nutné nahradit odpovídajícími sumami (viz [55], str. 207).

S použitím označení

$$\Delta x_{d+1/2} \equiv x_{d+1} - x_d$$

se nyní aproximuje první a druhá derivace výrazem

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_{d+1/2,i} \approx \frac{\Delta X_{d+1/2,i}}{\Delta\tau_{d+1/2,i}}, \tag{3.46}$$

$$\left(\frac{d^2X}{d\tau^2}\right)_{d,i} \approx \frac{\left(\frac{dX}{d\tau}\right)_{d+1/2,i} - \left(\frac{dX}{d\tau}\right)_{d-1/2,i}}{\left(\Delta\tau_{d+1/2,i} + \Delta\tau_{d-1/2,i}\right)\Big/ 2}. \tag{3.47}$$

S označením

$$\Delta\tau_{d\pm1/2,i} \equiv \frac{1}{2}\left(\chi_{d\pm1/2,i} + \chi_{d,i}\right)|z_{d\pm1} - z_d|, \qquad (3.48)$$

$$\Delta\tau_{d,i} \equiv \frac{1}{2}\left(\Delta\tau_{d-1/2,i} + \Delta\tau_{d+1/2,i}\right), \qquad (3.49)$$

$$(3.50)$$

lze přepsat rovnici 3.40 následujícím způsobem:

$$\frac{\mu_i^2}{\Delta\tau_{d-1/2,i}\Delta\tau_{d,i}}u_{d-1,i} - \frac{\mu_i^2}{\Delta\tau_{d,i}}\left(\frac{1}{\Delta\tau_{d-1/2,i}} + \frac{1}{\Delta\tau_{d+1/2,i}}\right)u_{d,i} + \frac{\mu_i^2}{\Delta\tau_{d,i}\Delta\tau_{d+1/2,i}}u_{d+1,i} = u_{d,i} - S_{d,i}, \qquad (3.51)$$

kde $i = 1,2,\ldots,I$, $d = 2,3,\ldots,D-1$. Pokud se zavede vektor $\mathbf{u}_i$ dimenze I tak, aby $(\mathbf{u}_d)_i \equiv u_{d,i}$, pak lze rovnici 3.51 přepsat ve tvaru maticové rovnice

$$-\mathfrak{A}_d\mathbf{u}_{d-1} + \mathfrak{B}_d\mathbf{u}_d - \mathfrak{C}_d\mathbf{u}_{d+1} = \mathfrak{L}_d, \qquad (3.52)$$

ve které jsou definice $\mathfrak{A}_d$,$\mathfrak{B}_d$,$\mathfrak{C}_d$, $\mathfrak{L}_d$ patrné z původní rovnice 3.51.

Hraniční podmínky pro tuto rovnici se získají z Taylorova rozvoje

$$u_{2,i} = u_{1,i} + \Delta\tau_{3/2,i}\left(\frac{du}{d\tau}\right)_{1,i} + \frac{1}{2}\Delta\tau_{3/2,i}^2\left(\frac{d^2u}{d\tau^2}\right)_{1,i}, \qquad (3.53)$$

které vedou s pomocí vztahů 3.40 a 3.41 na

$$\mu_i\frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\Delta\tau_{3/2,i}} = u_{1,i} + \Delta\tau_{3/2,i}\frac{u_{1,i} - S_{1,i}}{2\mu_i}, \qquad (3.54)$$

nebo v odpovídající maticové formě na

$$\mathfrak{B}_1\mathbf{u}_1 - \mathfrak{C}_1\mathbf{u}_2 = \mathfrak{L}_1. \qquad (3.55)$$

Podobně pro $\tau = \tau_{max}$ lze získat s použitím rozvoje

$$u_{D-1,i} = u_{D,i} - \Delta\tau_{D-1/2,i}\left(\frac{du}{d\tau}\right)_{D,i} + \frac{1}{2}\Delta\tau_{D-1/2,i}^2\left(\frac{d^2u}{d\tau^2}\right)_{D,i} \qquad (3.56)$$

hraniční podmínku

$$\mu_i\frac{u_{D,i} - u_{D-1,i}}{\Delta\tau_{D-1/2,i}} = \zeta_{D,i} - \Delta\tau_{D-1/2,i}\frac{u_{D,i} - S_{D,i}}{2\mu_i}, \qquad (3.57)$$

kterou jsme získali s použitím vztahů 3.40 a 3.45. Tato rovnice se zapíše v maticové formě jako

$$-\mathfrak{A}_D\mathbf{u}_{D-1} + \mathfrak{B}_D\mathbf{u}_D = \mathfrak{L}_D. \qquad (3.58)$$

Položíme $\mathfrak{A}_1 \equiv 0$,$\mathfrak{C}_D \equiv 0$.

3.3.3 Feautrierovo řešení

Maticové rovnice 3.52,3.55,3.58 mají následující tvar:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{B}_1 & -\mathfrak{C}_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & & & \\ -\mathfrak{A}_2 & \mathfrak{B}_2 & -\mathfrak{C}_2 & 0 & \dots & \dots & & & \\ 0 & -\mathfrak{A}_3 & \mathfrak{B}_3 & -\mathfrak{C}_3 & \dots & \dots & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ & & & & \dots & -\mathfrak{A}_{D-1} & \mathfrak{B}_{D-1} & -\mathfrak{C}_{D-1} \\ & & & & \dots & 0 & -\mathfrak{A}_{D-1} & \mathfrak{B}_{D-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_2 \\ \mathfrak{u}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathfrak{u}_{D-1} \\ \mathfrak{u}_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{L}_1 \\ \mathfrak{L}_2 \\ \mathfrak{L}_3 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathfrak{L}_{D-1} \\ \mathfrak{L}_D \end{pmatrix} \tag{3.59}$$

Tato soustava maticových rovnic se řeší následujícím způsobem: z rovnice 3.55 je možné vypočítat $\mathfrak{u}_1$:

$$\mathfrak{u}_1 = \mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{C}_1\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{L}_1 \equiv \mathfrak{D}_1\mathfrak{u}_2 + \mathfrak{v}_1. \tag{3.60}$$

Podobně dostáváme vztah mezi $\mathfrak{u}_d$ a $\mathfrak{u}_{d+1}$:

$$\mathfrak{u}_d = \mathfrak{D}_d\mathfrak{u}_{d+1} + \mathfrak{v}_d,\ d = 1,2,\dots D \tag{3.61}$$

kde se použilo označení

$$\mathfrak{D}_d \equiv \left(\mathfrak{B}_d - \mathfrak{A}_d\mathfrak{D}_{d-1}\right)^{-1}\mathfrak{C}_d, \tag{3.62}$$

$$\mathfrak{v}_d \equiv \left(\mathfrak{B}_d - \mathfrak{A}_d\mathfrak{D}_{d-1}\right)^{-1}\left(\mathfrak{L}_d + \mathfrak{A}_d\mathfrak{v}_{d-1}\right). \tag{3.63}$$

Z poslední rovnice (pro $d = D$) máme $\mathfrak{u}_D = \mathfrak{v}_D$ a tuto hodnotu dosadíme do rovnice 3.61 a vypočítáme $\mathfrak{u}_d$ pro $d = D-1,\dots,2,1$.

Numerické analýzy ukázaly, že popsaná Feautrierova metoda je vysoce stabilní. Navíc je možné tuto metodu ještě zrychlit s použitím proměnných Eddingtonovských faktorů. Proměnné totiž zbytečně obsahují úhlovou proměnnou. Integrujeme-li tedy rovnici 3.40 přes μ, dostaneme:

$$\frac{\partial^2\left(f_\nu J_\nu\right)}{\partial {\tau_\nu}^2} = J_\nu - S_\nu, \tag{3.64}$$

kde se Eddingtonovy faktory definují podle 3.7. Hraniční podmínky pro tuto rovnici lze získat z vypočtených vztahů 3.41, 3.45 jako

$$\left.\frac{\partial\left(f_\nu J_\nu\right)}{\partial\tau_\nu}\right|_{\tau=0} = h_\nu J_\nu\left(0\right), \tag{3.65}$$

$$\left.\frac{\partial\left(f_\nu J_\nu\right)}{\partial\tau_\nu}\right|_{\tau=\tau_{max}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\chi_\nu}\left|\frac{\partial B_\nu}{\partial z}\right|\right)_{\tau=\tau_{max}}, \tag{3.66}$$

kde se použilo označení $h_\nu \equiv f_\nu(0)$.

Při použití Eddingtonovských faktorů se postupuje následovně:

1. ze zadané funkce S_ν (získané např. v prvním přiblížení jako $S_\nu = B_\nu$) se vypočítá $u_{\mu\nu}$,
2. poté se vypočítají f_ν přímo z příslušné definice 3.7 a
3. s použitím rovnic 3.64, 3.65, 3.66 vypočítáme J_ν;
4. iterační proceduru uvedenou v bodech 1–3 opakujeme do té doby, až dosáhneme žádané konvergence.

Kapitola 4

Výpočet modelů atmosfér

4.1 Rovnice hydrostatické rovnováhy

V nepohyblivé atmosféře existuje rovnováha mezi gradientem tlaku a gravitační silou:

$$\nabla p = \rho \mathbf{g}. \tag{4.1}$$

Celkový tlak p je složen jednak z tlaku plynu p_g a tlaku záření p_r, pro které platí:

$$p_g = NkT, \tag{4.2}$$

$$p_r = \frac{4\pi}{c} \int K_\nu d\nu. \tag{4.3}$$

Je výhodné zavést novou proměnnou m vztahem

$$dm = -\rho dz, \tag{4.4}$$

pomocí které lze jednoduše zapsat rovnici 4.1:

$$\frac{dp_r}{dm} + \frac{dp_g}{dm} = g. \tag{4.5}$$

Úpravou vzorce pro tlak záření 4.3 s použitím druhé momentové rovnice 3.17:

$$\frac{dp_r}{dm} = -\frac{4\pi}{c\rho} \int \frac{dK_\nu}{dz} \chi_\nu d\nu = \frac{4\pi}{c\rho} \int H_\nu \chi_\nu d\nu. \tag{4.6}$$

Dostává se tedy rovnice

$$\frac{dp_g}{dm} = g - \frac{4\pi}{c\rho} \int H_\nu \chi_\nu d\nu, \tag{4.7}$$

Rovnici 4.1 lze přepsat do tvaru diferenční rovnice

$$N_d k T_d - N_{d-1} k T_{d-1} + \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^{N} w_n \left(f_{dn} J_{dn} - f_{d-1,n} J_{d-1,n} \right) = g(m_d - m_{d-1}), \tag{4.8}$$

kde m_d je hmota ve sloupci jednotkové plochy, K_ν je vyjádřeno pomocí Eddingtonova faktoru 3.7. Počáteční hodnoty pro tuto rovnice je možné získat z 4.1, která se přepíše do tvaru diferenční rovnice

$$N_1 k T_1 = m_1 \left(g - \frac{4\pi}{c\rho_1} \sum_{n=1}^{N} w_n \chi_n h_n J_{1,n} \right). \tag{4.9}$$

4.2 Konvekce

4.2.1 Základní představy

Přenos energie ve hvězdných atmosférách se uskutečňuje dvěma způsoby: konvekcí a zářením. Ukazuje se, že konvektivní procesy ve hvězdných atmosférách jsou turbulentní a tedy velmi složité. Proto se jejich popis při studiu atmosfér hvězd obyčejně omezuje na čistě fenomenologický.

Pro rozlišení mezi stabilní a nestabilní atmosférou se používá tzv. Schwarzschildovo kritérium. Pokud se element plazmy, vychýlený ze své rovnovážné polohy o Δr, vrací zpět, pak se jedná o stabilní atmosféru a konvekce se neuplatní. Za předpokladu, že dochází k vyrovnávání tlaků mezi elementem a okolním prostředím, ale nedochází k výměně energie (adiabatický proces), pak se při pohybu elementu změní jeho hustota o

$$(\Delta\rho)_E = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_A \Delta r,$$

kde index E značí „element“, A „adiabatický“. Bude-li jeho nová hustota menší než hustota okolní plazmy, pak bude element pokračovat ve stejném směru – bude se jednat o nestabilní atmosféru. Označí-li se jako $(dp/dr)_R$ gradient hustoty, pak podmínka stability zní[1]

$$(\Delta\rho)_E = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_A \Delta r > (\Delta\rho)_R = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_R \Delta r. \tag{4.10}$$

4.2.2 Teorie délky promíchávání

Ukazuje se, že efekt konvekce je možné popsat pomocí charakteristické délky promíchávání, na které dochází k výměně energie konvekcí.

Zavedou se následující gradienty teploty: ∇_R — zářivý gradient (který by existoval, pokud by nedocházelo ke konvekci), ∇_A — adiabatický gradient, ∇_E — gradient teploty v konvektivních elementech, ∇ — skutečný gradient teploty, definované následujícími způsoby:

$$\nabla_R \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_R, \tag{4.11}$$

$$\nabla_A \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_A, \tag{4.12}$$

$$\nabla_E \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right)_E, \tag{4.13}$$

$$\nabla \equiv \left(\frac{d\ln T}{d\ln p}\right). \tag{4.14}$$

Bude-li se uvažovat element látky, pohybujícího se směrem „nahoru“ (tj. ven z atmosféry). Označíme-li jako δT rozdíl teplot elementu a okolního plynu, pak energie předaná jednotce objemu plynu je rovna $\rho C_p \delta T$, kde C_p je příslušné specifické teplo. Tok energie, přenesený elementy přemisťujícími se na vzdálenosti Δr střední rychlostí $\bar{u}$, je roven

$$\pi F_{\mathrm{konv}} = \rho C_p \bar{u} \delta T = \rho C_p \bar{u} \left[\left(-\frac{dT}{dr}\right) - \left(-\frac{dT}{dr}\right)_E\right] \Delta r. \tag{4.15}$$

[1] Díky tomu, že $\frac{d\rho}{dr} < 0$.

Položíme-li $\Delta r = l/2$, kde l je střední délka promíchávání a zavedeme-li

$$H \equiv \left(-\frac{d\ln p}{dr}\right)^{-1} = \frac{p}{g\rho}, \tag{4.16}$$

lze přepsat rovnici 4.15 do tvaru

$$\pi F_{\mathrm{konv}} = \frac{1}{2}\rho C_p \bar{u} T(\nabla - \nabla_E) l/H. \tag{4.17}$$

Pro výpočet hodnoty $\bar{u}$ vypočítáme práci získanou elementem při působení vztlakových sil a porovnáme ji s kinetickou energií elementu. Označíme-li jako δp rozdíl tlaků elementu a okolní hmoty, pak vztlaková síla je rovna $f_v = -g\delta p$. Zlogaritmovanou stavovou rovnici $\ln\rho = \ln p - \ln T + \ln\mu$ lze upravit na tvar $d(\ln\rho) = d(\ln p) - Qd(\ln T)$, kde $Q \equiv (1 - \frac{\partial \ln\mu}{\partial \ln T})_p$. Po ustavení rovnováhy je $\delta p = 0$ a tedy $\delta\rho = -Q\rho\delta T/T$, takže lze napsat

$$f_v = (gQ\rho/T)\delta T = (gQ\rho/T)\left[\left(-\frac{dT}{dr}\right) - \left(-\frac{dT}{dr}\right)_E\right]\Delta r. \tag{4.18}$$

Pro výpočet střední práce, vykonané elementy, je nutné zintegrovat přes Δr v mezích od 0 do $l/2$:

$$\bar{w} = \int_0^{l/2} f_b \Delta r d(\Delta r) = (gQ\rho H/8)(\nabla - \nabla_E)(l/H)^2. \tag{4.19}$$

Předpokládáme-li, že polovina této energie se ztratí na tření (tedy $\frac{1}{2}\rho\bar{u}^2 = \frac{1}{2}\bar{w}$), pak je

$$\bar{v} = (gQH/8)^{1/2}(\nabla - \nabla_E)^{1/2} l/H. \tag{4.20}$$

Dosazením do 4.17 se dostává

$$\pi F_{\mathrm{konv}} = (gQH/32)^{1/2}\rho C_p T(\nabla - \nabla_E)^{3/2}(l/H)^2. \tag{4.21}$$

Pro uzavření teorie potřebujeme postup výpočtu ∇ a ∇_E z ∇_R a ∇_A. Proto se zavede parametr efektivity přenosu energie γ jako podíl energie rozšiřujícího se elementu a ztráty energie zářením. Tento koeficient lze zapsat jako

$$\gamma = \frac{\nabla - \nabla_E}{\nabla_E - \nabla_A}. \tag{4.22}$$

Ukazuje se, že tento koeficient je možné aproximovat následujícím vzorcem:

$$\gamma = \frac{\rho C_p \bar{u}}{8\sigma_R \tau_e T^3}\left(1 + \frac{1}{2}\tau_e^2\right). \tag{4.23}$$

Ve vztahu τ_e značí rosselandovskou optickou tloušťku elementu s charakteristickým rozměrem l. Celkový tok je dán součtem zářivého a konvektivního toku,

$$\pi F = \pi F_{\mathrm{zář}} + \pi F_{\mathrm{konv}}. \tag{4.24}$$

4.2.3 Modifikace teorie délky promíchávání

Je evidentní, že tímto způsobem popsaná konvekce nemůže dávat přesné výsledky. Naopak numerická řešení hydrodynamických rovnic (viz. např. [1]) jsou náročná na počítačový čas, proto nejsou vhodná pro výpočet modelů. Stručný přehled přístupů, zpřesňujících teorii délky promíchávání, je podán v [10].

4.3 Čárová opacita

Při výpočtu modelů atmosfér je obtížné přesné zahrnutí čárové absorpce milionů čar. To by znamenalo počítat modely atmosfér řádově v desítkách milionů frekvencí. Takovýto přístup je zřejmě mimo možnosti současných počítačů. Proto je nutné použít aproximativní metody, které by výpočet opacity zjednodušily. Mezi nejčastěji používané patří ODF a OS.

4.3.1 ODF

Pro strukturu atmosféry nejsou určující ani tak změny opacity v čarách s vlnovou délkou, ale spíše integrální opacita. Proto výpočet opacity v čarách je možné zjednodušit použitím distribučních funkcí opacity (ODF), navržených Stromem a Kuruczem [83]. Ty jsou definovány na zadaném intervalu frekvencí jako funkce parametru X. Pro zadané X je $P(X)$ definováno jako podíl celkové délky intervalu, kde je χ_ν menší než X ku celkové délce intervalu. Je evidentní, že $P(X)$ je distribuční funkcí[2]. Tímto způsobem je možné aproximovat složitý průběh funkce χ_ν monotónní závislostí $P(X)$.

Pro výpočty modelů atmosfér se používají tabulkové soubory, popisující závislost $P(X)$ na X pro různé hodnoty lokální teploty a tlaku spočtené pro různé hodnoty turbulentní rychlosti a chemického složení. Jejich použití pak vede k úspoře strojového času.

