PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA MASARYKOVY UNIVERZITY
ÚSTAV TEORETICKÉ FYZIKY A ASTROFYZIKY

Hydrodynamika hvězdného větru

Brno 2001

Jiří Krtička

Poděkování

Děkuji vedoucímu svého doktorského studia, RNDr. Jiřímu Kubátovi, CSc., za vedení doktorského studia a za cenné poznámky k disertační práci. Rovněž děkuji doc. RNDr. Vladimíru Šteflovi, CSc., za podporu během studia.

Obsah

Úvod **9**

Část I
Fyzikální základy

1 Hydrodynamika vícesložkových plynů **13**
1.1 Levá část Boltzmannovy rovnice 13
1.1.1 Boltzmannova rovnice 13
1.1.2 Označení veličin 14
1.1.3 Momenty levé strany Boltzmannovy rovnice 15
1.1.4 Další sada momentových rovnic 17
1.1.5 Uzavření systému rovnic: Eulerovy rovnice 18
1.2 Srážkové členy pro případ Coulombovských srážek 19
1.2.1 Srážkový člen v Boltzmannově rovnici 19
1.2.2 Momentové rovnice s Fokkerovým-Planckovým srážkovým členem 20
1.2.3 Možnost oddělení jednotlivých složek plynu 21
1.3 Úpravy hydrodynamických rovnic 22
1.3.1 Vektorový tvar rovnic 22
1.3.2 Sféricky symetrické rovnice 23
1.3.3 Rovnice pro jednosložkový plyn 23

2 Základy teorie záření **24**
2.1 Veličiny popisující záření 24
2.2 Rovnice přenosu záření 25
2.3 Momentové rovnice 26
2.3.1 Energiová rovnice 26
2.3.2 Rovnice hybnosti 27
2.4 Záření za předpokladu sférické symetrie 27

3 Teorie hvězdného větru hnaného zářením **29**
3.1 Sobolevova aproximace 29
3.1.1 Přesné řešení rovnice přenosu 29
3.1.2 Fyzikální podstata Sobolevovy aproximace 30
3.1.3 Řešení rovnice přenosu v Sobolevově aproximaci 32
3.1.4 Sféricky symetrický případ 35
3.2 CAK model hvězdného větru 36
3.2.1 Přibližné vyjádření zářivé síly 36

3.2.2 Zahrnutí velkého počtu čar . . . 37
3.2.3 Hydrodynamické rovnice . . . 38
3.2.4 CAK oblasti . . . 40
3.3 Diskuse CAK bodu . . . 43
3.3.1 Charakteristiky CAK rovnice . . . 43
3.3.2 Abbottovy vlny . . . 44
3.4 Rozšíření CAK teorie . . . 46
3.4.1 Zpřesnění rozdělovací funkce . . . 46
3.4.2 Zpřesnění úhlové integrace . . . 46
3.5 Omezení CAK teorie . . . 46
3.5.1 Sobolevova aproximace . . . 47
3.5.2 Vliv vícenásobného rozptylu . . . 47
3.5.3 Nestability ve hvězdném větru . . . 47
3.5.4 Vícerozměrné modely hvězdných větrů . . . 48
3.5.5 Magnetické pole . . . 49

Část II
Modelování hvězdného větru

4 Modely vícesložkového větru 53
4.1 Způsob řešení hydrodynamických rovnic . . . 53
4.1.1 Zvolená síť . . . 53
4.1.2 Aproximace derivací . . . 54
4.1.3 Metoda úplné linearizace . . . 55
4.1.4 Zahrnutí kritického bodu . . . 55
4.1.5 Počáteční model pro Newton-Raphsonovu metodu . . . 56
4.1.6 Výpočet $G(x)$ a $G'(x)$ pro malá x . . . 56
4.2 Jednosložkový vítr . . . 57
4.2.1 Izotermický vítr . . . 57
4.2.2 Neizotermický vítr . . . 59
4.3 Dvojsložkový izotermický vítr . . . 61
4.3.1 Rovnice . . . 62
4.3.2 Singulární body . . . 63
4.3.3 Šíření vln ve dvojsložkovém větru . . . 64
4.3.4 Spodní okrajové podmínky . . . 69
4.3.5 Numerické řešení rovnic . . . 69
4.3.6 Spočtené modely . . . 71
4.4 Trojsložkový neizotermický hvězdný vítr . . . 77
4.4.1 Rovnice . . . 78
4.4.2 Singulární body . . . 79
4.4.3 Spodní okrajové podmínky . . . 81
4.4.4 Numerické řešení rovnic . . . 82
4.4.5 Spočtené modely . . . 82
4.5 Gayleyho-Owockého ohřev . . . 86
4.5.1 Dopplerovský ohřev v prostředí hvězdných větrů . . . 87
4.5.2 Gayleyho-Owockého ohřev za předpokladu platnosti Sobolevovy aproximace . 89