4.3.2 OS

Metoda OS („opacity sampling“) je metodou typu Monte-Carlo. Byla popsána Peytremannem [69]. Při použití OS se náhodně vybere daný počet frekvenčních bodů. Je výhodné (viz. [70]) zvolit intervaly tak, aby bylo více bodů v oblastech s vyšším tokem. Používaný počet frekvencí obvykle bývá řádově desetkrát větší než v případě ODF, proto je metoda OS oproti ODF pomalejší.

4.4 Metoda úplné linearizace

Hlavní idea této metody je založena na tom, že rovnice přenosu spolu s doplňujícími rovnicemi je zapsána takovým způsobem, aby bylo možné získat změny základních proměnných (T,N).

Jako počáteční se obvykle bere model tzv. šedé atmosféry (tj. model atmosféry počítaný za předpokladu, že koeficient absorpce nezávisí na frekvenci) . Tím se získají počáteční hodnoty (T_d,N_d) v uzlech $\{m_d\}$, $d=1,\ldots,D$. Pomocí rovnice 2.18 je možné získat elektronovou koncentraci a pomocí rovnice 2.21 obsazení všech hladin. Z těchto hodnot je možné získat v uzlech $\{\nu_n\}$ hodnoty χ^*_{dn}, η^*_{dn}, střední intenzity J_{dn} a Eddingtonovské faktory f_{dn}. Diferenciací rovnice 3.64 podobně jako v kap. 3.3.2 se získá rovnice obdobná 3.51:

$$\frac{f_{d-1,n}J_{d-1,n}}{\Delta\tau_{d-1/2,n}\Delta\tau_{dn}}-\frac{f_{d,n}J_{d,n}}{\Delta\tau_{dn}}\left(\frac{1}{\Delta\tau_{d-1/2,n}}+\frac{1}{\Delta\tau_{d+1/2,n}}\right)+\frac{f_{d+1,n}J_{d+1,n}}{\Delta\tau_{dn}\Delta\tau_{d+1/2,n}}=\left(1-\frac{n_{e,d}\sigma_e}{\chi_{dn}}\right)J_{dn}-\frac{\eta_{dn}}{\chi_{dn}}. \tag{4.25}$$

Vzorec platí pro $d=2,\ldots,D-1$. Uvedenou rovnici je nutné linearizovat v proměnných δJ_{dn}, δT_d, δN_d.

[2] Toho je možné s výhodou použít při skládání ODF různých zdrojů opacity (viz. [81]).

Schematicky je možné podle [31] celý systém rovnic zapsat se zavedením nových vektorů ψ_d, $d = 1,\ldots,D$

$$\psi_d = \{J_{d,1},\ldots,J_{d,N},N_d,T_d\}^{\mathrm{T}}, \tag{4.26}$$

v případě LTE,

$$\psi_d = \{J_{d,1},\ldots,J_{d,N},N_d,T_d,n_{e,d},n_{1,d},\ldots,n_{l,d}\}^{\mathrm{T}}, \tag{4.27}$$

v případě NLTE. Soustavu rovnic je možné formálně zapsat pomocí nelineárního operátoru $\mathbf{P}$, vektoru $\mathbf{x} = (\psi_1^T,\ldots,\psi_D^T)^T$ jako

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = 0. \tag{4.28}$$

Metoda úplné linearizace odpovídá Newtonově–Raphsonově metodě

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = \mathbf{x}^{(n)} - J(\mathbf{x}^{(n)})^{-1}\mathbf{P}(\mathbf{x}^{(n)}), \tag{4.29}$$

přičemž $J(\mathbf{x}^{(n)})$ značí jakobián v příslušném kroku.

Při řešení této rovnice se obvykle využívá tvaru obdobného rovnici 3.52

$$-\mathfrak{A}_d\psi_{d-1} + \mathfrak{B}_d\psi_d - \mathfrak{C}_d\psi_{d+1} = \mathfrak{L}_d. \tag{4.30}$$

Tuto rovnici je možné řešit metodami popsanými v kap. 3.3.3.

Kapitola 5

Výpočet syntetických spekter

5.1 Základní formulace

Pod pojmem výpočet syntetického spektra se rozumí řešení rovnice přenosu záření (3.13) na základě zadaného modelu atmosféry v daném intervalu vlnových délek. V této rovnici jako hlavní veličina vystupuje intenzita záření $I_\nu(\mu,z)$, ale prakticky se u hvězd měří tok záření $H_\nu(z)$ na povrchu hvězdy ($z = 0$).

V případě výpočtu syntetického spektra se výrazně odlišují dvě pojetí: LTE a NLTE atmosféry. V případě syntézy spekter s předpokladem LTE stačí zadat teplotu T, počet částic v objemové jednotce N a elektronovou koncentraci[1] n_e. V případě NLTE modelu atmosféry je ještě navíc nutné zadat populace vybraných hladin.

V dalším se ukáže výhodné zavést následující terminologii. Explicitními se budou rozumět ty hladiny, jejichž populace se získá přímo řešením dané excitační rovnice. Přechody z těchto explicitních hladin přímo přispívají do čárové a kontinuální absorpce.

5.2 Výpočet opacity

Pro účely spektrální syntézy je výhodné rozdělit absorbční a emisní koeficient na dva příspěvky, na příspěvek od kontinua a od čar,

$$k_\nu = k_\nu^{\mathrm{cont}} + k_\nu^{\mathrm{line}} \tag{5.1}$$

$$\eta_\nu = \eta_\nu^{\mathrm{cont}} + \eta_\nu^{\mathrm{line}}. \tag{5.2}$$

K tomu nevede ani tak jejich fyzikální rozdíl, jako jejich frekvenční závislost. Zatímco kontinuální absorpce vykazuje nepříliš velké změny s frekvencí, je čárová absorpce mnohem silněji závislá na vlnové délce a odpovídajících přechodů je mnohem více.

[1] Teoreticky je možné zadat pouze dvě veličiny (např. T, N). Z výpočetních důvodů je však výhodné zadat také n_e.

5.2.1 Opacita a emisivita v kontinuu

Obecně jsou opacita a emisivita v kontinuu dány následujícími vztahy:

$$
\begin{aligned}
k_\nu^{\text{cont}} &= \overbrace{\sum_i \sigma_{ik}(\nu)\left(n_i - n_i^* e^{-h\nu/kT}\right)}^{1.} + \overbrace{\sum n_e n_+ \tilde{\sigma}_{ff}(\nu,T)\left(1 - e^{-h\nu/kT}\right)}^{2.} + \\
&+ \overbrace{k_\nu^{\text{add}}}^{3.} + \overbrace{\left(n_e\sigma_e + n_l^H \sigma_s(\nu)\right)}^{4.} \qquad (5.3) \\
\eta_\nu^{\text{cont}} &= \overbrace{\frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \sum_i \sigma_{ik}(\nu) n_i^*}^{1.} + \overbrace{\frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \sum n_e n_+ \tilde{\sigma}_{ff}(\nu,T)}^{2.} + \\
&+ \overbrace{\eta_\nu^{\text{add}}}^{3.} + \overbrace{\left(n_e\sigma_e + n_l^H \bar{\sigma}_s(\nu)\right) J_\nu}^{4.} + \overbrace{\eta_\nu^{\text{Ly}}}^{5.} , \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

kde jednotlivé členy popisují:

1. první člen je příspěvek od všech vázaně–volných přechodů; potom je $\sigma_{ik}(\nu)$ příslušný fotoionizační příčný průřez, n_i je populace dané hladiny, n_i^* příslušná LTE populace,
2. druhý člen je příspěvek volně volných přechodů, $\tilde{\sigma}_{ff}$ modifikovaný volně volný příčný průřez[2], n_+ je populace nejbližšího vyššího iontu,
3. opacita (respektive emisivita) nezahrnutá v předchozích dvou členech,
4. čtvrtý člen popisuje koherentní rozptyl v kontinuu; ve vzorci je zahrnut pouze elektronový rozptyl (přičemž σ_e je Thomsonův účinný průřez) a rozptyl na neutrálním vodíku (n_l^H je populace základní hladiny, σ_s, $\bar{\sigma}_s$ jsou příslušné příčné průřezy (viz. [74]), J_ν je střední intenzita záření 3.2),
5. poslední člen reprezentuje termální emisi.

5.2.2 Opacita v čarách

Čáry nejdůležitějších atomů (H, He) je výhodné zahrnout pomocí přesných profilů. U ostatních čar je opacita vzniklá přechodem mezi hladinami i,j dána dle následujícího schématu:

$$k_{ij}^{\text{line}}(\nu) = b_i \frac{\pi e^2}{mc} \frac{N_{\text{ION}}}{U_{\text{ION}}} g_i f_{ij} \left(1 - \frac{b_j}{b_i} e^{-h\nu/kT}\right) e^{-E_i/kT} H(a,x) \,/ (\sqrt{\pi}\Delta\nu_D) \,, \qquad (5.5)$$

kde N_{ION} je celková koncentrace iontu ION, U_{ION} jeho partiční funkce, f_{ij} síla oscilátoru, g_i statistická váha a E_i excitační potenciál spodní hladiny, proměnná x je dána vzorcem

$$x = \frac{\nu - \nu_{ij}^{\text{o}}}{\Delta\nu_D}, \qquad (5.6)$$

[2] Modifikovaný volně volný průřez je dán jednak skutečným volně–volným průřezem a jednak příspěvkem vázaně–volných přechodů z vyšších, neexplicitních hladin (viz. [55],[74]).

kde ν_{ij}° je centrální frekvence čáry a $\Delta\nu_D$ je Dopplerovská pološířka daná vzorcem

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_{ij}^{\circ}}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m_{\rm ION}} + v_{\rm turb}^2}, \tag{5.7}$$

$m_{\rm ION}$ atomová váha iontu ION, $v_{\rm turb}$ turbulentní rychlost, $H(a,x)$ Voigtova funkce, ve které je parametr a dán jako součet tří rozšíření,

$$a = (\Gamma_R + \Gamma_S + \Gamma_W)/(4\pi\Delta\nu_D)\ , \tag{5.8}$$

kde Γ_R,Γ_S,Γ_W reprezentují postupně zářivé, Starkovo a Van der Waalsovo rozšíření, NLTE b-faktory jsou obecně definovány jako

$$b_i = \frac{n_i}{n_i^*}. \tag{5.9}$$

V případě LTE je $b_i = b_j = 1$.

Celková čárová opacita $k_\nu^{\rm line}$ je dána jako součet všech možných příspěvků

$$k_\nu^{\rm line} = \sum k_{ij}^{\rm line}(\nu), \tag{5.10}$$

které přispívají k opacitě v dané frekvenci ν.

5.2.3 Emisivita v čarách

Obecně pro emisivitu v čarách platí vzorec

$$\eta_{ij}^{\rm line}(\nu) = S_{ij}(\nu)k_{ij}^{\rm line}(\nu), \tag{5.11}$$

kde S_{ij} je funkce zdroje v čáře. V případě LTE je dána vzorcem

$$S_{ij} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2}\left(e^{-h\nu/kT} - 1\right)^{-1}. \tag{5.12}$$

V případě NLTE je dána vzorcem

$$S_{ij} = \frac{2h\nu_{ij}^3}{c^2}\left(\frac{g_j n_i}{g_i n_j} - 1\right)^{-1}. \tag{5.13}$$

5.2.4 Čáry dvouatomových molekul

Molekulární čáry jsou častým jevem u hvězd pozdních spektrálních tříd. Jsou silně závislé na podmínkách ve hvězdných atmosférách a proto je možné jich použít na určování $\log g$.

Čárový hmotový absorbční koeficient dané rotační čáry (J',J'') náležející k danému vibračnímu pásu (v',v'') elektronového systému (e',e'') je možné podle [78] za předpokladu LTE zapsat jako

$$k^{\rm line}(\nu) = \frac{\pi e^2}{mc}N^*(e'',v'',J'')\ f\ \left(1 - e^{-h\nu^{\circ}/kT}\right) H(a,x)\ /(\sqrt{\pi}\Delta\nu_D)\ . \tag{5.14}$$

Přitom je f síla oscilátoru příslušné čáry a $N^*(e'',v'',J'')$ počet molekul v jednotkovém objemu ve spodní hladině určené kvantovými čísly J'', v'', patřící elektronovému termu e''. Parametry popisující Voigtův profil jsou obdobné jako ve vztahu 5.5.

5.3 Další vlivy ovlivňující výsledné spektrum

Výsledné spektrum, získané pozorováním pozemskými přístroji je ovlivněno mnoha dalšími vlivy, které bezprostředně nesouvisí se strukturou atmosféry hvězdy. Jedná se zejména o rotaci samotné hvězdy (která se projeví v dalším rozšíření spektrálních čar), vliv mezihvězdného prostředí, absorpci záření v zemské atmosféře a konečně instrumentální profil. Zejména posledně uvedený faktor určuje samotný tvar spektra a hlavně také množství informací, jaké můžeme ze spektra získat. Při korektním porovnávání syntetických spekter s pozorovanými musíme vzít mnohé z těchto vlivů do úvahy. Samotné započítání vlivu mezihvězdné a atmosférické absorpce by bylo obtížné, proto je nutné se spíše soustředit na vhodný výběr intervalů pro porovnávání spekter. Naopak, dva důležitější vlivy (rotaci hvězdy a instrumentální profil) lze do zpracování syntetického spektra poměrně jednoduše zahrnout.

5.3.1 Instrumentální profil

Na snížení kvality spektra přístrojem se podle [24] především podílí nedostatečné spektrální rozlišení přístroje, aberace a difrakce.

Instrumentálním profilem $I(\lambda)$ budeme nazývat reakci přístroje na spektrum ve tvaru δ-funkce $\delta(\lambda - \lambda_0)$. V následujících vzorcích je instrumentální profil normován na jednotku plochy. Spektrální profil $F(\lambda)$ vstupující do přístroje je možné chápat jako soubor δ-funkcí, změřené spektrum $D(\lambda)$ je tedy možné zapsat ve tvaru konvoluce

$$D(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} I(\lambda - \lambda_0) F(\lambda_0) d\lambda_0. \tag{5.15}$$

5.3.2 Rotace hvězd

Zjednodušený případ

Rotace hvězdy má především vliv na tvar spektrálních čar, zatímco její vliv na kontinuum je velmi malý ([24]). Za předpokladu, že je hvězda sféricky symetrická a že rotuje jako tuhé těleso s úhlovou rychlostí Ω, pak pro posun $\Delta\lambda$ spektrální čáry vlnové délky λ, která vychází z bodu vzdáleného x od přímky, spojující pozorovatele a střed hvězdy, lze napsat ([24]):

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda\Omega \sin i}{c} x, \tag{5.16}$$

kde c je rychlost světla a i úhel mezi přímkou, spojující pozorovatele a střed hvězdy, a osou rotace.

Tok záření od takové hvězdy je dán výrazem 3.4. Je patrné, že tuto definici lze použít také pro pozorovaný tok z celého povrchu hvězdy, neboť pro ten můžeme napsat

$$F_\nu = \frac{1}{\pi} \int I_\nu \cos\theta d\omega \tag{5.17}$$

pro případ rotačně symetrické hvězdy. Definujeme-li profil čáry

$$H(\lambda) = I_\lambda / I_\lambda^{\mathrm{cont}} \tag{5.18}$$

jako podíl intenzit v daném modě čáry k intenzitě spojitého spektra, pak můžeme zapsat podíl skutečného toku a toku v kontinuu jako

$$F_\lambda/F_\lambda^{\rm cont} = \frac{\int H\left(\lambda - \Delta\lambda\right) I_\lambda^{\rm cont} \cos\theta d\omega}{\int I_\lambda^{\rm cont} \cos\theta d\omega}. \tag{5.19}$$

Pro pomaleji rotující hvězdy lze uvažovat závislost $H\left(\lambda - \Delta\lambda\right)$ pouze na souřadnici x. Předcházející vztah je možné přepsat jako

$$F_\lambda/F_\lambda^{\rm cont} = \frac{\int H\left(\lambda - \Delta\lambda\right) I_\lambda^{\rm cont} dx\,dy/R^2}{\int I_\lambda^{\rm cont} \cos\theta d\omega}. \tag{5.20}$$

Změnou integrační proměnné je pak

$$F_\lambda/F_\lambda^{\rm cont} = \frac{\int\limits_{-\Delta\lambda_L}^{-\Delta\lambda_L} H\left(\lambda - \Delta\lambda\right) \int_{-y_1}^{y_1} I_\lambda^{\rm cont}\, d\Delta\lambda\, dy/R/\Delta\lambda_L}{\int I_\lambda^{\rm cont} \cos\theta d\omega}, \tag{5.21}$$

ve kterém je

$$\Delta\lambda_L = \frac{\lambda}{c}\Omega R \sin i = \frac{\lambda}{c} v \sin i, \tag{5.22}$$

$$y_1 = \left(R^2 - x^2\right)^{1/2} = R\left[1 - \left(\frac{\Delta\lambda}{\Delta\lambda_L}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{5.23}$$

Definujeme-li nyní funkci $G\left(\Delta\lambda\right)$ jako

$$G\left(\Delta\lambda\right) \equiv \begin{cases} \frac{1}{\Delta\lambda_L} \frac{\int_{-y_1}^{y_1} I_\lambda^{\rm cont} dy/R}{\int I_\lambda^{\rm cont} \cos\theta d\omega}, & |\Delta\lambda| \leq \Delta\lambda_L \\ 0, & |\Delta\lambda| > \Delta\lambda_L. \end{cases} \tag{5.24}$$

Pak je možné přepsat 5.21 ve tvaru konvoluce

$$F_\lambda/F_\lambda^{\rm cont} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} H\left(\lambda - \Delta\lambda\right) G(\Delta\lambda) d\Delta\lambda = H(\lambda) * G(\lambda). \tag{5.25}$$

Obecnější případ

Nejobecnější popis tohoto problému bere do úvahy ztemnění disku ke kraji hvězdy. Uvažujeme-li bod na povrchu hvězdy se souřadnicemi $\mathbf{R} = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$, vektor úhlové rychlosti $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega\sin i, \Omega\cos i)$, pozorovatel se nachází ve směru $\mathbf{r} = (0,0,1)$, pak radiální rychlost uvažovaného bodu vzhledem k pozorovateli je

$$v_z = \mathbf{r}\left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{R}\right) = \boldsymbol{\Omega}\left(\mathbf{R} \times \mathbf{r}\right) = -R\Omega \sin i \sin\theta\cos\varphi. \tag{5.26}$$

Vzorec 5.17 je možné s uvedením všech závislostí zapsat jako

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\int I(\cos\theta, \lambda(1 + \frac{1}{c}R\Omega\sin i \sin\theta\cos\varphi) \cos\theta \sin\theta d\theta d\varphi. \tag{5.27}$$

Označíme-li jako

$$E(\lambda,\theta) = \int I\left(\cos\theta,\lambda\left(1+\frac{1}{c}R\Omega\sin i\sin\theta\cos\varphi\right)\right)d\phi, \tag{5.28}$$

je možné předchozí vzorec přepsat jako

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int E(\lambda,\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta. \tag{5.29}$$

Pro pomaleji rotující hvězdy není nutné uvažovat takto obecně. Numerické výpočty, které jsem provedl ukázaly, že tímto způsobem je možné aproximovat výpočet přesného rotačního rozšíření pro $v\sin i < 10\ \mathrm{km\,s^{-1}}$. To se shoduje s hodnotou, uváděnou v citované literatuře.

5.3.3 Makroturbulentní rychlost

Představíme-li si, že povrch hvězdy je rozdělen na makroskopické části, jejichž rozdělení rychlostí je $\Theta(v)$, pak pro intenzitu záření platí podle [24]

$$I_\nu = I_\nu^o * \Theta(\Delta\lambda), \tag{5.30}$$

kde I_ν^o je intenzita záření bez započtení makroturbulentních pohybů. Celkový tok je dán výrazem

$$F_\nu = \frac{1}{\pi}\oint I_\nu^o * \Theta(\Delta\lambda)\cos\theta d\omega. \tag{5.31}$$

Za předpokladu izotropie funkce $\Theta(\Delta\lambda)$ je možné předchozí vzorec přepsat jako

$$F_\nu = \frac{1}{\pi}\Theta(\Delta\lambda) * \oint I_\nu^o\cos\theta d\omega. \tag{5.32}$$

Tvar výsledné konvoluce je obdobný vzorci pro rozšíření spektrálních čar způsobenému rotací.

Kapitola 6

Modely atmosfér

6.1 Model ATLAS

Modely ATLAS publikoval Kurucz postupně v [40, 41, 42].

Kuruczovy modely patří k jedněm z nejpoužívanějších. Síť těchto modelů, spočtená na základě modelu ATLAS9 je dostupná prostřednictvím počítačové sítě a CD-ROM disku [43], pokrývá široký rozsah parametrů atmosfér hvězd.

Poslední Kuruczův program určený pro modelování hvězdných atmosfér, ATLAS9, používá tyto základní předpoklady a postupy:

- Atmosféra složená z planparalelních vrstev nacházejících se v hydrostatické rovnováze.
- Předpoklad LTE.
- Zahrnutí opacity s použitím ODF (viz kap. 4.3.1).
- Atomární data a molekulární data použitá pro výpočet ODF zahrnují přibližně 58 milionů atomárních a molekulárních čar celkem 30-ti atomů a 12-ti molekul (viz. [42]). Soubory ODF jsou počítány celkem pro 330 intervalů vlnových délek, v každém intervalu je opacita aproximována ve 11-ti bodech.
- Konvekce je zahrnuta pomocí teorie délky promíchávání, viz. kap. 4.2.2. Parametr l/H, charakterizující konvekci, jsem v souladu s výsledky numerické simulace konvekce [1] položil $l/H = 1{,}5$. Stejná hodnota je zvolena pro modely odvozené od programu MARCS (viz. kap. 6.3, 6.4).
- Pro modely jsem volil $v_{\rm turb} = 2{,}0\,{\rm km\,s^{-1}}$.

Detailní popis numerických metod používaných programem ATLAS9 neznám, protože příslušná literatura je nedosažitelná.

6.2 Model TLUSTY

TLUSTY je program navržený pro výpočet modelů atmosfér především horkých hvězd. Umožňuje výpočet NLTE modelů, což je jeden z důvodů, pro které byl vybrán pro testování. Výpočet se omezuje jen na atmosféru statickou, složenou z planparalelních, horizontálně homogenních vrstev.

Detailní popis programu podal Hubený [30]. Základní rovnice (rovnice přenosu záření, hydrostatické rovnováhy, zářivé rovnováhy, statistické rovnováhy, zachování náboje a počtu částic) program řeší metodou úplné linearizace (viz. kap. 4.4). TLUSTY používá modifikace této metody navržené Hubeným a Lanzem [31, 32], které vedou ke snížení výpočetního času. Novější přístup k výpočtu obsazení hladin, použitý v programu TLUSTY, podal Hubený a Lanz v [32]. Pro samotné používání programu jsem prostudoval návod [33].

Konvekce byla zahrnuta pomocí standardní teorie délky promíchávání, viz. kap. 4.2.2.

Postup výpočtu NLTE modelu pomocí programu TLUSTY je následující:

1. Výpočet LTE šedého modelu jako první aproximace.
2. Následně pak výpočet LTE modelu.
3. Model, ve kterém je kontinuum počítáno jako NLTE.
4. Konečně NLTE model jak v kontinuu, tak v čarách.

6.3 Modely Gustafssona a kol.

Popis modelů MARCS byl publikován v [26], samotná síť modelů pak v [6]. Síť obsahuje LTE modely atmosféry pro hvězdy s teplotou $3750\,\mathrm{K} \leq T_{\mathrm{eff}} \leq 6000\,\mathrm{K}$, gravitačním zrychlením $0{,}75 \leq \log g \leq 3{,}0$, chemickým složením $-3{,}0 \leq [\mathrm{A/H}] \leq 0{,}0$ a pro hodnoty mikroturbulentní rychlosti $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $v_{\mathrm{turb}} = 5{,}0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Síť modelů byla publikována již před více jak dvaceti lety, přesto je dosud používána (viz. např. [9, 50, 82]).

- Gustafssonovy modely předpokládají atmosféru složenou z homogenních, planparalelních vrstev nacházejících se v hydrostatické a lokální termodynamické rovnováze.
- Tlak všech molekul s výjimkou molekuly H_2 se zanedbává.
- Zahrnutí opacity s použitím ODF (viz kap. 4.3.1).
- V rámci čárové absorpce byly zahrnuty čáry prvků H, He, C, N, O, Ne, Na, Mg, Al, Si, S, K, Ca, Cr, Fe, Ni a navíc všech dvouatomových molekul, složených z prvků H, C, N, O a dále H_2O. Celkový počet atomových čar dosahuje asi 50 000.
- Jako zdroj absorpce v kontinuu byl uvažován H^-, HI, H_2^-,H_2^+, CI, MgI, AlI, SiI.
- Konvekce je započítána v rámci teorie délky promíchávání, (viz kap. 4.2.2) s parametrem $l/H = 1{,}5$.

Metoda řešení rovnice přenosu je v obecnosti Feautrierovo schéma, popsané v kap. 3.3.3 s některými modifikacemi (podrobněji viz. [26]). Řešení systému rovnic se provádí metodou úplné linearizace (viz. kap. 4.4). Čárová opacita byla do modelu zahrnuta pomocí ODF (viz. kap. 4.3.1).

Hlavní nevýhody těchto modelů jsou zřejmé. Použitá atomární data jsou v dnešní době poměrně zastaralá a celkový počet zahrnutých čar je nedostatečný pro přesné zahrnutí čárové opacity.

6.4 Modely Pleze, Bretta a Nordlunda

6.4.1 Základní astrofyzikální předpoklady a numerické metody

Základní popis svých modelů publikovali Plez, Brett a Nordlund v [73]. Modely jsou spočteny pomocí programu SOSMARCS, odvozeného od programu MARCS (viz. kap. 6.3). Program SOSMARCS počítá model sféricky symetrické atmosféry nacházející se v hydrostatické rovnováze za předpokladu LTE. Původní práce obsahovala pouze modely pro hvězdy s $3000\,\mathrm{K} \leq T_{\mathrm{eff}} \leq 4000\,\mathrm{K}$. Plez [72] rozšířil síť o planparalelní modely hvězd s vyššími efektivními teplotami ($3600\,\mathrm{K} \leq T_{\mathrm{eff}} \leq 4750\,\mathrm{K}$), počítané na základě planparalelního modelu SOSMARCS (POSMARCS).

Mezi základní astrofyzikální předpoklady a numerické techniky modelů POSMARCS patří:

- Horizontálně homogenní atmosféra složená z planparalelních vrstev, nacházející se v hydrostatické rovnováze a v lokální termodynamické rovnováze.
- Konvekce je zahrnuta pomocí teorie délky promíchávání (viz kap. 4.3.1).
- Je zanedbán turbulentní tlak.
- Čárová opacita je zahrnuta pomocí OS [19] (viz. kap. 4.3.2).
- V rovnicích popisujících atomární a molekulární rovnováhu bylo zahrnuto 65 různých molekul a 38 různých atomů podle Tsuji [85] se změnami použitých konstant.
- Řešení systému rovnic se provádí metodou úplné linearizace (viz. kap. 4.4).

6.4.2 Porovnání teplotní stratifikace jednotlivých modelů

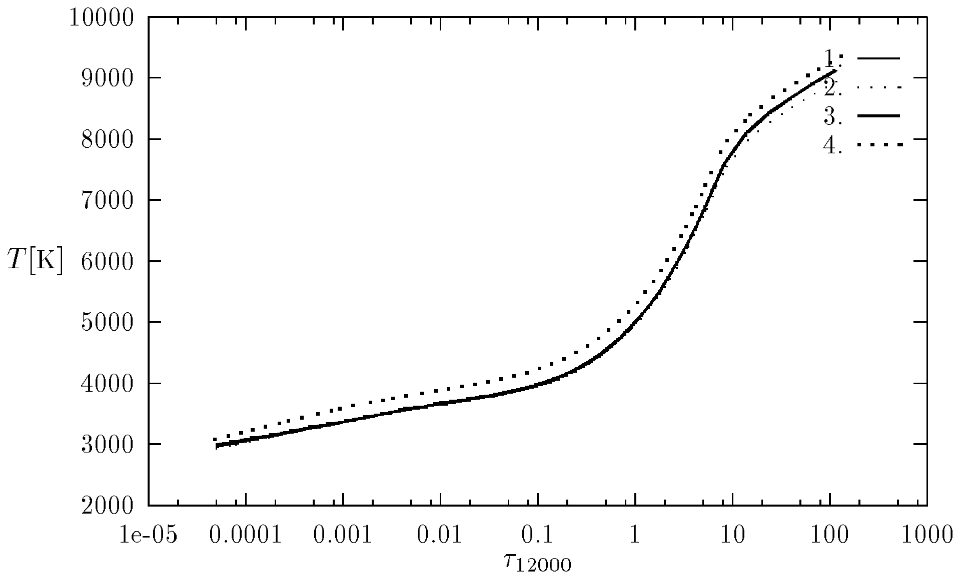
Na obr. 6.1, 6.2 je porovnání teplotní stratifikace v závislosti na τ_{12000} respektive na m. Jednotlivá čísla mají následující význam: 1. model hvězdy s $T_{\mathrm{eff}} = 4500\,\mathrm{K}$, $\log g = 2{,}0$, $[\mathrm{Fe/H}] = 0{,}0$, 2. model hvězdy s nižší obsahem kovů o 0,3 dex, 3. model hvězdy s gravitačním zrychlením vyšším o 0,5 dex, 4. model hvězdy s teplotou vyšší o 250 K. Z obrázků je zřejmé, že zatímco v závislosti na proměnné m jsou rozdíly jednotlivých modelů poměrně dobře patrné, v závislosti na optické hloubce τ_{12000} jsou rozdíly špatně zřetelné. Ukazuje se tedy, že závislost teploty na m je pro porovnání jednotlivých modelů vhodnější.

Tato malá citlivost teplotní stratifikace ve škále optických hloubek na chemickém obsahu je zřejmě jednou z příčin vztahu nalezeného Gustafssonem a kol. [26]

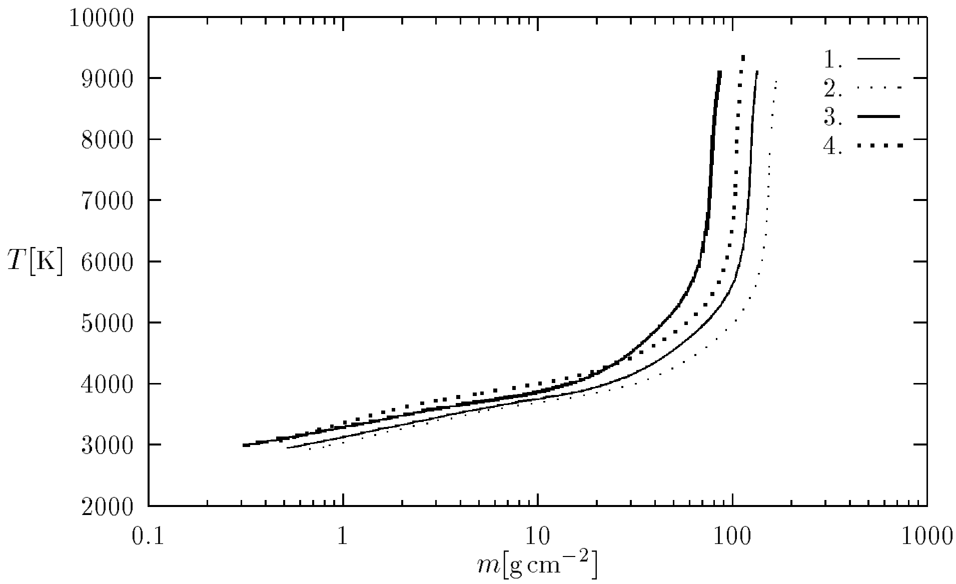
$$\Delta T(\tau) \approx f(\tau)\ \Delta[\mathrm{A/H}], \tag{6.1}$$

kde $\Delta T(\tau)$ je změna teploty v optické hloubce τ, vyvolaná změnou chemického obsahu $\Delta[\mathrm{A/H}]$ modelu. Vztah platí pro $-1{,}0 \leq [\mathrm{A/H}] \leq 0{,}0$.

Z obrázku 6.2 je patrné, že snížení obsahu kovů vede k ochlazení vnitřních vrstev atmosféry, způsobenému nižším zpětným ohřevem prostřednictvím čar kovů. Zvýšení gravitačního zrychlení v podstatě odpovídá horizontálnímu posunutí grafu. Naopak zvýšení efektivní teploty ve své podstatě odpovídá vertikálnímu posunutí grafu.



Obrázek 6.1: Porovnání teplotní stratifikace modelů ve škále optických hloubek.



Obrázek 6.2: Porovnání teplotní stratifikace modelů v závislosti na m.

6.5 Modely Pavlenka a Jakoviny

Jejich detailní popis, spolu se srovnáním s dalšími modely, byl podán v [64, 65]. Popis programu SAM71 byl podán v [65].

Mezi základní astrofyzikální předpoklady patří:

- Zahrnutí čárové absorpce metodou OS podle [37] (viz. kap. 4.3.2).
- Data o atomových čarách, nutná pro realizaci metody OS, byly brány z [45]. Absorpce molekul CN, CO, H_2, NH, OH se počítají pomocí metod, popsaných v [38].
- Při výpočtu těchto modelů bylo použito 500 uzlů ve frekvenčním intervalu $300 < \lambda < 20\,000\ nm$. Absorpce atomy a ionty jako zdroj pokrývkového efektu byla uvažována jen pro $\lambda < 700\ nm$.
- Parametr délky promíchávání byl zvolen $l/H = 1{,}0$.

Zvolený počet frekvenci pro výpočet modelů je poněkud malý. Podle [19] je pro metodu OS nutné použít přibližně 10^4 frekvencí.

6.6 Některé další modely vhodné pro K obry

V literatuře je možné najít některé další modely, které lze částečně použít pro hvězdy spektrální třídy K. Většinou se jedná o modely určené především pro M obry, ale sítě modelů svým rozsahem částečně pokrývají také pozdější obry třídy K.

Jedná se například o síť modelů Johnsona a kol. [37]. Modely pokrývají škálu efektivních teplot $2500 \leq T_{\rm eff} \leq 4000\,{\rm K}$ a gravitačních zrychlení $0{,}0 \leq \log g \leq 2{,}0$. Výpočet modelů je založen na programu ATLAS5 [40], pro popis opacity je použito OS.

Do této skupiny dále patří již zmiňované sféricky symetrické modely [73] a dále modely Browna a kol. [8], F. Querci a M. Querci v [79].

6.7 Modely chromosfér

Na rozdíl od atmosfér, hvězdné chromosféry jsou oblasti, kde teplota roste se vzdáleností od povrchu hvězdy a dosahuje hodnot řádově 10 000 K [51]. Nárůst teploty je způsoben dosud nepříliš dobře prostudovanými procesy. Obecně je přijímáno, že ohřev závisí na magnetickém poli u hvězd spektrálních typů K2 a ranějších, zatímco pro chladnější obry a veleobry je zapříčiněn akustickými vlnami.

Pro studium těchto problémů se obecně používají dva přístupy. Empirická metoda se zabývá globálními charakteristikami atmosféry (viz. [17]), zatímco semiempirický přístup se snaží za jistých zjednodušujících předpokladů zkonstruovat model, který by co možná nejlépe odpovídal pozorovanému spektru [51].

Tato problematika se poněkud vymyká tématu diplomové práce, proto ji nebudu dále rozvíjet.

6.8 Diskuse použití jednotlivých modelů

6.8.1 Model ATLAS

Kvalitu získaného modelu je numericky možné ovlivnit jednak zvýšením počtu vrstev, ve kterých je model počítán, prodloužením intervalu hloubek, do kterých je model počítán a konečně zvýšením počtu iterací. Jednotlivé případy budou nyní podrobně diskutovány. Důvodem je potvrzení správnosti výběru výše uvedených parametrů, které jsem zvolil pro výpočet modelů ATLAS9.

Zvýšení počtu vrstev ze 40 na 60 (což ve svém důsledku vede k započítání vrstev s vyšší teplotou) vede k relativním změnám ve výsledném syntetickém spektru menším než 10^{-4}.

Zvýšení počtu vrstev ze 40 na 60 při zachování hloubkového rozmezí výpočtu modelu (což vede k zjemnění hloubkové škály) vede k relativním změnám ve výsledném syntetickém spektru menším než $3\,.\,10^{-3}$.

Zvýšení počtu iterací z 15-ti na 30 vede k relativním změnám ve spočteném modelu menším než 10^{-3}.

Při výpočtu modelů jsem použil původní hodnoty zmiňovaných parametrů, protože jejich zlepšování nemá podstatný vliv na výsledný model.

Strojový čas potřebný pro výpočet jednoduššího modelu dosahuje na počítači Sun OS asi 200 s, při výpočtu složitějších modelů dosahuje až asi 1000 s.

6.8.2 Model TLUSTY

Rozšíření programu TLUSTY

Do programu TLUSTY jsem přidal možnost zahrnutí čárové absorpce ve formě ODF funkcí podle kap. 4.3.1. Soubory ODF jsem převzal z programu ATLAS9. Pro interpolaci mezi jednotlivými hodnotami v souboru jsem použil totožnou interpolační formuli, jakou používá program ATLAS9 (formule obdobná 7.1).

Dále jsem přidal vztahy převzaté z literatury pro interpolaci příslušných účinných průřezů. Jednotlivé zdroje jsou popsány v kap. 7.7.

Výpočet modelů

Mezi hlavní výhody tohoto programu patří, že uživatel sám zadává, jaké zdroje neprůzračnosti, atomy, ionty, energiové hladiny a jaké přechody se mají při výpočtu používat. To umožňuje velikou flexibilitu programu. Navíc je v programu obsažena celá řada nastavení, zrychlujících konvergenci a zabraňujících divergencím. Přesto se mi nepodařilo spočítat ani LTE model chladné hvězdy. Jednotlivé kroky vedoucí k tomuto negativnímu výsledku nyní shrnu v následujících odstavcích.