4.6 Odlišné teploty jednotlivých složek a Gayleyho-Owockého ohřev . . . 90
4.6.1 Rovnice . . . 90
4.6.2 Singulární body . . . 92
4.6.3 Podmínky regularity . . . 94
4.6.4 Spodní okrajové podmínky . . . 96
4.6.5 Numerické řešení rovnic . . . 98
4.6.6 Spočtené modely . . . 98

5 Důsledky a ověření vícesložkových modelů 104
5.1 Možnost oddělení jednotlivých složek větru . . . 104
5.1.1 Převládající aktivní složka . . . 104
5.1.2 Převládající pasivní složka . . . 105
5.2 Vliv chemického složení na modely větrů . . . 108
5.2.1 Závislost parametrů síly záření na chemickém složení . . . 108
5.2.2 Vliv chemického složení na strukturu větru . . . 108
5.3 Pozorované a předpovězené konečné rychlosti větru v_∞ . . . 109
5.3.1 τ Sco . . . 109
5.3.2 Porovnání většího počtu hvězd . . . 111
5.4 Problém rychlosti ztráty hmoty . . . 111
5.5 Chemicky pekuliární hvězdy a oddělování se hélia . . . 113
5.6 Rentgenovská emise hvězdných větrů . . . 116
5.7 Nabíjení se hvězd . . . 117
5.8 Ultrafialový exces . . . 117

Závěr 121

Dodatky

A Srážkové členy pro případ Coulombovských srážek 125
A.1 Vztahy pro integraci pravé strany Boltzmannovy rovnice . . . 125
A.1.1 Těžišťová a vzájemná rychlost . . . 125
A.1.2 Výpočet středních hodnot . . . 126
A.1.3 Rozdělovací funkce částic . . . 126
A.2 Debyeovo stínění . . . 128
A.3 Srážky v Coulombovském poli . . . 129
A.4 Srážky v Debyeově poli . . . 131
A.5 Fokkerova-Planckova rovnice . . . 133
A.6 Momentové rovnice vyplývající z Fokkerovy-Planckovy rovnice . . . 136
A.6.1 Srážkový člen v rovnici kontinuity . . . 136
A.6.2 Srážkový člen v pohybové rovnici . . . 136
A.6.3 Srážkový člen v energiové rovnici . . . 137

B Diferenciované rovnice a členy Jacobiánu pro případ 1D větru 139
B.1 Jednosložkový vítr . . . 139
B.1.1 Diskretizace rovnic . . . 139
B.1.2 Členy Jacobiánu . . . 140
B.2 Trojsložkový neizotermický vítr . . . 141

B.2.1 Diskretizace rovnic 141
B.2.2 Členy Jacobiánu 143
B.3 Vítr s odlišnými teplotami jednotlivých složek 151
B.3.1 Diskretizace rovnic 151
B.3.2 Členy Jacobiánu 153

Seznam uveřejněných článků **163**

Literatura **165**

Úvod

Hvězdy a hvězdné nebe sleduje člověk již od dob nejstarších civilizací. Ale teprve minulé století přineslo odpověď na otázky, které si lidé od nepaměti kladli. Byly objeveny zdroje hvězdné energie, chemické složení hvězd přestalo být hádankou a bylo odhaleno tajemství vzniku, vývoje a zániku hvězd. Nade vší pochybnost byla prokázána souvislost mezi životem na Zemi a Sluncem, mezi prvky v přírodě a jadernými reakcemi ve hvězdách. Důležitým prostředníkem mezi hvězdami a živými tvory jsou hvězdné větry. Ty jsou, vedle výbuchů supernov, jedním z nejdůležitějších zdrojů mezihvězdné látky. Mnohé z atomů uhlíku, dusíku a kyslíku, které dnes tvoří základ života na Zemi, byly před miliardami let urychlovány zářením hvězd. Hvězdným větrům, supernovám a Slunci tedy vděčíme za vznik života na Zemi.