Vypočítal jsem LTE vodíkový model hvězdy s teplotou 4000 K, $\log g = 2{,}0$, $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}0\ \mathrm{km\,s^{-1}}$ se zahrnutím kontinua záporného iontu vodíku, přičemž $\mathrm{H^-}$ jsem uvažoval jako explicitní iont.

Navíc se mi podařilo vypočítat podobný model s tím, že jsem rozšířil uvažované prvky o He. Po rozšíření prvků o některé kovy (Mg, Al, Si, Fe), přičemž potřebné údaje jsem převzal ze souborů dodávaných k programu TLUSTY, výpočet divergoval.

Další problém nastal při započítání konvekce. Nepodařilo se mi vypočítat ani vodíkový model s konvekcí (parametr l/H jsem uvažoval rovný 1,5) díky divergencím, které se objevovaly přibližně v pátém kroku iterace.

Příčinou divergencí je zřejmě výpočet δT v metodě úplné linearizace. Podařilo se mi spočítat LTE model bez započtení změn teploty, ve kterém jsem jako nultou aproximaci zvolil model atmosféry spočtený pomocí programu ATLAS9. Přesto ani v tomto případě se mi nedařilo spočítat NLTE model hvězdy (tedy model hvězdy s NLTE hladinami H, He a opacitou vybraných prvků zahrnutou pomocí Kuruczových souborů ODF podle kap. 6.8.2).

Při zadaném modelu atmosféry je však možné přepočítat obsazení hladin daného prvku za předpokladu NLTE. Prakticky jsem tento výpočet provedl pro výpočet NLTE obsazení hladin lithia, jak bude uvedeno v kap. 7.7.

Strojové časy, potřebné pro výpočet jednotlivých modelů silně závisí především na počtu frekvencí, na kterých je model počítán. Výpočet NLTE H-He modelu hvězdy o teplotě 25000 K na počítači IRIX zabere přibližně 30 s strojového času, výpočet NLTE hladin atomu Li zabere 100 s strojového času, výpočet LTE modelu hvězdy bez započtení změn teploty zabere 4000 s strojového času.

6.9 Porovnání jednotlivých modelů

6.9.1 Numerické techniky

Existují v podstatě dvě odlišné koncepce výpočtu modelů atmosféry. Integrální, použitá v modelech ATLAS, je stabilní a vykazuje poměrně rychlou konvergenci. Problémem je teplota v nejvyšším bodě atmosféry, která vychází nižší, což je způsobeno právě použitou numerickou technikou [33]. Oproti tomu metody založené na linearizaci se sice potýkají s problémy spojenými s výskytem divergencí [26], ale je možné přirozené rozšíření na modely bez předpokladu LTE.

Velmi důležitá je také metoda popisu čárové absorpce. Výhodou metody ODF oproti OS je její rychlost. Metodu OS lze jednoduše zobecnit pro výpočet NLTE atmosféry, je možné jednoduše měnit atomární konstanty a např. chemické složení (tedy nejen uvažovat škálované sluneční). Navíc se ukazuje ([19, 70]), že použití ODF může vést k chybám v teplotě okolo 150 K, což je způsobeno tím, že ODF nepopisuje dostatečně přesně silné čáry především na povrchu hvězdy.

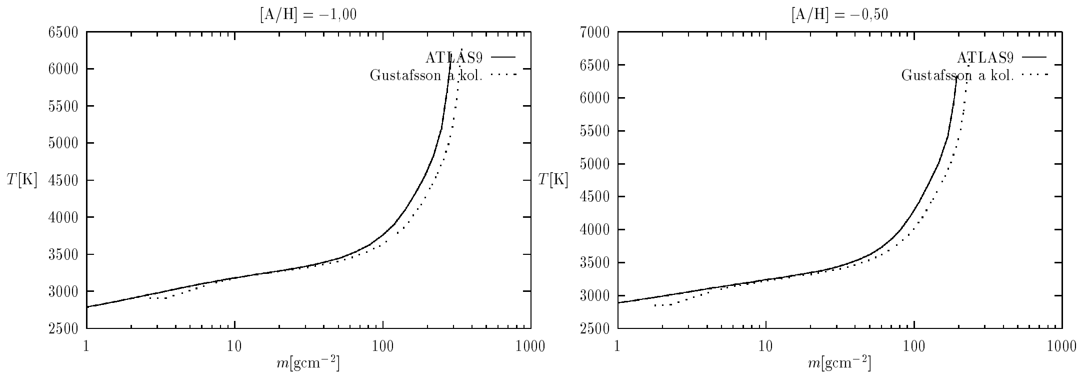
Z hlediska numerických technik se jeví jako nejvýhodnější modely POSMARCS.

6.9.2 Atomární data

Struktura atmosfér K-obrů je silně ovlivněna přítomností velkého počtu atomárních a případně i molekulárních čar. Všeobecně převládá názor, že tyto efekty mají pro chladné hvězdy daleko větší význam než například efekty spojené s NLTE. Proto si myslím, že z hlediska započtené čárové absorpce jsou pro modelování atmosfér K obrů nejvýhodnější modely ATLAS9 a POSMARCS.

6.9.3 Porovnání teplotní stratifikace

Na obr. 6.3 je porovnání teplotní stratifikace modelů Gustafssona a kol. a modelu ATLAS9. Modely byly spočteny pro $T_{\rm eff} = 4000\,{\rm K}$, $\log g = 2{,}25$, $v_{\rm turb} = 2{,}0\ {\rm km\,s^{-1}}$ a pro dvě hodnoty chemického složení ([A/H] = −1,0 a [A/H] = −0,5). Rozdíly mezi jednotlivými modely jsou zřejmě způsobeny nedostatečným zahrnutím čárové absorpce v případě modelů Gustafssona a kol. Tomu nasvědčuje menší rozdíl mezi modely spočtenými s nižší hodnotou [A/H]. Započtení četnější čárové absorbce se projeví zvýšením teploty v hlubších vrstvách atmosféry, podobně jako na obr. 6.2.



Obrázek 6.3: Porovnání modelů ATLAS9 a Gustafsson a kol.

Na obr. 6.4 je uvedeno porovnání modelů ATLAS9 a POSMARCS. Základní model v levém horním rohu odpovídá modelu s $T_{\text{eff}} = 4500\,\text{K}$, $\log g = 2{,}0$, $v_{\text{turb}} = 2{,}0\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, $[\text{A/H}] = 0{,}0$. Ostatní modely vznikly zvýšením gravitačního zrychlení o 0,5 dex, zvýšením efektivní teploty o 250K, snížením obsahem kovů o 0,3 dex. Rozdíly jsou zřejmě způsobeny rozdílným započtením čárové absorpce. Navíc je možné, že rozdíly na povrchu atmosféry jsou způsobeny zmiňovaným jevem, při kterém metoda ODF vede k nesprávnému započtení absorpce čar.

Z porovnání syntetických spekter v oblasti kolem 6500 Å vyplývá, že rozdíly mezi syntetickými spektry, propočítanými modely ATLAS9 a POSMARCS se projeví jen v jádrech především silných čar. Rozdíly v normovaném spektru nepřesahují $2 \,.\, 10^{-2}$.

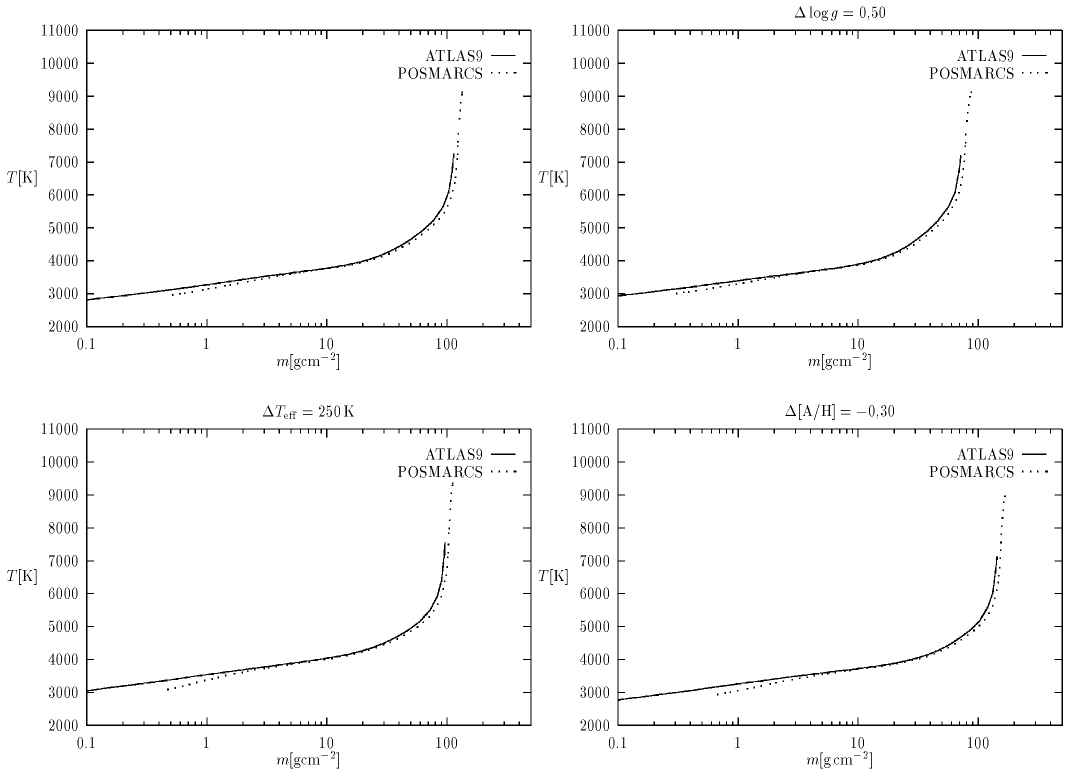
Na obr. 6.5 je uvedeno porovnání sféricky symetrických modelů spočtených pro různé hodnoty hmotnosti hvězdy a odpovídajícího planparalelního modelu pro $T_{\text{eff}} = 4000\,\text{K}$, $\log g = 1{,}50$, $v_{\text{turb}} = 2{,}0\,\text{km}\,\text{s}^{-1}$, $[\text{A/H}] = 0{,}00$. Je zřejmé, že rozdíly mezi jednotlivými sféricky symetrickými modely jsou pro uvedené parametry zanedbatelné. Rozdíl mezi sféricky symetrickými modely a modelem planparalelním je zřejmě také způsoben jiným započtením čárové absorpce.

6.10 Zpřesnění modelů atmosfér

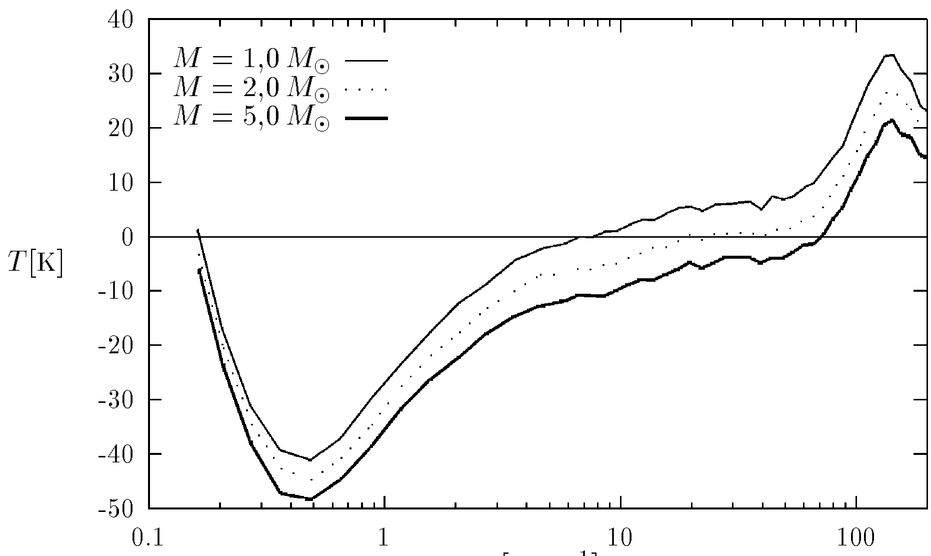
Je zřejmé, že existuje mnoho problematických oblastí, ve kterých by bylo možné uvedené modely zpřesnit. V následujících kapitolách budou některé z nich diskutovány. V obecnosti platí, že hlavním efektem omezujícím možná další zpřesňování modelů atmosfér je počítačový čas.

6.10.1 Atomární data

Pokrok výpočetní techniky umožňuje neustálé zpřesňování atomárních dat. Kurucz [42] poznamenává, že jeho soubory ODF jsou v dnešní době již zastaralé a bylo by vhodné je znovu propočítat. Pravděpodobné nedostatky v molekulárních datech jsou ukázány v kap. 7.5.4.



Obrázek 6.4: Porovnání modelů ATLAS9 a POSMARCS.

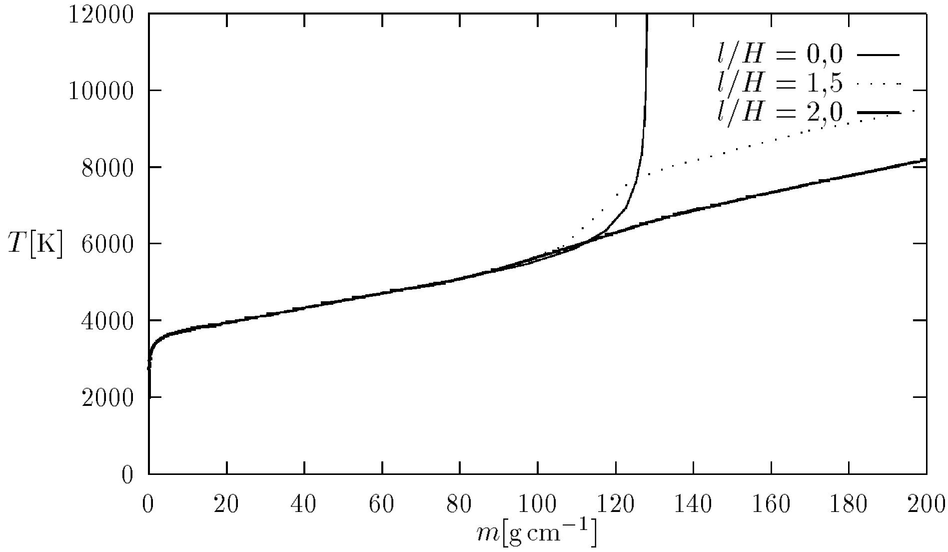


Obrázek 6.5: Porovnání sféricky symetrických modelů

6.10.2 Zpřesnění teorie konvekce

Z výsledků numerické simulace konvekce [1] plyne, že současná teorie nepopisuje dostatečně všechny efekty spojené s tímto jevem. Proto je žádoucí další zpřesňování používaných teorií.

Pro uvažované hvězdy neovlivňuje konvekce podstatně teplotní stratifikaci v atmosféře. Na obr. 6.6 je závislost teploty na hloubce v atmosféře pro různé hodnoty konstanty l/H. Model atmosféry byl spočítán pro $T_{\mathrm{eff}} = 4500\,\mathrm{K}$, $\log g = 2{,}0$, $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}0\,\mathrm{kms}^{-1}$, $[\mathrm{A/H}] = -0{,}1$. Z obrázku je zřejmé, že konvekce ovlivňuje především hlubší vrstvy atmosféry hvězdy. Navíc je patrné, že rozdíly pro dvě často používané hodnoty ($l/H = 1{,}5$, $l/H = 2{,}0$) jsou nepodstatné. Relativní rozdíly ve spočteném syntetickém spektru pro tyto dvě hodnoty jsou řádu 10^{-3} a menší. Je třeba zdůraznit, že tento výsledek se týká pouze aproximativní teorie konvekce, pro přesnější teorie konvekce by se mohl lišit.



Obrázek 6.6: Porovnání modelů atmosfér s různým parametrem l/H.

6.10.3 NLTE efekty v atmosférách chladných hvězd

Byla ukázána existence NLTE efektů v atmosférách chladných hvězd (viz. např. [84]). Tyto efekty se podílí především na formování čar. Ovlivňují tedy získané chemické složení. Modely chladných hvězd, ve kterých NLTE efekty ovlivňují také teplotní stratifikaci, nejsou doposud propočítány. V tomto směru však již bylo některých výsledků dosaženo ([27]).

V současné době je však možné pouze přepočítání obsahu hladin uvažovaných prvků na základě LTE modelu. Pro tento výpočet je možné použít některý z programů, dostupných na počítačové síti (MULTI, DETAIL), nebo program TLUSTY, jak bude ukázáno v kap. 7.7.

6.10.4 Sféricky symetrické modely

K obři mají poměrně rozsáhlé atmosféry, proto uvažování sféricky symetrických modelů by zpřesnilo soulad mezi pozorovaným a syntetickým spektrem. Sféricky symetrické modely [73] však dosud existují pouze pro chladnější hvězdy. Jak je však patrné z obr. 6.5, nemají tyto efekty velký význam pro obry spektrálního typu K. Všechny hvězdy, pro které bude v této práci proveden výpočet parametrů atmosfér, vykazují vyšší hodnotu $\log g$, tedy lze předpokládat, že efekty odklonu od sférické symetrie jsou v případě těchto hvězd ještě menší.

6.10.5 Jednotné chemické složení

Ve většině z dosud publikovaných modelů se předpokládá jednotný relativní obsah pro všechny kovy. Struktura atmosfér K obrů je však ovlivněna čarami prvků u kterých není možné předpokládat jednotné chemické složení (především C, N, O).

Kapitola 7

Určování parametrů hvězdných atmosfér

7.1 Výpočet modelu atmosféry

7.1.1 Model ATLAS9

Pro výpočet modelů ATLAS9 jsem použil verzi programu upravenou pro Sun OS Lemkem, dostupnou na ftp serveru projektu CCP7 `ccp7.arm.ac.uk`.

7.1.2 Model POSMARCS

K dispozici jsem měl síť modelů POSMARCS [72], proto jsem zvolil interpolaci mezi jednotlivými modely. Parametry sítě jsou $T_{\rm eff}$, $\log g$, [A/H] (všechny modely jsou počítány pro konstantní turbulentní rychlost $v_{\rm turb} = 2\,{\rm km\,s^{-1}}$).

Z uvažovaných interpolačních proměnných jsem zvolil sadu, která při testování vykazovala nejlepší soulad mezi přesným modelem a modelem interpolovaným. Jako nejvýhodnější sada proměnných se ukázala $T_{\rm eff}$, $\log g$, [A/H].

Zvolil jsem interpolační vzorec

$$\begin{aligned} f \;=\; & (1-X)(1-Y)(1-Z)\,f_{i,j,k} + (1-X)(1-Y)\,Z\,f_{i,j,k+1} + \\ & (1-X)\,Y\,(1-Z)\,f_{i,j+1,k} + (1-X)\,Y\,Z\,f_{i,j+1,k+1} + \\ & X\,(1-Y)(1-Z)\,f_{i+1,j,k} + X\,(1-Y)\,Z\,f_{i+1,j,k+1} + \\ & X\,Y\,(1-Z)\,f_{i+1,j+1,k} + X\,Y\,Z\,f_{i+1,j+1,k+1}\,, \end{aligned} \tag{7.1}$$

kde f je interpolovaná veličina, $f_{i,j,k}$ hodnota této veličiny v uzlu sítě a veličiny X, Y, Z jsou definovány jako

$$X = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \tag{7.2}$$

$$Y = \frac{y - y_i}{y_{i+1} - y_i}, \tag{7.3}$$

$$Z = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}. \tag{7.4}$$

Přitom x, y, z resp. x_i, y_i, z_i jsou parametry interpolovaného modelu respektive modelu ze sítě (tedy $x = T_{\rm eff}$, $y = \log g$, $z = $ [A/H]).

7.2 Výpočet syntetického spektra

Pro výpočet syntetického spektra jsem použil program SYNSPEC36 [33].

7.2.1 Program SYNSPEC36

Obecná charakteristika

Program čte model atmosféry spočtený na základě programu TLUSTY nebo model z Kuruczovy sítě. SYNSPEC řeší rovnici přenosu záření ve vlnových délkách určených vstupním intervalem. Vlnové délky pro výpočet spektra program určuje automaticky tak, aby dostatečně přesně popsal průběh čarové opacity.

Jednou z metod, kterou program řeší rovnic přenosu záření, je Feutrierova metoda, popsaná v kap. 3.3.3. Obecně je možný výpočet spektra jak za předpokladu LTE, tak za předpokladu NLTE.

Opacita v kontinuu

Program započítává následující zdroje opacity a emisivitu v kontinuu podle vzorců 5.3, 5.4:

- fotoionizace z explicitních hladin,
- volně-volná opacita explicitních iontů,
- rozptyl na volných elektronech,
- opacita H^-,
- opacita H_2^+.

Opacita v čarách

Pro výpočet funkce zdroje v případě LTE program používá vzorec 5.12, v případě odchylek od LTE program čte obsazení jednotlivých hladin (spočtené programem TLUSTY) a pro výpočet funkce zdroje v čáře je možné použít vzorec 5.13.

Hodnoty popisující jednotlivé čáry (vlnové délky, síly oscilátorů, excitační potenciály jednotlivých hladin, konstanty charakterizující rozšíření) jsou čteny ze zvláštního souboru. Data pro tyto soubory přebírám z VALD (Viena Atomic Line Database [71]).

7.2.2 Úpravy programu

Program SYNSPEC36 jsem upravil tak, aby byl vhodnější pro výpočet spekter chladných hvězd.

Rozšíření uvažovaných atomů

Původní program umožňoval zahrnutí prvků pouze se $Z \leq 30$. Proto jsem rozšířil uvažované prvky o atomy se $30 < Z \leq 90$. Většinu z těchto prvků jsem zahrnul ve třech ionizačních stupních. Výjimku tvoří prvky Ba, Pm, Tb a Ho, které jsem pro nedostatek atomárních dat uvažoval jen v prvních dvou ionizačních stupních. Hmotnosti atomů uvažovaných prvků (středované přes izotopy) jsem převzal z [2, 60], ionizační energie z [2, 61]. Pro výpočet rozdělovacích funkcí jsem použil aproximativní formule [35].

Opacita molekulárních čar

Přidal jsem možnost výpočtu spekter dvouatomových molekul MgH (přechod $\mathrm{A}^2\Pi - \mathrm{X}^2\Sigma$, izotopy $\mathrm{Mg}^{24}\mathrm{H}^1$, $\mathrm{Mg}^{25}\mathrm{H}^1$, $\mathrm{Mg}^{26}\mathrm{H}^1$), molekuly CN (přechod $\mathrm{A}^2\Pi - \mathrm{X}^2\Sigma$, izotopy $\mathrm{C}^{12}\mathrm{N}^{14}$, $\mathrm{C}^{13}\mathrm{N}^{14}$, $\mathrm{C}^{12}\mathrm{N}^{15}$), molekuly C_2 (Swanovy pásy $\mathrm{d}^2\Pi_g$ – $\mathrm{a}^3\Pi_u$, izotopy $\mathrm{C}^{12}\mathrm{C}^{12}$, $\mathrm{C}^{12}\mathrm{C}^{13}$, $\mathrm{C}^{13}\mathrm{C}^{13}$).

Hodnota $N^*(e'',v'',J'')$ ve vzorci 5.14 se získá použitím Boltzmannova rozdělení 2.10. Přitom podíl $\frac{N^*_{AB}}{U_{AB}}$ je možné získat přímo ze Sahova rozdělení 2.8.

Konstanty popisující jednotlivé čáry (vlnové délky, síly oscilátorů, ionizační energie a kvantová čísla) jsem převzal z [44], relativní zastoupení izotopů z [60], konstanty B_e, α_e, ω_e, $\omega_e x_e$, T_{el} z [2, 34].

Konstanty popisující jednotlivé izotopy uvažovaných molekul je možné podle [28] získat následujícím způsobem. Zavede-li se konstanta ρ jako

$$\rho = \sqrt{\frac{\mu}{\mu^i}}, \tag{7.5}$$

kde μ je redukovaná hmotnost molekuly, index i označuje izotop dané molekuly, pak pro konstanty, popisující energie jednotlivých stavů molekuly lze napsat následující vztahy:

$$\omega_e^i = \rho\omega_e, \tag{7.6}$$

$$\omega_e x_e^i = \rho^2\omega_e x_e, \tag{7.7}$$

$$B_e^i = \rho^2 B_e, \tag{7.8}$$

$$\alpha_e^i = \rho^3\alpha_e, \tag{7.9}$$

$$D_e^i = \rho^4 D_e. \tag{7.10}$$

Rozšíření možností vstupu

Možnosti vstupních modelů programu SYNSPEC36 jsem rozšířil o modely POSMARCS [72]. Na základě procedury pro čtení Kuruczových modelů INKUR jsem napsal proceduru INPLEZ, určenou pro čtení Plezových modelů.

Teplota, hustota a elektronová koncentrace jsou v jednotlivých modelech tabelovány pro škálu rosselandovských optických hloubek, pro převod na škálu vyjádřenou v proměnné m jsem použil následující postup. Pro rosselandovskou optickou hloubku platí podobný vztah jako 3.11

$$d\tau_{\mathrm{ross}} = -\rho\chi_{\mathrm{ross}}dz, \tag{7.11}$$

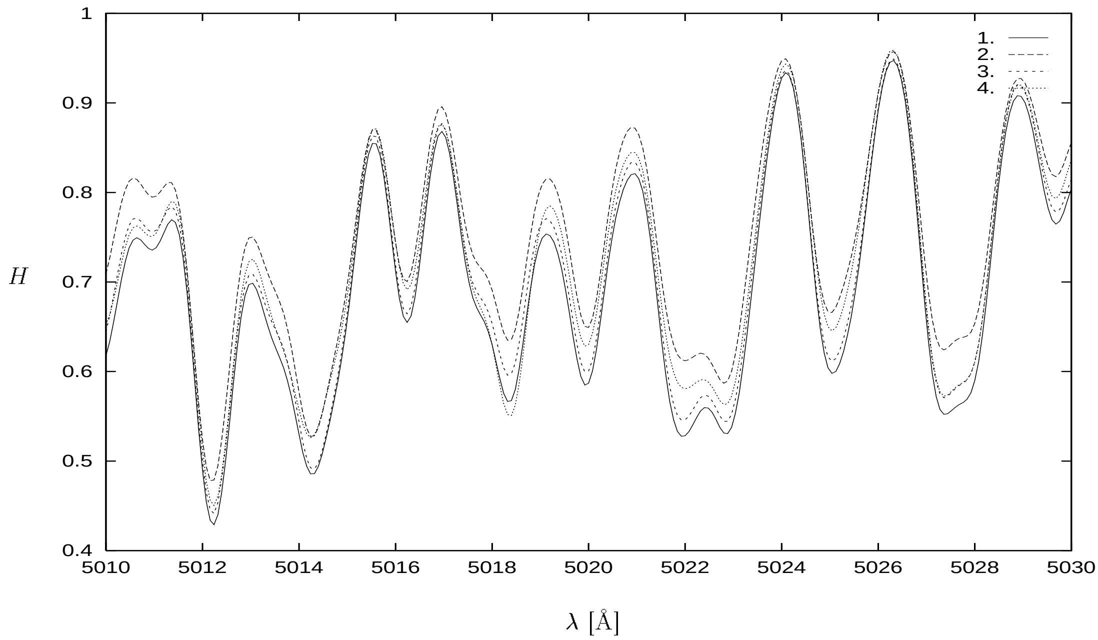
kde χ_{ross} je rosselandovský absorpční koeficient počítaný na jednotku hmotnosti dané látky. S využitím rovnice 4.4 je možné napsat

$$dm = \frac{d\tau_{\mathrm{ross}}}{\chi_{\mathrm{ross}}}. \tag{7.12}$$

Předchozí rovnici jsem použil pro výpočet jednotlivých m_d, $d = 1,\ldots,D$ takto:

$$m_d = m_{d-1} + 2 \times \frac{\tau_{\mathrm{ross},d} - \tau_{\mathrm{ross},d-1}}{\chi_{\mathrm{ross},d} + \chi_{\mathrm{ross},d-1}}, \quad 1 = 2,\ldots,D, \tag{7.13}$$

přičemž jsem položil $\tau_{\mathrm{ross},0} = 0$, $\chi_{\mathrm{ross},0} = 0$.



Obrázek 7.1: Změny výsledného spektra při změně parametrů hvězdné atmosféry.

7.3 Přímá minimalizace

Tradiční metodika analýz hvězdných spekter je založená na měření ekvivalentních šířek jednotlivých, pokud možno neblendovaných, čar. Naopak, metodu porovnání hvězdných spekter se syntetickým je možné použít pro analýzu celých úseků hvězdných spekter, ve kterých se mohou vyskytovat blendované čáry [52].

Spektrum hvězdy závisí na parametrech hvězdné atmosféry, což umožňuje získat tyto parametry porovnáním se spektrem syntetickým. Na obr. 7.1 jsou ukázány změny spektra při změně vstupních parametrů. Jednotlivá spektra mají následující význam: 1. spektrum hvězdy s $T_{\mathrm{eff}} = 4500\,\mathrm{K}$, $\log g = 2{,}0$, $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}0\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, $[\mathrm{A/H}] = 0{,}0$, 2. spektrum hvězdy s obsahem kovů nižším o 0,3 dex, 3. spektrum hvězdy s gravitačním zrychlením vyšším o 0,5 dex, 4. spektrum hvězdy s teplotou vyšší o 250 K.

Z obrázku vyplývá, že změna [A/H] vyvolává odpovídající změny ve všech čarách. Je důležité poznamenat, že změna $\log g$ způsobuje změny, které jsou odlišné v jednotlivých čarách. Podobné je tomu také při změně teploty. V tomto případě je podstatné, že změna teploty vyvolá změny v hloubce čar oběma směry.

Přitom je podstatné, že tato spektra vznikla konvolucí s instrumentálním profilem velikosti 1,8 Å. Z toho plyne, že spektra získaná přístrojem s relativně vysokou pološířkou instrumentálního profilu je možné použít pro určování parametrů atmosfér hvězd.

Metoda, kterou jsem použil v článku [39], obsahovala několik chyb. Spektrum bylo minimalizováno v příliš úzkém intervalu vlnových délek. Z obrázku 7.1 je patrné, že tentýž profil jednotlivé čáry je možné získat pro různé parametry atmosféry. Navíc jedním z minimalizovaných parametrů byla pološířka instrumentálního profilu spektrografu, což zřejmě znehodnotilo získané výsledky.

Z daných parametrů hvězdné atmosféry se spočte model atmosféry a na jeho základě syntetické spektrum. Dále se propočítá konvoluce syntetického spektra a rotačního a instrumentálního profilu. Výsledek je splinem interpolován do stejných vlnových délek, jako naměřené spektrum. V těchto bodech se spočítají kvadráty rozdílů mezi naměřeným a spočteným spektrem. Výsledné kvadráty jsou sečteny a použity jako minimalizační kritérium.

Pro minimalizaci jsem zvolil simplexovou metodu. Při použití metody variabilní metriky vznikaly numerické problémy při výpočtu gradientu.

Pro numerické výpočty jsem použil programy dostupné na počítači `netlib.no`. Pro minimalizaci program `subplx` napsaný Rowenem, pro splinovou interpolaci programy `cubspl`, `ppvalu` převzaté z knihy A Practical Guide to Splines de Boora.

Jako problém přímé minimalizace i minimalizace pomocí FFT se ukázala existence více lokálních minim minimalizované proměnné σ^2. Tento problém jsem řešil tak, že jsem minimalizoval s několika počátečními odhady proměnných. První počáteční odhad proměnných jsem volil podle dostupných údajů v literatuře, ostatní podle výsledku minimalizace v předchozích intervalech vlnových délek.

7.4 Optimalizace užitím FFT

Minimalizace s použitím Fourierovy transformace má několik výhod. Především mezi parametry pro minimalizaci není nutné uvažovat rotační rychlost a rychlost makroturbulence. Navíc nepředpokládá přesnou znalost instrumentálního profilu.

7.4.1 Diskuse metody

Označím-li si jako $\mathcal{D}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{I}$ Fourierovy transformace D, F, I lze rovnici 5.15 přepsat jako

$$\mathcal{D}(l) = \mathcal{I}(l)\mathcal{F}(l). \tag{7.14}$$

To dovoluje vypočítat instrumentální profil jako

$$I = F\left(\mathcal{D}(l)/\mathcal{F}(l)\right), \tag{7.15}$$

kde F je Fourierova transformace. Pokud se nebude uvažovat šum, pak je výsledkem funkce nenulová jen v omezeném intervalu. Tohoto výsledku je možné použít pro minimalizaci.

Pro aplikaci navržené metody jsem zvolil následující postup. Spočtené syntetické spektrum je pomocí splinu interpolováno do stejných vlnových délek jako spektrum naměřené. Poté je spočtena FFT obou spekter. S použitím rovnice 7.15 se spočte konvoluce instrumentálního profilu, rotačního profilu a profilu odpovídajícího makroturbulentnímu rozšíření.

Parametry hvězdné atmosféry je možné získat minimalizací součtu

$$\sigma^2 = \sum_{i=j}^{n-j} I(\lambda_i)^2, \tag{7.16}$$

kde n značí celkový počet bodů naměřeného spektra, j poloviční počet bodů, na kterých je možné předpokládat, že výsledný rozšiřující profil je nenulový. Je nutné podotknout, že tato metoda předpokládá ekvidistantní rozdělení bodů naměřeného spektra.

Přitom mohou vznikat jisté nesrovnalosti. Rovnice 5.15 popisuje rozšíření vlivem instrumentálního profilu se zanedbáním šumu. Pokud by existovala periodicita šumu, znamenalo by to možné ovlivnění získaných výsledků. Navíc FFT šum zesiluje. Proto pro zpracování jsou nejvýhodnější data s vysokou úrovní signál/šum.

Pro vlastní minimalizaci pomocí simplexu používám program `subplx` Rowena, pro interpolaci pomoci splinu programy `cubsplx`, `ppvalu` de Boora, pro výpočet FFT balíček programů Swarytraubera, modifikovaný Bjorstadem. Zmiňované programy jsou dostupné pomocí FTP serveru `netlib.no`.

7.5 Určení parametrů atmosfér vybraných K obrů

7.5.1 Spektrogramy

Pro určení parametrů čtyř hvězd jsem použil spektrogramy z následujících zdrojů.

Pro každou hvězdu jsem použil spektra získaná přístrojem RETICON na 2 m dalekohledu AsÚ ČSAV Ondřejov, popsaná Hornem a kol. ([29]). Spektrogramy s disperzí 17.1 Å/mm zachycují oblast vlnových délek 6300–6700 Å. Spektrogramy byly zpracovány pomocí programu Horna SPEFO.

Pro α Cas byla použita spektra popsaná a zpracovaná Šteflem ([76, 77]). Spektra byla získána 2 m dalekohledem AsÚ ČSAV v Ondřejově. Střední disperze spektrogramů je 8.3 Å/mm. Spektrum bylo rozděleno do několika intervalů vlnových délek, jak je patrné z tabulky 7.6.

Pro α Boo byla použita spektra z atlasu Arktura (Wallace, Hinkle [90]). Spektra pokrývají oblast vlnových délek mezi 8690 – 9260 Å.

Pro α Ari byla použita spektra z katalogu vysoce disperzních a středně disperzních spekter (Montes a kol. [58]). Spektra zachycují interval vlnových délek mezi 5765 – 6010 Å.

Pro β Gem byla použita experimentální spektra získaná pomocí 0,6 m dalekohledu PřF MU na Kraví hoře pomocí spektrografu firmy Jobin–Yvon při použití mřížky s 1200 vrypy/mm. Disperze těchto spekter je 12 Å/mm, byla zvolena oblast vlnových délek mezi 5000–5350 Å.

7.5.2 Výsledky a diskuse

Výsledné parametry atmosfér čtyř hvězd jsou uvedeny v tabulce 7.1. S výjimkou α Ari se jedná o vážené aritmetické průměry hodnot získaných v jednotlivých intervalech vlnových délek. Váhy jsem volil úměrné podle počtu čar s relativním profilem menším než 0,9.

Tabulka 7.1: Získané parametry atmosfér.

hvězda	$T_{\rm eff}$[K]	$\log g$	$v_{\rm turb}$[km s^{-1}]	[A/H]
α Ari	4590 ± 90	$2{,}4 \pm 0{,}10$	$2{,}4 \pm 0{,}2$	$-0{,}15 \pm 0{,}15$
α Boo	4390 ± 70	$2{,}0 \pm 0{,}2$	$1{,}6 \pm 0{,}2$	$-0{,}27 \pm 0{,}04$
α Cas	4520 ± 40	$1{,}83 \pm 0{,}03$	$2{,}25 \pm 0{,}15$	$-0{,}04 \pm 0{,}01$
β Gem	4970 ± 70	$2{,}87 \pm 0{,}04$	$1{,}9 \pm 0{,}1$	$-0{,}04 \pm 0{,}01$

Literatura, dostupná pro zkoumané hvězdy, užívá tradičních způsobů určení parametrů atmosfér. Efektivní teplota je získávána především pomocí barevných indexů [9, 20, 50, 53, 62, 77, 82, 84]. Výjimečně se používá výpočet efektivní teploty pomocí excitační teploty Fe I [22, 47] (přičemž pro kalibraci jsou použity modely atmosfér), případně měření průměru hvězd [16]. Gravitační zrychlení se získává pomocí ionizační rovnováhy mezi Fe I a Fe II [47, 50, 62, 84], případně mezi Ti I a Ti II [22]. Používaná je též relace mezi efektivní teplotou, svítivostí, hmotností a gravitačním zrychlením [9, 50, 53, 82]. Běžný způsob určení obsahu daného prvku spočívá na srovnání empirické křivky růstu s křivkou růstu získanou na základě modelu atmosféry [15, 22, 47, 62, 84], nebo Wrubelovou křivkou růstu [77]. Někteří autoři používají výpočet ekvivalentní šířky spočtený na základě syntetického spektra [9, 20, 50, 53]. V jednotlivých článcích jsou nejčastěji používány Gustafssonovy modely [7, 9, 15, 20, 22, 47, 49, 50, 53, 82, 84], případně modely ATLAS [62] a škálované sluneční a semiempirické modely [15].