To ale rozhodně není jediný důvod, proč je zajímavé studovat hvězdný vítr. Jen velmi malý zlomek hmotnosti hvězdy tvoří hvězdnou atmosféru a okolní hvězdný vítr. Přesto však většina informací, které o hvězdách získáváme, pochází právě z této hmotnostně nepatrné oblasti hvězdy. Proto je důležité hledat takové modely vnějších oblastní hvězd, které by co možná nejlépe odpovídaly skutečnosti.

Horké hvězdy navíc ztrácí podstatnou část své hmotnosti právě prostřednictvím hvězdného větru. Protože je hmotnost hvězdy jedním z nejdůležitějších parametrů určujících hvězdný vývoj, ovlivňují hvězdné větry přímo osud hvězd.

Možnost úniku částic z povrchu hvězd zajímala teoretiky již v počátcích studia hvězdných atmosfér (Milne 1923, viz. též Johnson 1925). Byl to ale především prudký rozvoj kvantové mechaniky, který dal pevnější základ pro teorii zářením urychlovaných hvězdných větrů. Sur (1926) se pokusil vysvětlit pohyb eruptivních protuberancí na základě jejich urychlování prostřednictvím čárové absorpce. Johnson (1925, 1926) spočetl, že v atmosférách hvězd s efektivní teplotou vyšší než 25 000 K může docházet k úniku atomů helia, uhlíku, dusíku, kyslíku a dalších. Tyto práce završil Milne (1926), který upozornil na důležitost Dopplerovského posuvu čar pro urychlování částic a předložil kvantitativně správný odhad konečné rychlosti větru v_∞. Bohužel však v této oblasti žádné další práce po dlouhou dobu nevznikaly, zřejmě z důvodu chybějících pozorovatelných důsledků. Jednou z výjimek je práce Soboleva (1947), která položila základy moderní teorie hvězdných větrů urychlovaných zářením.

Nové poznatky začaly přicházet spíše z oblasti slunečního větru. Jedním z jevů, který upozornil na existenci proudu částic, směřujícího od Slunce, byly polární záře (viz. např. diskuze v článku, Milne 1926). Na základě pozorování komet usoudil Bierman (1951), že zmiňovaný tok částic, později nazývaný sluneční vítr, se pohybuje rychlostí $500-1500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Parker (1958) vysvětlil sluneční vítr jako důsledek rozpínání se horké koróny. Jeho vysvětlení se stalo základem současných modelů slunečního větru.

Nedlouho po experimentálním potvrzení existence slunečního větru bylo ukázáno, že obdobný jev se vyskytuje také v blízkosti mnohých horkých OB hvězd. Dlouho před tímto objevem bylo sice z optických pozorování známo, že v okolí horkých hvězd se často nacházejí velké obálky, jejich rychlosti však nikdy nepřevyšovaly únikovou rychlost z povrchu hvězdy. Teprve ultrafialová pozorování raných veleobrů získaná Mortonem (1967) pomocí balistických raket odhalila existenci proudu látky s rychlostmi podstatně převyšujícími únikové rychlosti. Tento druh větru však bylo obtížné vysvětlit pomocí modelu horké koróny, protože ve spektrech větru se vyskytovaly čáry takových iontů, jako jsou C IV, N V a Si IV. Proto Lucy a Solomon (1970) navrhli, že hvězdný vítr horkých hvězd je důsledkem zářivé síly působící na atmosféru hvězdy. Kvalitativně správné modely zářením hnaných větrů získali Castor, Abbott a Klein (1975, CAK). Po upřesnění původní teorie (Abbott 1982, Friend a Abbott 1986, Pauldrach, Puls a Kudritzki 1986) bylo možné získat parametry větrů, které dobře odpovídaly pozorovaným hodnotám. V dnešní době je zářivé urychlování základem nejen pro vysvětlení větrů horkých hvězd, ale také například pro modelování větrů akrečních disků (Drew, Proga, Stone 1998).

Po vypracování teorie zářením urychlovaných hvězdných větrů začaly být podrobněji zkoumány předpoklady, na kterých je tato teorie postavena. Základním procesem, který tyto větry ovlivňuje je absorpce záření v rezonančních čarách kovů (především uhlíku, dusíku, kyslíku a železa). Protože tyto kovy mají podstatně nižší hustotu než celý hvězdný vítr (tvořený převážně atomy a ionty vodíku a helia), dochází ve hvězdném větru k přenosu hybnosti mezi jeho jednotlivými složkami. Tento jev studovali již v počátku moderních studií hvězdných větrů Castor, Abbott a Klein (1976). Ti ukázali, že v případě hvězd s relativně vysokou hustotou jsou rozdíly rychlostí mezi jednotlivými složkami malé. Pro velkou část horkých hvězd je tedy možné částicovou strukturovanost větru zanedbat.

Pro hvězdy s relativně nízkou hustotou větru však tento závěr již neplatí. Springmann a Pauldrach (1992) na základě teoretických úvah dospěli k závěru, že ve větru s relativně malou hustotou nejsou již atomy urychlované zářením schopny předávat získanou hybnost neabsorbujícím částicím. Ukázali, že v takovémto případě může docházet k oddělování jednotlivých složek větru. Přestože jejich závěry nebyly opřeny o hydrodynamické modely hvězdných větrů, podnítily další studie popisující důsledky možného oddělování složek větru. Porter a Drew (1995) studovali důsledky oddělování složek větru pro model větrem stlačovaného disku a pro rentgenovskou emisi hvězd. Porter a Skouza (1999) ukázali na možnost vzniku pulzujících obálek v okolí hvězd s nízkou hustotou větru a Hunger a Groote (1999) vysvětlili pekuliární obsah helia na základě jeho pádu zpět na hvězdu. Všechny tyto práce však používaly zjednodušený model vícesložkového větru, bez podrobného řešení hydrodynamických rovnic.

Konzistentní hydrodynamické modely vícesložkového větru spočetl pouze Babel (1995, 1996). Ten však svůj zájem soustředil především na hvězdy spektrálního typu A (hlavní posloupnosti), v jejichž okolí se může vyskytovat čistě kovový vítr. Relativně řídké větry hvězd spektrálního typu B hlavní posloupnosti tak zůstávaly v podstatě opomíjeny a jejich popis byl neurčitý. A to přesto, že se v této oblasti HR diagramu nachází množství hvězd, jejichž fyzikální podstata není doposud uspokojivě vyjasněna. K těmto hvězdám je možné zařadit například Be hvězdy nebo hvězdy s pekuliárním obsahem helia. Je možné, že jevy pozorované u těchto hvězd souvisí právě s jejich větrem. Proto je překvapující, že hvězdné větry s nízkou hustotou nebyly dosud podrobněji studovány.

Teplotní strukturu řídkých větrů navíc může ovlivnit jev tzv. Gayleyho-Owockého ohřevu (Gayley a Owocki 1994, GO), který je způsoben samotnou silou záření, přesněji závislostí síly záření na rychlosti absorbujících částic. Přestože tento jev může být pro větry s nižší hustotou důležitý, nebyl dosud podrobněji modelován.

Cílem této disertační práce je proto popis hydrodynamiky hvězdného větru se zaměřením na doposud podrobněji nestudovanou oblast větrů s relativně nízkou hustotou.

Část I

Fyzikální základy

Kapitola 1

Hydrodynamika vícesložkových plynů

1.1 Levá část Boltzmannovy rovnice

1.1.1 Boltzmannova rovnice

Hydrodynamické rovnice popisující jednosložkový plyn je možné odvodit více způsoby. V případě vícesložkového plynu, kde je důležité správně zahrnout srážky mezi jednotlivými složkami, tomu tak není. V takovémto případě je nutné hydrodynamické rovnice odvozovat přímo z Boltzmannovy rovnice.

Odvozování hydrodynamických rovnic pro vícesložkový plyn bude vycházet z monografie Burgerse (1969). V celé této kapitole bude využívána Einsteinova sumační symbolika pro sčítání přes opakující se prostorové indexy. Nebude-li řečeno jinak, sčítání přes různé typy částic bude přímo zapsáno.