Je třeba zdůraznit, že získané hodnoty [A/H] představují hodnotu středovanou přes všechny atomy, tedy neodpovídají plně hodnotám [Fe/H] uváděným v literatuře. Hodnoty $T_{\rm eff}$, $\log g$ jsou však plně srovnatelné. Hodnota efektivní teploty (s výjimkou α Cas) se blíží hodnotám uváděným Grattonem a kol. [22]. Naopak, hodnota gravitačního zrychlení je v dobrém souladu s prací McWilliama [53], Lamberta a Riese [47]. Získaná hodnota [A/H] nevykazuje systematickou shodu s žádnou z citovaných prací.

Porovnání výsledků určení efektivní teploty a gravitačního zrychlení pomocí jednotlivých metod ukazuje, že mezi nimi nejsou systematické rozdíly.

Hodnotu turbulentní rychlosti, uváděnou pro jednotlivé hvězdy v literatuře, jsem v příslušných tabulkách neuváděl, protože hodnoty se často dosti odlišují.

Výsledná spektra hvězd na obr. 7.2–7.11 byla získána v případě přímé minimalizace konvolucí spočteného toku záření s optimálními parametry a Gaussovského instrumentálního profilu. V případě minimalizace pomocí FFT byla spektra získána užitím rovnice 5.15.

Z obrázků je zřejmé, že existuje jistý nesoulad mezi optimálním syntetickým a pozorovaným spektrem. Vysvětlení tohoto nesouladu je možné hledat v následujících oblastech:

- obsah jednotlivých prvků není možné parametrizovat jedinou hodnotou [A/H],
- při formování čar se mohou projevit efekty odklonu od LTE,
- konečně, dalším možným důvodem nesouladu mohou být chyby jednotlivých atomárních údajů, především sil oscilátorů.

Ukázalo se, že získání parametrů atmosféry porovnáním se syntetickým spektrem je poměrně náročné na počítačový čas. Typická minimalizace čtyř parametrů při výpočtu modelů interpolací zabere na počítači IRIX přibližně 4000 s strojového času (za předpokladu, že syntetické spektrum je počítáno řádově na 10^4 frekvencích), při výpočtu modelu pomocí programu ATLAS9 zabere na počítači Sun OS přibližně 80000 s strojového času. Minimalizace pěti parametrů při výpočtu modelů interpolací zabere na počítači IRIX 10000 s strojového času. Pokud se v dané oblasti vyskytují molekulární čáry, pohybují se typické strojové časy potřebné pro výpočet na počítači Sun OS kolem 300000 s.

7.5.3 α Ari

Výsledky minimalizace jednotlivých spekter metodou popsanou v kap. 7.4 jsou uvedeny v tabulce 7.2. Hodnoty uvedené v tab. 7.1 jsou vážené průměry. Proto, aby výsledky v jednom z intervalů nebyly započítány dvakrát (interval 6300–6700 Å), použil jsem pro ně váhu 1, pro výsledek v druhém intervalu (interval 5765–6010 Å) jsem použil váhu 2.

Tabulka 7.2: Parametry atmosféry α Ari získané v jednotlivých intervalech.

interval	T_{eff} [K]	$\log g$	v_{turb}[km s^{-1}]	[A/H]	model
6300–6700 Å	4700	2,52	2,57	−0,003	ATLAS9
6300–6700 Å	4670	2,49	2,57	−0,024	POSMARCS
5765–6010 Å	4500	2,33	2,30	−0,278	POSMARCS

Tabulka 7.3: Parametry α Ari dostupné v literatuře.

T_{eff} [K]	$\log g$	[Fe/H]	literatura
4500	2,4	−0,21	Oinas [62]
4421	2,5	−0,08	Branch a kol. [7]
4710	2,51	−0,25	Lambert, Ries [47]
4582	1,38	−0,29	Gratton a kol. [22]
4480	2,57	−0,25	McWilliam [53]
4425	1,65	−0,21	Luck, Challener [50]

Porovnání pozorovaného spektra a optimálního syntetického je na obr. 7.2. Srovnání výsledků získaných programem ATLAS9 a POSMARCS ukazuje, že rozdíly mezi těmito modely jsou zanedbatelné.

Srovnání konečných výsledků a výsledků dostupných v literatuře (viz. tab. 7.3) ukazuje, že získaná efektivní teplota, gravitační zrychlení a chemické složení dobře odpovídají mediánům hodnot, uváděných v literatuře. Poněkud problematická je pouze hodnota [A/H], která vykazuje vyšší chybu, než hodnoty [A/H] u zbylých hvězd. Tento rozdíl je zřejmě způsoben již zmiňovaným jevem, kdy spektra hvězd mají pro různé sady parametrů atmosfér obdobný tvar. Pro přesnější analýzu parametrů této hvězdy by bylo vhodné získat spektra, pokrývající další úseky vlnových délek.

7.5.4 α Boo

Výsledné parametry, získané v jednotlivých intervalech jsou uvedeny v tabulce 7.4. Spektra Wallace, Hinkle ([90]) byla zpracována pomocí přímé metody, popsané v kap. 7.3, spektra z Horn a kol. byla zpracována s použitím metody popsané v kap. 7.4. Výsledné parametry s výjimkou rotační rychlosti jsou uvedeny v tab. 7.1. Získaná rotační rychlost je $(6{,}4 \pm 0{,}7)$ km s^{-1}. Porovnání pozorovaného spektra a optimálního syntetického je na obr. 7.3–7.6. Spektra na obr. 7.3–7.5 byla získána konvolucí s Gaussovským instrumentálním profilem o pološířce 0,064 cm^{-1}.

Ze zpracování jsem za předpokladu normálního rozdělení na hladině významnosti 1% vyloučil hodnotu $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}89$ km s^{-1}. Dále jsem pomocí Kolmogorovova testu dobré shody testoval, zda je možné přijmout hypotézu o Gaussovském rozdělení hodnot, získaných v jednotlivých intervalech. Na 5% hladině významnosti jsem hypotézu přijal. Z důvodu malého souboru dat jsem tyto testy pro ostatní hvězdy neprováděl.

Pro α Boo jsem navíc určoval detailní složení jednotlivých prvků. Jak se ukázalo, použi-

Tabulka 7.4: Parametry atmosféry α Boo získané v jednotlivých intervalech.

interval	$T_{\rm eff}$ [K]	$\log g$	$v_{\rm turb}$ [km s^{-1}]	[A/H]	$v \sin i$ [km s^{-1}]	model
9170–9260Å	4600	2,30	1,48	−0,291	0,5	POSMARCS
9090–9180Å	4470	2,35	1,51	−0,155	6,6	POSMARCS
9000–9100Å	4420	1,71	1,66	−0,234	8,1	POSMARCS
8920–9010Å	4330	1,53	1,25	−0,367	6,5	POSMARCS
8850–8930Å	4410	1,53	1,70	−0,461	5,9	POSMARCS
8770–8850Å	4400	2,50	2,03	−0,256	5,3	POSMARCS
8690–8780Å	4350	1,64	1,66	−0,232	5,9	POSMARCS
7300–7700Å	4200	1,96	2,89	−0,246	-	ATLAS9

telné výsledky bylo možné získat pouze pro Fe. Pro ostatní uvažované prvky zřejmě chyby atomárních dat (především sil oscilátorů) zapříčinily velký rozptyl hodnot a znehodnotily výsledky. Získaná hodnota [Fe/H] získaná celkem z pěti spekter v intervalu 8690–9100 Å je [Fe/H] $= -0{,}37 \pm 0{,}09$.

Ve spektrum na obr. 7.6 převažují molekulární čáry CN. Ze spektra je zřejmé, že některé čáry chybí v syntetickém spektru. Jedná se zřejmě o chyby v příslušných molekulárních datech. Bylo by výhodné uvedené soubory přepočítat s použitím nejnovějších atomárních dat.

Parametry α Boo, dostupné v literatuře, jsou dány v tab. 7.5. Získané hodnota efektivní teploty a gravitačního zrychlení jsou plně v souladu s výsledky, dostupnými v literatuře. Zajímavý je nesoulad s efektivní teplotou získanou měřením průměru hvězdy (4628 K, [16]). Hodnota [A/H] je vyšší než hodnota uváděná v literatuře. Jak již bylo zmíněno, tento rozdíl je zřejmě způsoben tím, že [A/H] reprezentuje středovanou hodnotu. Výsledná hodnota [Fe/H] je v lepším souladu s publikovanými výsledky.

Tabulka 7.5: Parametry α Boo získané v literatuře.

$T_{\rm eff}[K]$	$\log g$	[Fe/H]	literatura
4235	1,7	−0,49	Branch a kol. [7]
4500	2,01	−0,56	Lambert, Ries [47]
4421	0,98	−0,48	Gratton a kol. [22]
4345	1,6	−0,81	Bell a kol. [5]
4345	1,50	−0,38	Gratton, Ortolani [23]
4383	1,7	−0,55	Kyrolainen a kol. [46]
4235	1,7	−0,60	Leep a kol. [49]
4383	1,97	−0,42	Edvardsson a kol. [18]
4300	2,00	−0,69	Fernandez-Villacanas a kol. [20]
4280	2,19	−0,60	McWilliam [53]
4330	2,10	−0,58	Brown, Wallerstein a kol. [9]
4280	1,30	−0,54	McWilliam, Rich [54]
4300	1,50	−0,47	Sneden a kol. [82]

7.5.5 α Cas

Výsledky minimalizace jednotlivých spekter metodou popsanou v kap. 7.4 jsou uvedeny v tabulce 7.6. Parametry atmosféry, nalezené v literatuře jsou shromážděny v tabulce 7.7. Porovnání pozorovaného spektra a syntetického je na obr. 7.7, 7.8 a 7.9.

Pro tuto hvězdu jsem určoval citlivost určení [A/H] na změnu parametrů atmosféry. Výsledky jsou shrnuty v tab. 7.8.

Tabulka 7.6: Parametry atmosféry α Cas, získané v jednotlivých intervalech. Spektra v prvním řádku jsou spektra převzatá z Horn a kol. ([29]), ostatní ze Štefl ([76, 77]).

interval	$T_{\text{eff}}[K]$	$\log g$	$v_{\text{turb}}[\text{km s}^{-1}]$	[A/H]	model
6300–6700Å	4500	1,81	2,36	−0,026	ATLAS9
6040–6200Å	4650	1,85	1,92	−0,035	POSMARCS
6200–6400Å	4480	1,82	2,34	−0,038	POSMARCS
5800–6000Å	4530	1,88	2,29	−0,039	POSMARCS
5740–5800Å	4490	1,85	2,16	−0,063	POSMARCS

Tabulka 7.7: Parametery α Cas získané v literatuře.

$T_{\text{eff}}[K]$	$\log g$	[Fe/H]	literatura
4755	2,01	−0,18	Lambert, Ries [47]
4710	1,12	−0,03	Gratton a kol. [22]
4610	2,71	−0,09	McWilliam [53]
4520	—	−0,22	Štefl [77]

Tabulka 7.8: Citlivost změny [A/H] na změnu parametrů pro α Cas.

změna parametru	Δ[A/H]
$\Delta T_{\text{eff}} = 100\,\text{K}$	0,03
$\Delta \log g = 0{,}1\text{dex}$	0,09
$\Delta v_{\text{turb}} = 0{,}1\text{km s}^{-1}$	0,13

Spočtená efektivní teplota je poněkud nižší než její hodnota uváděná v dostupné literatuře. Diskuse této odchylky bude provedena v kap. 7.6.1. Ukazuje se, že tato hodnota lépe reprodukuje pozorované spektrum.

7.5.6 β Gem

Výsledky minimalizace jednotlivých spekter metodou popsanou v kap. 7.4 jsou uvedeny v tabulce 7.9. Výsledky plně odpovídají hodnotám nalezeným v literatuře (viz. tab. 7.10). Porovnání pozorovaného spektra a syntetického je na obr. 7.10 a 7.11.

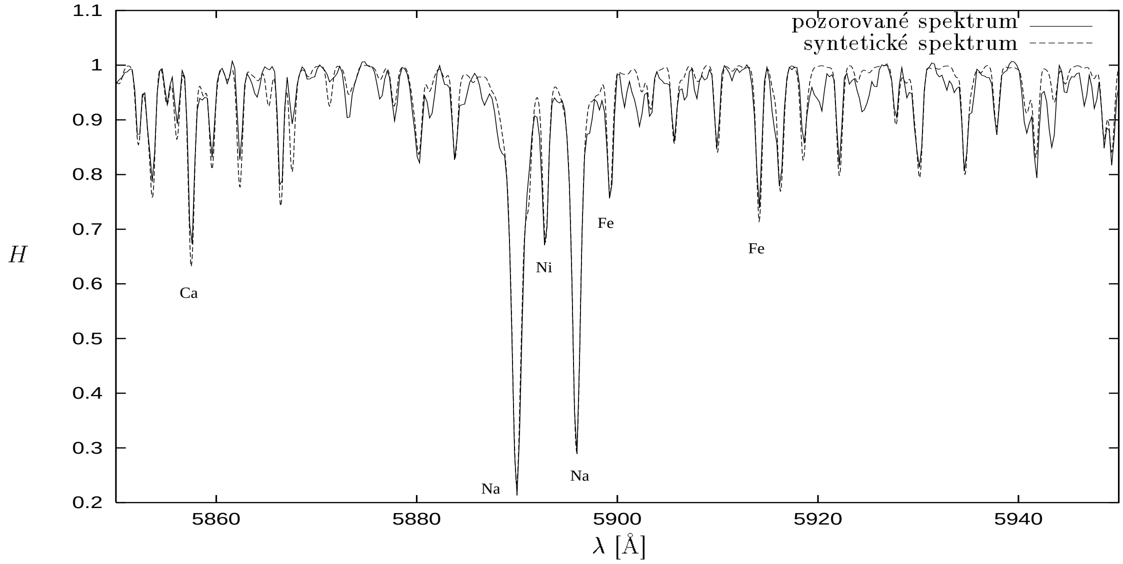
Chyba chemického složení byla podhodnocena, proto jsem ji odhadl s ohledem na její určení u zbylých hvězd. Podhodnocení je zřejmě způsobeno náhodnými jevy. Tento efekt je ilustrován v tab. 7.5, kdy jsou výsledné hodnoty [A/H] ve dvou intervalech (9000–9100 Å, 8690–8780 Å) velmi blízké.

Tabulka 7.9: Parametry atmosféry β Gem, získané v jednotlivých intervalech.

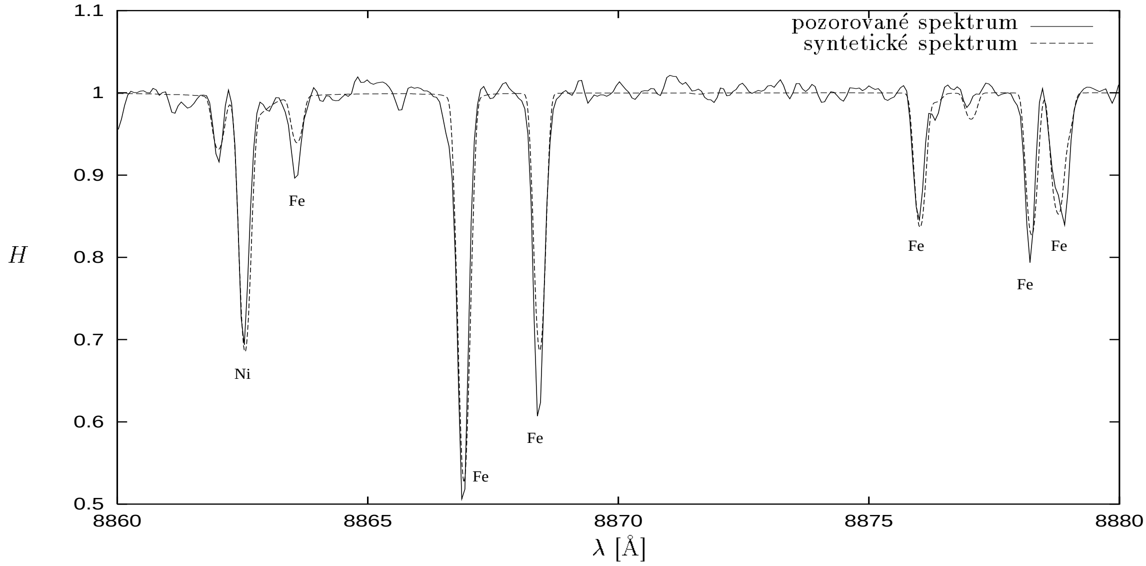
interval	$T_{\rm eff}[K]$	$\log g$	$v_{\rm turb}[\rm km\,s^{-1}]$	[A/H]	model
6300–6700Å	5000	2,88	1,98	−0,040	ATLAS9
5000–5350Å	4940	2,85	1,86	−0,036	ATLAS9

Tabulka 7.10: Parametry β Gem získané v literatuře.