Boltzmannova rovnice pro jednočásticovou distribuční funkci F_s částic typu s v plynu, který obsahuje více různých složek, má tvar

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_h}\left(\xi_{sh} F_s\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_{sh}}\left(\frac{f_{sh}}{m_s} F_s\right) = \left(\frac{\mathrm{d}F_s}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{coll}}. \tag{1.1}$$

Přitom ξ_{sh} jsou složky rychlosti částice s, která se v čase t nachází v prostorovém elementu objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_3$. Distribuční funkce je definována tak, že $F_s\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s$ je počet částic typu s, nacházejících se v objemu $\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, se složkami vektoru rychlosti $\boldsymbol{\xi}_s$ v elementu $\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s = \mathrm{d}\xi_{s1}\,\mathrm{d}\xi_{s2}\,\mathrm{d}\xi_{s3}$ rychlostního prostoru. F_s je funkce sedmi proměnných, rychlostí $\boldsymbol{\xi}_s$, prostorových souřadnic $\boldsymbol{x}_s$ a času. Částice typu s mají hmotnost m_s a působí na ně vnější síla f_{sh}. Pravá strana rovnice popisuje vliv srážek na distribuční funkci a její tvar závisí na jejich konkrétním typu. Rovnice je zapsána za předpokladu, že rychlost částic je podstatně menší než rychlost světla. Budeme též zanedbávat kvantové efekty.

Díky tomu, že jsou složky rychlosti částic ξ_{sh} a souřadnice x_h nezávislé proměnné, platí

$$\frac{\partial}{\partial x_h}\left(\xi_{sh} F_s\right) = \xi_{sh}\frac{\partial F_s}{\partial x_h}.$$

Častým případem je, že složky síly f_{sh} jsou nezávislé na rychlosti částic. Platí tedy

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{sh}}\left(\frac{f_{sh}}{m_s} F_s\right) = \frac{f_{sh}}{m_s}\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}}.$$

Boltzmannova rovnice (1.1) může být s použitím uvedených vztahů přepsána do tvaru

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \xi_{sh}\frac{\partial F_s}{\partial x_h} + \frac{f_{sh}}{m_s}\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}} = \left(\frac{\mathrm{d}F_s}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{coll}}. \tag{1.2}$$

Při odvozování příslušných hydrodynamických rovnic z Boltzmannovy rovnice je výhodné uvažovat pravou a levou část rovnice odděleně. Zatímco levá část nezávisí na typu srážek a tedy i tvar odvozených členů bude stejný, při výpočtu pravé části je nutné vždy zadat druh srážek, prostřednictvím kterých na sebe částice působí. V následujících kapitolách se proto budeme zabývat levou stranou této rovnice.

Vícesložkový plyn je možné popisovat dvěma způsoby, z nichž každý je vhodný pro různé případy. Vícesložkový popis je vhodné použít v případě, kdy rozdíly rychlostí jednotlivých složek jsou velké (ve srovnání s příslušnou tepelnou rychlostí, viz. dále). Naopak jednosložkový popis, v rámci kterého se zavádějí střední veličiny pro popis plynu jako celku, je vhodné použít v případě malých difuzních rychlostí mezi jednotlivými složkami. V následujícím výkladu se budeme zabývat především vícesložkovým popisem, protože není předem zřejmé, jaké budou rozdíly rychlostí jednotlivých složek hvězdného větru.

1.1.2 Označení veličin

Počet částic s v jednotce objemu je označen jako N_s, hustota těchto částic je tedy

$$\rho_s = N_s m_s. \tag{1.3}$$

Celkový počet částic různých typů (atomy, elektrony, molekuly) v jednotce objemu a jejich hustota jsou určeny vztahy

$$N = \sum_s N_s, \tag{1.4}$$

$$\rho = \sum_s \rho_s. \tag{1.5}$$

Hustotu částic N_s lze z definice získat integrací distribuční funkce přes prostor rychlostí,

$$N_s = \int F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s. \tag{1.6}$$

Komponentu střední rychlosti částic daného typu $\boldsymbol{v}_s$ lze vypočíst jako

$$v_{sh} = \frac{1}{N_s} \int \xi_{sh} F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s. \tag{1.7}$$

Při výpočtech je výhodné oddělit náhodný (tepelný) pohyb jednotlivých částic a pohyb plynu jako celku. Proto se zavádí tepelná rychlost částic. Jednou z možností je vyjádření tepelné rychlosti vzhledem k rychlosti plynu daných částic, pro jednotlivé komponenty rychlosti jako

$$c_{sh} = \xi_{sh} - v_{sh}. \tag{1.8}$$

Pro odvozování momentových rovnic bude důležité si uvědomit, že z definic střední a tepelné rychlosti (1.7,1.8) plyne, že střední hodnota tepelné rychlosti je nulová.

Při výpočtu momentových rovnic se objeví integrály ze součinů jednotlivých složek tepelných rychlostí, proto se pro ně zavádí následující označení:

$$p_{s,hk} = m_s \int c_{sh} c_{sk} F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s, \tag{1.9a}$$

$$p_{s,hki} = m_s \int c_{sh} c_{sk} c_{si} F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s. \tag{1.9b}$$

Z takto definovaných momentů distribuční funkce se zavádí hydrostatický tlak pomocí vztahu

$$p_s = \frac{1}{3} p_{s,hh}. \tag{1.10}$$

Pro teplotu T_s plynu částic s, definovanou jako

$$T_s = \frac{p_s}{N_s k}, \tag{1.11}$$

(kde k je Boltzmannova konstanta) potom platí známý vztah

$$\frac{3}{2} k T_s = \frac{1}{2} m_s \overline{c}_s^2, \tag{1.12}$$

kde $\overline{c}_s^2$ je střední hodnota tepelné rychlosti,

$$\overline{c}_s^2 = \frac{1}{N_s} \int c_s^2 F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s. \tag{1.13}$$

Pro další výpočty bude též výhodné zavést rychlost $v_{\mathrm{th},s}$ (která je v případě Maxwellovského rozdělení rychlostí rovna nejpravděpodobnější rychlosti) pomocí

$$v_{\mathrm{th},s}^2 = \frac{2kT_s}{m_s}. \tag{1.14}$$

1.1.3 Momenty levé strany Boltzmannovy rovnice

Cílem popisu chování plynu je výpočet středních hodnot rychlostí $\boldsymbol{v}_s$, hustot ρ_s a případě veličin $p_{s,hk}$. Proto je informace obsažená v distribuční funkci F_s často nadbytečná a navíc její hledání by bylo příliš náročné. Není tedy vhodné řešit přímo Boltzmannovu rovnici (1.1), ale pouze momentové rovnice, které lze získat z původní Boltzmannovy rovnice jejím vynásobením vhodnou funkcí komponent rychlosti Q a následnou integrací přes celý prostor rychlostí částic s. Protože se v této kapitole zabýváme pouze levou stranou Boltzmannovy rovnice, získané vztahy budou popisovat plyn, ve kterém lze vliv srážek zanedbat ve srovnání s vlivem sil působících na jednotlivé složky.

Při výpočtu se používají různé sady násobitelů Q v závislosti na tom, jaký tvar výsledných momentových rovnic si přejeme získat. Jedna z metod využívá následující sadu násobitelů:

$$Q_1 = m_s, \tag{1.15a}$$

$$Q_2 = m_s \xi_{sh}, \tag{1.15b}$$

$$Q_3 = m_s \xi_{sh} \xi_{sk}. \tag{1.15c}$$

Rovnice kontinuity

Vynásobíme-li Boltzmannovu rovnici (1.1) členem Q_1 a následně zintegrujeme přes prostor rychlostí, lze první člen na levé straně jednoduše zapsat s využitím rovnice (1.6) jako

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N_s m_s \right).$$

Podobně druhý člen po jednoduché integraci dává

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(N_s m_s v_{sk} \right).$$

Konečně, třetí člen po integraci per-partes vypadává za předpokladu, že se distribuční funkce F_s pro velké hodnoty rychlosti dostatečně rychle blíží k nule. Výsledná momentová rovnice, *rovnice kontinuity (hmotnosti)* má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N_s m_s \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(N_s m_s v_{sk} \right) = 0. \tag{1.16}$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování hmotnosti.

Pohybová rovnice

Další momentovou rovnici získáme vynásobením Boltzmannovy rovnice násobitelem Q_2 a integrací výsledné rovnice přes prostor rychlostí. První člen na levé straně lze jednoduše integrovat s využitím vztahu pro výpočet střední rychlosti částic (1.7),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh}\right).$$

Při výpočtu druhého členu lze využít vztahu

$$m_s \int \xi_{sh}\xi_{sk} F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s = N_s m_s v_{sh} v_{sk} + p_{s,hk}, \tag{1.17}$$

ve kterém jsme využili definic (1.8,1.9a). Při výpočtu posledního členu na levé straně využijeme integrace per-partes, která vede ke členu

$$-\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s.$$

Výsledná momentová rovnice, *rovnice kontinuity hybnosti, pohybová rovnice*, má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk} + p_{s,hk}\right) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s = 0. \tag{1.18}$$