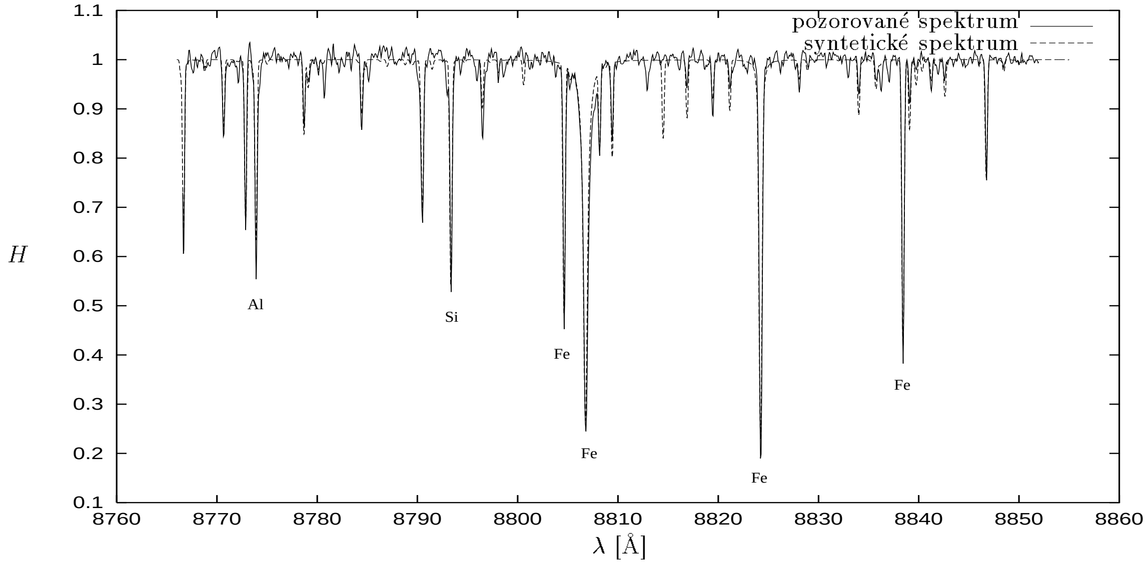
$T_{\rm eff}[K]$	$\log g$	[Fe/H]	literatura
4846	2,24	−0,10	Ruland a kol. [80]
5040	3,12	0,02	Lambert, Ries [47]
4941	2,48	0,16	Gratton a kol. [22]
4800	2,6	−0,11	Tomkin, Lambert [84]
4850	2,96	−0,07	McWilliam [53]
4865	2,75	−0,04	Drake, Smith [15]



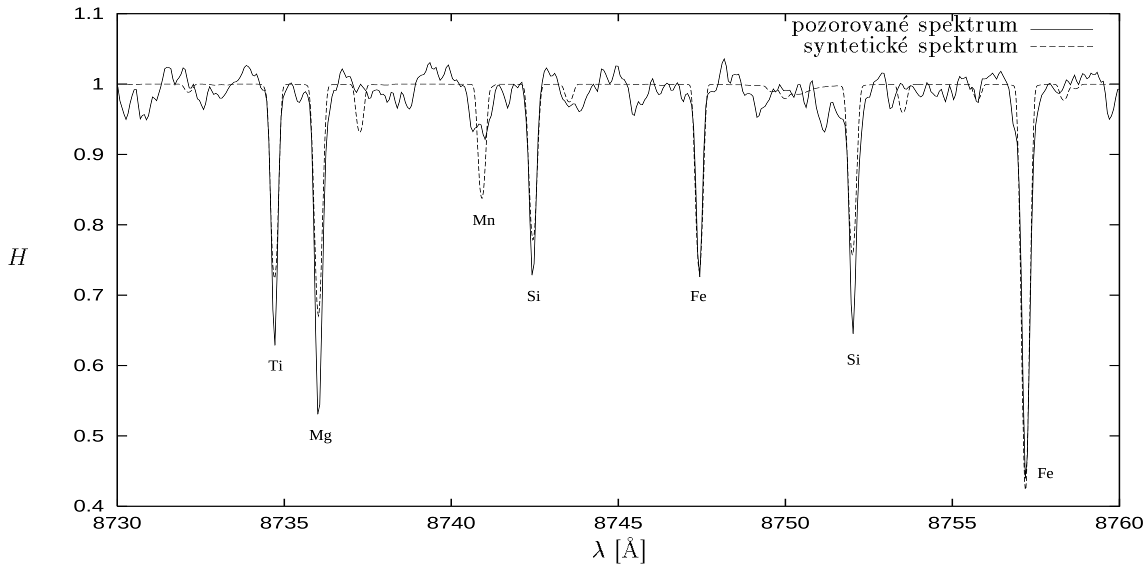
Obrázek 7.2: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Ari. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



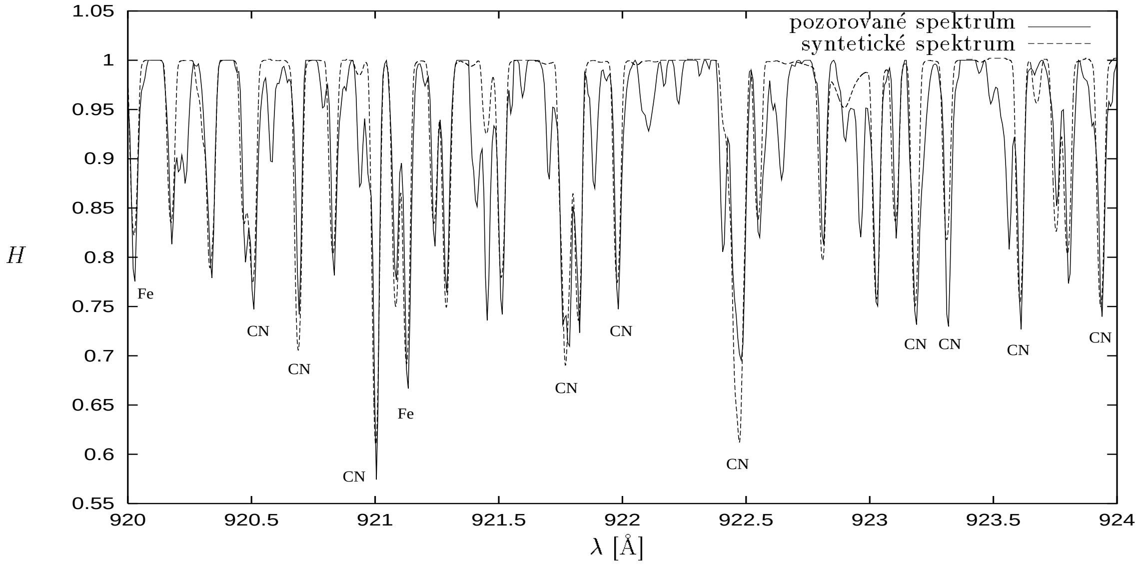
Obrázek 7.3: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Boo. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



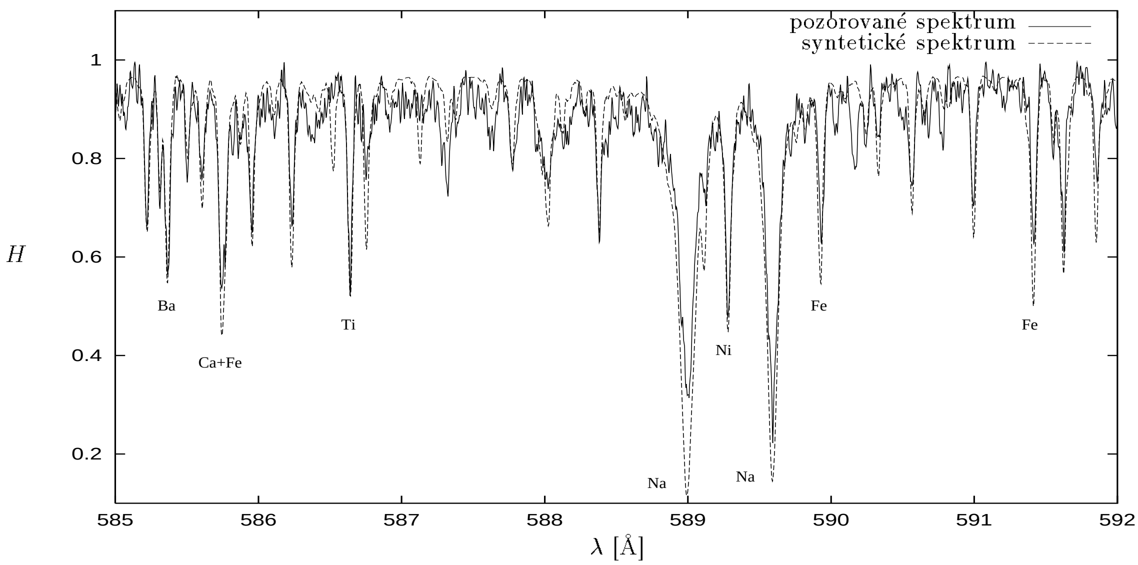
Obrázek 7.4: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Boo. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



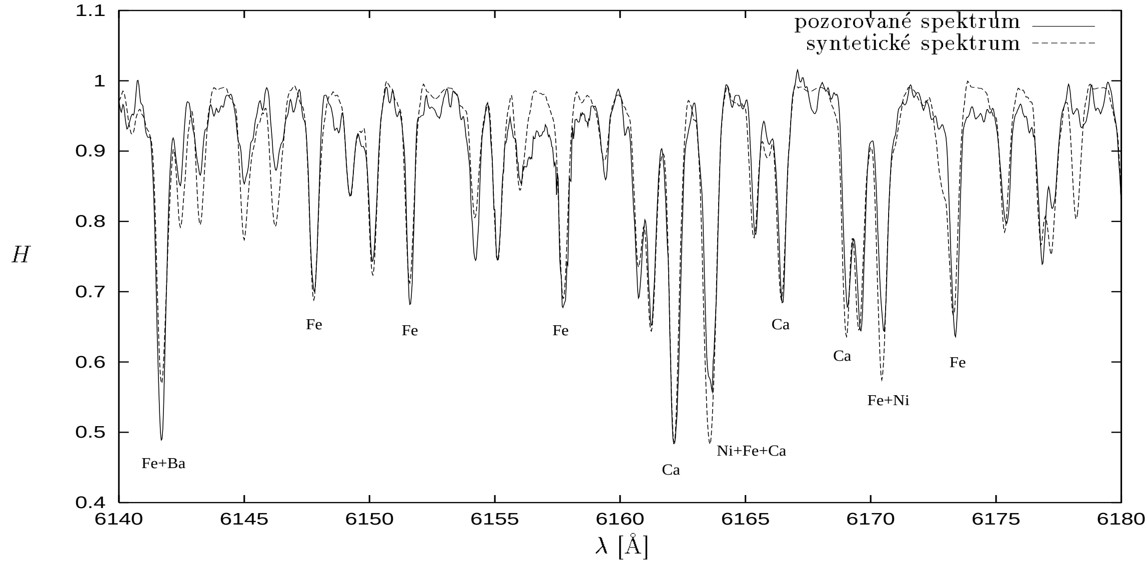
Obrázek 7.5: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Boo. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



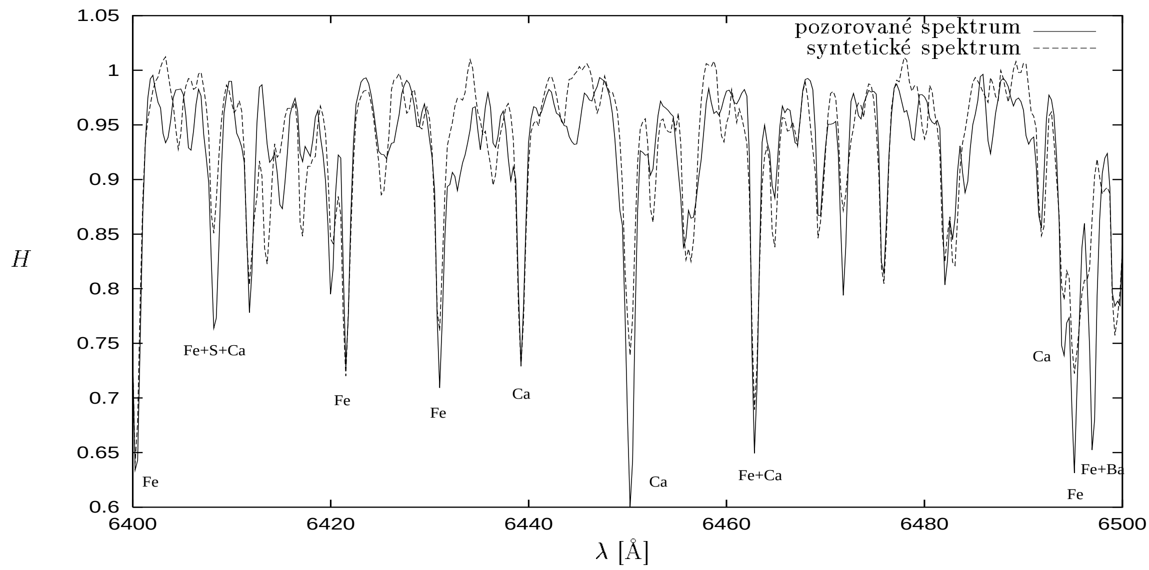
Obrázek 7.6: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Boo. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



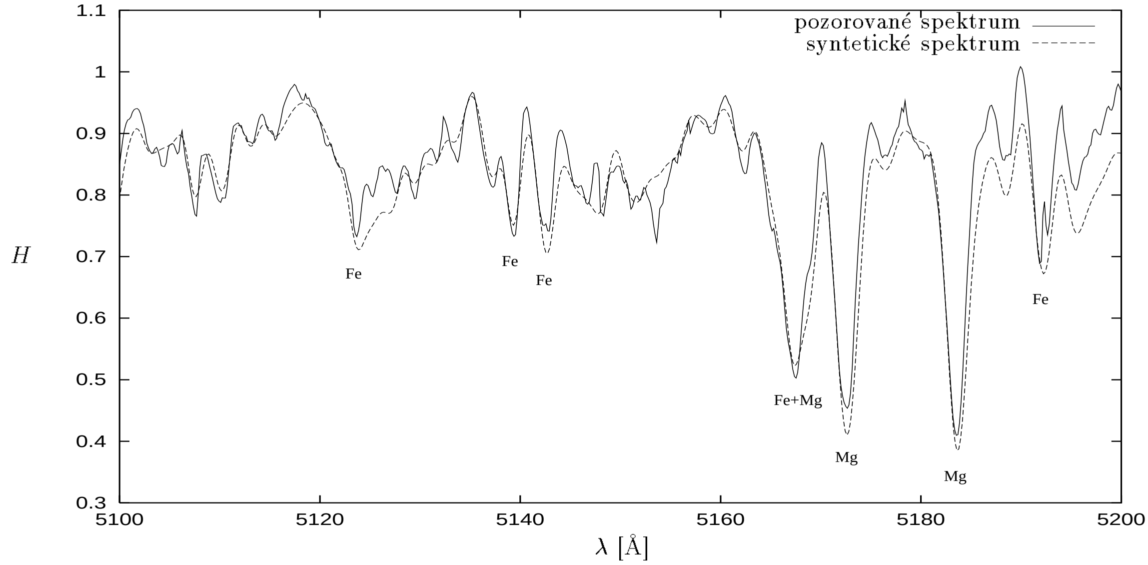
Obrázek 7.7: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Cas. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



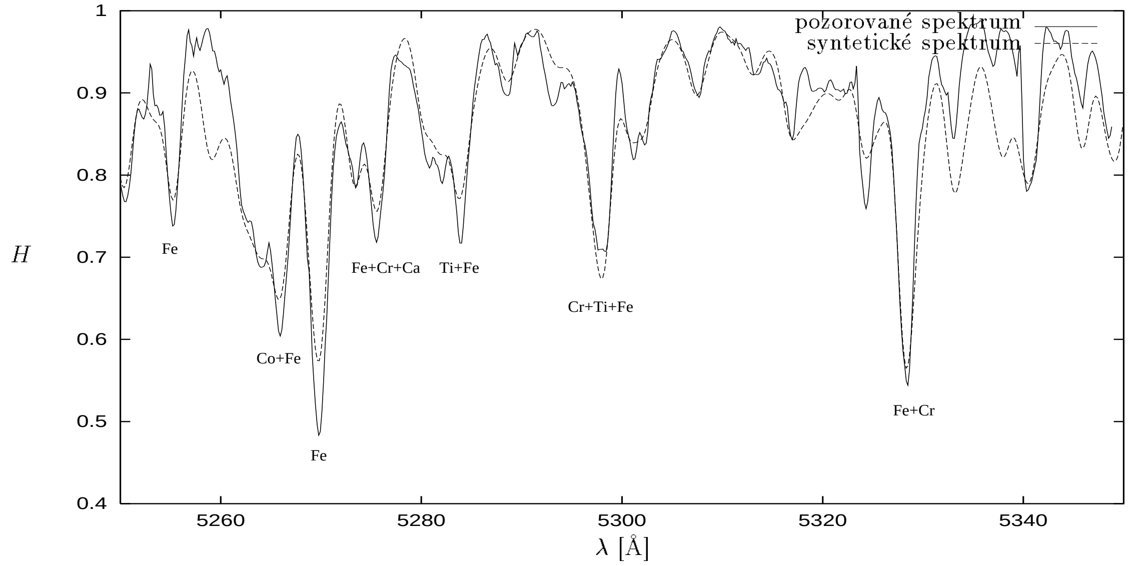
Obrázek 7.8: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Cas. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



Obrázek 7.9: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro α Cas. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



Obrázek 7.10: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro β Gem. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.



Obrázek 7.11: Porovnání výsledného spektra po minimalizaci a pozorovaného spektra pro β Gem. Plná čára značí pozorované spektrum, přerušovaná syntetické.

7.6 Určení obsahu železa a titanu α Cas pomocí programu WIDTH6

Program WIDTH6 Kurucze počítá metodou křivek růstu obsahu daného prvku při zadaném modelu atmosféry. Jako vstup se používají ekvivalentní šířky čar a fyzikální konstanty, popisující přechod odpovídající dané čáře.

Program byl publikován pomocí CD-ROM disku [43]. Používal jsem verzi pro Sun OS upravenou Lemkem, dostupnou na ftp serveru projektu CCP7 `ccp7.arm.ac.uk`. Typické strojové časy, potřebné pro výpočet chemického složení pomocí programu WIDTH9, dosahují 20–40 s.

7.6.1 Určení složení Fe

Uvedený program jsem použil pro stanovení obsahu železa u hvězdy α Cas. Ekvivalentní šířky čar Fe I jsem převzal z [77].

Pro určení obsahu Fe jsem použil celkem 27 čar Fe I. Pro $T_{\rm eff} = 4500\,$K, $\log g = 2{,}0$ při $v_{\rm turb} = 2{,}5$km s^{-1} jsem získal hodnotu [Fe/H] $= -0{,}21 \pm 0{,}16$ souladu s prací [77]. Pro výsledky, získané v kap. 7.5.5 (které se liší především nižší hodnotou [Fe/H]) jsem obdržel hodnotu [Fe/H] $= -0{,}09 \pm 0{,}16$, která je v dobrém souladu se získanou hodnotou [A/H]. Protože se jedná o nezávislé potvrzení získaných údajů, je možné usuzovat, že hodnoty obdržené pomocí srovnání syntetického spektra se spektrem naměřeným dobře odpovídají skutečnosti.

Použité čáry Fe I byly rozděleny do tří skupin podle hodnoty ekvivalentní šířky:

1. Celkem 3 čáry s $W_\lambda \leq 150$ mÅ.
2. Celkem 12 čar s 150 mÅ $< W_\lambda \leq 200$ mÅ.
3. Celkem 12 čar s $W_\lambda > 200$ mÅ.

Výsledky pro jednotlivé skupiny jsou shrnuty v tabulce 7.11. Důvodem pro snížení hodnoty složení Fe mohou být NLTE efekty.

Tabulka 7.11: Obsah Fe pro různé skupiny čar.

skupina	[Fe/H] parametry podle [77]	[Fe/H] parametry tato práce
1	$0{,}7 \pm 0{,}5$	$0{,}5 \pm 0{,}5$
2	$-0{,}12 \pm 0{,}25$	$-0{,}03 \pm 0{,}25$
3	$-0{,}43 \pm 0{,}25$	$-0{,}26 \pm 0{,}25$

7.6.2 Závislost určení [Fe/H] na parametrech atmosféry

Dále byl testován vliv změny parametrů hvězdných atmosfér na určené chemické složení. Jsou uvažovány parametry podle [77] $T_{\rm eff} = 4500\,$K, $\log g = 2{,}0$ a $v_{\rm turb} = 2{,}5$ km s^{-1}. Výsledné změny [Fe/H] při změnách těchto parametrů jsou uvedeny v tabulkách 7.12, 7.13.

Tabulka 7.12: Vliv změny T_{eff} na chemické složení.

T_{eff}[K]	[Fe/H]
4500	$-0{,}21 \pm 0{,}16$
4600	$-0{,}14 \pm 0{,}16$
4700	$-0{,}06 \pm 0{,}16$

Tabulka 7.13: Vliv změny v_{turb} na chemické složení.

v_{turb}[km s^{-1}]	[Fe/H]
2,5	$-0{,}21 \pm 0{,}16$
2,4	$-0{,}13 \pm 0{,}16$
2,3	$-0{,}05 \pm 0{,}16$
2,2	$0{,}03 \pm 0{,}16$
2,1	$0{,}11 \pm 0{,}16$

7.6.3 Určení obsahu Ti

Ekvivalentní šířky čar Ti I jsem převzal z [77]. Pro určení obsahu Ti jsem použil celkem 38 čar Ti I. Pro $T_{\text{eff}} = 4500\,\text{K}$, $\log g$ při $v_{\text{turb}} = 2{,}5\text{km s}^{-1}$ jsem získal hodnotu Ti/H $= -7{,}36 \pm 0{,}12$. Pro výsledky, získané v kap. 7.5.5 jsem obdržel hodnotu Ti/H $= -7.23 \pm 0{,}12$.

Použité čáry Ti I byly rozděleny do tří skupin podle hodnoty ekvivalentní šířky:

1. Celkem 11 čar s $W_\lambda \leq 100$ mÅ.
2. Celkem 17 čar s 100 mÅ $< W_\lambda \leq 150$ mÅ.
3. Celkem 10 čar s $W_\lambda > 150$ mÅ.

Výsledky pro jednotlivé skupiny jsou shrnuty v tabulce 7.14.

Tabulka 7.14: Obsah Ti pro různé skupiny čar.

skupina	[Ti/H] parametry podle [77]	[Ti/H] parametry podle této práce
1	$-7{,}52 \pm 0{,}16$	$-7{,}40 \pm 0{,}16$
2	$-7{,}3 \pm 0{,}3$	$-7{,}2 \pm 0{,}3$
3	$-7{,}4 \pm 0{,}3$	$-7{,}2 \pm 0{,}3$

7.7 NLTE efekty v atmosférách K obrů – formování čáry Li 6707Å

Ukazuje se, že existují hvězdy se zvýšeným obsahem lithia. Analýzu složení tohoto atomu je vhodné provádět se započtením NLTE efektů. Předpoklady LTE a NLTE vedou k rozdílným chemickým složením ([13, 67]). Protože Li neovlivňuje teplotní stratifikaci a elektronovou koncentraci v atmosféře, je možné se omezit pouze na výpočet NLTE obsazení hladin Li za předpokladu LTE modelu atmosféry.

Výpočet NLTE modelů atmosfér chladných hvězd pomocí programu TLUSTY se mi nepodařil (viz. kap. 6.8.2), přesto je možné tento program použít pro studium NLTE efektů v atmosférách K obrů. Ukazuje se, že v rámci zadaného LTE modelu atmosféry je možné detailně spočítat NLTE obsazení jednotlivých hladin daného prvku. Takovouto analýzu jsem provedl pro atom Li.

Atomární data

Použil jsem model atomu Li se započítáním pěti nejnižších hladin. Ionizační energie a statistické váhy jednotlivých hladin jsou převzaty z [68]. Data popisující ionizaci nárazem první hladiny jsou převzata z [89], data popisující excitaci nárazem jsou převzata z [12]. Účinný průřez fotoionizace je převzat z [87, 88].

Detaily numerické formulace

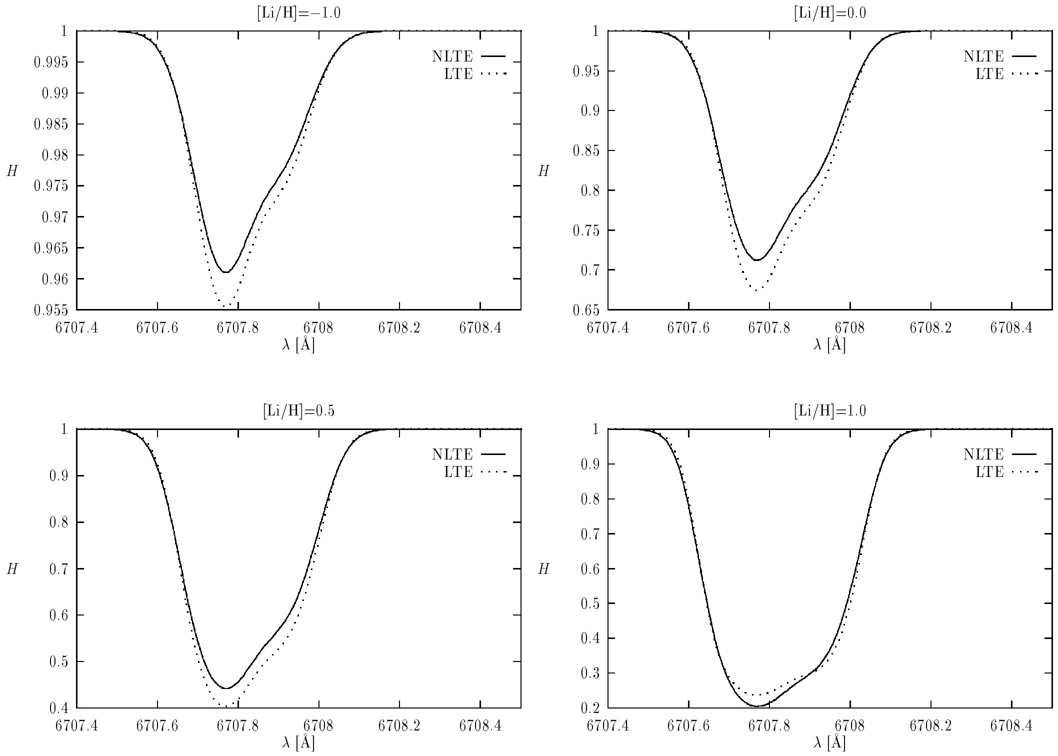
Jako základ pro výpočet NLTE obsazení hladin Li jsem použil model atmosféry spočtený programem ATLAS9 pro $T_{\mathrm{eff}} = 4200\,\mathrm{K}$, $\log g = 2{,}0$, $[\mathrm{A/H}] = 0{,}0$, $v_{\mathrm{turb}} = 2{,}0$.

Při výpočtu bylo použito 3600 frekvencí shodných s frekvencemi, na kterých jsou tabelovány Kuruczovy soubory ODF. Ukázalo se, že čárová absorpce započítaná pomocí ODF neovlivňuje významně obsazení hladin Li.

Výsledné profily spektrálních čar

Při výpočtu syntetického spektra jsem uvažoval pouze čáry lithia, aby byly patrné při nižších hodnotách jeho obsahu. Rotační rychlost a pološířku instrumentálního profilu jsem položil rovny nule.

Výsledné profily dubletu Li na obr. 7.12 jsou v souladu s profily uváděnými v literatuře [66, 67]. V křídlech čar LTE profil odpovídá profilu NLTE, což je zapříčiněno tím, že křídla čar vznikají v hlubších vrstvách atmosféry, kde se funkce zdroje S_ν blíží k Planckově funkci B_ν. Pokud čára není nasycena (při nižších hodnotách [Li/H]), pak vzniká v hlubších vrstvách atmosféry hvězdy a platí $H_{\mathrm{NLTE}} > H_{\mathrm{LTE}}$. Pokud dojde k nasycení čáry (při vyšších hodnotách [Li/H]), pak vzniká ve vnějších oblastech atmosféry a platí $H_{\mathrm{NLTE}} < H_{\mathrm{LTE}}$.



Obrázek 7.12: Profily dubletu Li pro různé hodnoty [Li/H].

Kapitola 8

Závěr

V diplomové práci jsou shrnuty základní astrofyzikální předpoklady a numerické techniky používané pro výpočet modelů atmosfér a pro následný výpočet syntetických spekter. Jsou uvedeny modely používané pro studium atmosfér K obrů. Jsou diskutovány rozdíly mezi fyzikálními a numerickými metodami jednotlivých modelů. Jako nejoptimálnější z diskutovaných modelů byly zvoleny Kuruczovy modely ATLAS9 a Plezova síť modelů POSMARCS. Dále jsou shrnuty podstatné náměty pro výpočet astrofyzikálně reálnějších modelů atmosfér.

Program používaný pro výpočet NLTE modelů atmosfér TLUSTY byl rozšířen o možnost započítání čárové opacity pomocí ODF. Program používaný pro výpočet syntetických spekter SYNSPEC36 byl rozšířen o možnost výpočtu čar vybraných molekul a prvků se $30 < Z \leq 90$. Na základě výpočtu modelů atmosfér a syntetického spektra byla získána efektivní teplota, gravitační zrychlení, chemické složení a turbulentní rychlost pro čtyři vybrané K obry. Modely atmosfér byly dále použity pro výpočet obsahu prvků pomocí změřených ekvivalentních šířek čar a pro ilustraci NLTE formování čar lithia.

Výpočet modelů atmosfér je důležitou oblastí moderní astrofyziky. Prostřednictvím vhodně volených modelů je možné analyzovat vliv různých efektů, jako je pokrývkový jev, odchylky od LTE, odchylky od sférické symetrie, vliv konvekce na strukturu atmosféry hvězdy. Modely atmosfér lze použít pro studium vlivu jaderných reakcí v nitru hvězdy na chemické složení, pro studium spekter složených objektů, jako jsou kulové hvězdokupy a galaxie. Poskytují nejpřesnější hodnoty chemického složení hvězd, na jehož základě je možné odhadovat současné chemické složení viditelného vesmíru. To je důležitým parametrem, který ovlivňuje naše představy o vzniku vesmíru.

Literatura

[1] Abbett W.P., Beaver M., Davids B., Georgobiani D., Rathbun P., Stein R.F., 1997, ApJ 480, 395

[2] Allen C.W., Astrophysical quantities, London, The Athlone Press, 1976

[3] Alonso A., Arribas S., Martinez-Roger C., 1995, A&A 313, 873

[4] Auer L. H., Mihalas D., ApJ 158, 641

[5] Bell R.A., Edvardsson B., Gustafsson B., 1985, MNRAS 212, 497

[6] Bell R.A., Eriksson K., Gustaffson B., Nordlung Å., 1976, A&AS 23, 37

[7] Branch D., Bonnell J., Tomkin J., 1978, ApJ 225, 902

[8] Brown J.A., Johnson H.R., Cutright L.C., Alexander D.R., Sharp C.M., 1989, ApJS 71, 623

[9] Brown J.A., Wallerstein G., 1992, AJ 104, 1818

[10] Castelli F., Gratton R.G., Kurucz R.L., 1997, A&A 318, 841

[11] Cayrel de Strobel G., Soubiran C., Friel E.D., Ralite N., Francois P., 1997, A&AS 124, 299

[12] Clark R.E.H., Magee N.H., Mann J.B., Merts A.L., 1982, ApJ 254, 412

[13] de la Reza R., da Silva L., 1995, ApJ 439, 917

[14] Dominy J.F., Wallerstein G., 1986, ApJ 310, 371

[15] Drake J.J., Smith G., 1991, MNRAS 250, 89

[16] Dyck H.M., Benson J.A., van Belle G.T., Ridgway S.T., 1996, AJ 111, 1705

[17] Eaton J.A., Johnson H.R., 1988, ApJ 325, 355

[18] Edvardsson, B., 1988, A&A 190, 148

[19] Ekberg U., Eriksson K., Gustafsson B., 1986, A&A 167, 304

[20] Fernandez-Villacanas J.L., Rego M., Cornide M., 1990, AJ 99, 1961

[21] Gass H., 1988, A&A 193, 185

[22] Gratton L., Gaudenzi S., Rossi C., Gratton R.G., 1982, MNRAS 201, 807

[23] Gratton R.G., Ortolani S., 1986, A&A 169, 201

[24] Gray F. D., The Observation and Analysis of Stellar Photospheres, John Wiley and Sons, New York–London–Sydney–Toronto (ruský překlad: Грей Д. Ф., Наблюдения и анализ звездных фотосфер, Москва, Мир 1980)

[25] Gustafsson B., 1989, ARA&A 27, 701

[26] Gustafsson B., Bell R.A., Eriksson K., Nordlund Å., A&A 42, 407

[27] Hauschildt P.H., Allard F., Alexander D.R., Baron E., 1997, ApJ 488, 428

[28] Herzberg G., Molecular Spectra and Molecular Structure, D. Van Nostrand Co., Princeton, 1955

[29] Horn J., Kubát J., Harmanec P., Koubský P., Hadrava P., Šimon V., Štefl S., Škoda P., 1996, A&A 309, 521

[30] Hubený I., 1988, Computer Physics Comm. 52, 103

[31] Hubený I., Lanz T., 1992, A&A 262, 501

[32] Hubený I., Lanz T., 1995, ApJ 439, 875

[33] Hubený I., Lanz T., Jeffery C. S., TLUSTY & SYNSPEC — A User's Guide, 1994

[34] Huber K.P., Herzberg G., Molecular spectra and Molecular Structure, IV. Constants of diatomic molecules, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1979 (ruský překlad Губер К.-П., Герцберг Г., Константы двухатомных молекул, Москва, Мир, 1984)

[35] Irwin A.W., 1981, ApJS 45, 621

[36] Janko J., Statistické tabulky, Praha, 1958

[37] Johnson H.R., Bernat A.P., Krupp B.M., 1080, ApJS 42, 501

[38] Kipper T., Sitska J., Atmospheres of late-type stars, Tallinn, Valgus, 1981

[39] Krtička J., Proceedings of Czech and Slovak Conference on Stellar Astronomy, Brno, 1998

[40] Kurucz R.L., 1970, Smithsonian Astrophys. Obs. Rep. No. 309

[41] Kurucz R.L., 1979, ApJS 40, 1

[42] Kurucz R.L., 1992, Rev. Mexicana Astron. Astrof. 23, 45

[43] Kurucz R.L., CD-ROM No. 18: ATLAS9 Stellar Atmosphere Programs and 2km/s Grid, Cambridge, Smithsonian Astrophys. Obs., 1993

[44] Kurucz R.L., CD-ROM No. 23: Diatomic Molecular Data for Opacity Computations, Cambridge, Smithsonian Astrophys. Obs., 1993

[45] Kurucz R.L., Peytremann E.A., 1975, SAO spec. reports, No.362, 1219

[46] Kyrolainen J., Tuominen I., Vilhu O., Virtanen H., 1986, A&AS 65, 11

[47] Lambert D.L., Ries L.M., 1981, ApJ 248, 228

[48] Lang K.R., Astrophysical Formulae, Springer-Verlag, Berlin, 1974 (ruský překlad Ленг К., Астрофызические формулы, Москва, Мир, 1978)

[49] Leep, M., Oke, J.B., Wallerstein, G., 1987, AJ 93, 338

[50] Luck R.E., Challener S.L., 1995, AJ 110, 2968

[51] Luttermoser D.G., Johnson H.R., Eaton J.E., 1994, ApJ 422, 351

[52] Любимков Л. С., 1986, Изв. Крым. астр. обс., LXXIV, 3

[53] McWilliam A., 1990, ApJS 74, 1075

[54] McWilliam A., Rich R.M., 1994, ApJS 91, 749

[55] Mihalas D., Stellar Atmospheres, San Francisco, Freeman & Co., 1978 (ruský překlad Михалас Д., Звездные атмосферы, Москва, Мир 1982)

[56] Mihalas D., Pagel B., Souffrin P., Theorie des Atmospheres Stellaires, Observatoire de Genève, Genève 1970

[57] Mikulášek Z., diplomová práce, PřF UJEP, Brno 1970

[58] Montes D., Martin E.L., Fernandez-Figueora M.J., Cornide M., De Castro E., 1997, A&AS 123, 473

[59] Moore C.E., Minnaert M.G.J., Houtgast, The Solar Spectrum 2935Å to 8770Å, 1966, National Bureau of Standards

[60] Немец О.Ф., Гофман Ю.Б., Справочник по йадерной фызике, Киев, Наукова думка, 1975

[61] National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, USA

[62] Oinas, V., 1974, ApJS 27, 405

[63] Павленко Я. В., Шаврина А. В., 1986, Кинематика и физика небеских телес № 4, 54

[64] Павленко Я.В., Яковина Л.А., 1994, Астрономический журнал 71, 863

[65] Павленко Я.В., 1991, Астрономический журнал 68, 431

[66] Павленко Я.В., 1991, Астрономический журнал 68, 1240

[67] Павленко Я.В., 1991, Астрономический журнал 69, 1179

[68] Peach G., Saraph H.E., Seaton M.J., 1988, J. Phys. B 21, 3669

[69] Peytremann E., 1974, A&A 33, 203

[70] Phillips A.P., Wright S.L., 1980, MNRAS 192, 197

[71] Piskunov N.E., Kupka F., Ryabchikova T.A., Weiss W.W., Jeffery C.S., 1995, A&AS 112, 525

[72] Plez B., 1997, soukromé sdělení

[73] Plez B., Brett J.M., Nordlund Å., 1992, A&A 256, 551

[74] Program SYNSPEC pro výpočet syntetických spekter, Vědeckotecnická zpráva 40, AsÚ ČSAV Ondřejov, Ondřejov 1987

[75] Short C.I., Lester J.B., 1994, ApJ 436, 165

[76] Štefl V., 1985, Folia Fac. Sci. Nat. Univ. Purkyně Brunensis XXVI, 43

[77] Štefl V., 1993, Scripta Fac. Sci. Nat. Univ. Masarykiana Brunensis 23, 67

[78] Querci F., Querci M., Kunde V.G., 1971, A&A 15, 256

[79] Querci F., Querci M., 1975, A&A 39, 113

[80] Ruland F., Holweger H., Griffin R., Griffin R., Biehl D., 1980, A&A 92, 70

[81] Saxner M., Gustafsson B., 1984, A&A 140, 334

[82] Sneden C., Kraft R.P., Langer G.E., Prosser C.F., Shetrone M.D., 1994, AJ 107, 1773

[83] Strom S. E., Kurucz R. L., 1966, Journal of Quant. Spec. and Rad. Transf., 6, 591

[84] Tomkin J., Lambert D.L., 1983, ApJ 273, 722

[85] Tsuji T., 1973, A&A 32, 411

[86] Valenti J.A., Piskunov N., 1996, A&AS 118, 595

[87] Verner D.A., Ferland G.J., Korista K.T., Yakovlev D.G., 1996, ApJ 465, 487

[88] Verner D.A., Yakovlev D.G., 1995, A&AS 109, 125

[89] Voronov G.S., 1997, ADNDT 65, 1

[90] Wallace L., Hinkle K., 1996, ApJS 103, 235