Pokud navíc působící síla nezávisí na rychlosti částic, pak je možné poslední člen jednoduše integrovat, získáváme momentovou rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk} + p_{s,hk}\right) - N_s f_{sh} = 0. \tag{1.19}$$

Energiová rovnice

Poslední z námi uvažovaných momentových rovnic je možné získat vynásobením Boltzmannovy rovnice násobitelem Q_3. Při úpravě prvního členu využijeme vztahu (1.17) a obdržíme

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk} + p_{s,hk}\right).$$

Úpravu druhého členu provedeme s vícenásobným užitím vztahů (1.8,1.9a,1.9b)

$$m_s \int \xi_{sh}\xi_{sk}\xi_{si} F_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s = N_s m_s v_{sh} v_{sk} v_{si} + v_{si} p_{s,hk} + v_{sk} p_{s,hi} + v_{sh} p_{s,ki} + p_{s,hki}.$$

Při úpravě posledního členu pomocí integrace per-partes získáme

$$-\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \left(\xi_{sk} f_{sh} + \xi_{sh} f_{sk}\right) F_s.$$

Poslední z námi uvažovaných momentových rovnic, rovnice pro komponenty tlaku, má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk} + p_{s,hk}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk} v_{si} + v_{si} p_{s,hk} + v_{sk} p_{s,hi} + v_{sh} p_{s,ki} + p_{s,hki}\right) -$$
$$- \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \left(\xi_{sk} f_{sh} + \xi_{sh} f_{sk}\right) F_s, \tag{1.20}$$

Kontrakcí rovnice (1.20) a následným vynásobením $\frac{1}{2}$ pak získáme rovnici pro termodynamický tlak, neboli *energiovou rovnici*

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 + \frac{3}{2}p_s\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 v_{si} + \frac{3}{2}p_s v_{si} + v_{sk}p_{s,ki} + \frac{1}{2}p_{s,kki}\right) - \\ - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{sk} f_{sk} F_s = 0. \quad (1.21)$$

Pokud vnější síla nezávisí na rychlosti částic, pak je možné poslední člen jednoduše integrovat a získat energiovou rovnici v jednodušším tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 + \frac{3}{2}p_s\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 v_{si} + \frac{3}{2}p_s v_{si} + v_{sk}p_{s,ki} + \frac{1}{2}p_{s,kki}\right) - N_s v_{sk} f_{sk} = 0. \quad (1.22)$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon zachování energie plynu částic typu s.

1.1.4 Další sada momentových rovnic

Odlišný druh momentových rovnic lze lze získat s další sadou multiplikátorů, která bude také využita pro výpočet srážkových členů pro případ Coulombovských srážek. Místo celkové rychlosti částic lze v jednotlivých násobitelích použít tepelnou rychlost částic. Multiplikátory jsou pak dány vzorci

$$Q_1 = m_s, \quad (1.23a)$$
$$Q_2 = m_s c_{sh}, \quad (1.23b)$$
$$Q_3 = m_s c_{sh} c_{sk}. \quad (1.23c)$$

Namísto zdlouhavé integrace lze však nyní využít výsledků předchozí kapitoly. Podle vzorce (1.8) je tepelná rychlost částice dána rozdílem celkové rychlosti částice $\boldsymbol{\xi}_s$ a rychlosti plynu $\boldsymbol{v}_s$. Uvědomíme-li si, že rychlost $\boldsymbol{v}_s$ lze vytknout před integrál, pak moment daného řádu získaný z multiplikátorů (1.23a–1.23c) je možné vyjádřit pomocí momentu stejného řádu získaných z multiplikátorů (1.15a–1.15c) a momentů nižších řádů. Získáme momentové rovnice

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}(N_s m_s) + N_s m_s \frac{\partial v_{sk}}{\partial x_k} = 0, \quad (1.24a)$$
$$N_s m_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} v_{sh} + \frac{\partial}{\partial x_i} p_{s,hi} - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s = 0, \quad (1.24b)$$
$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} p_{s,hk} + p_{s,hk}\frac{\partial v_{si}}{\partial x_i} + p_{s,hi}\frac{\partial v_{sk}}{\partial x_i} + p_{s,ki}\frac{\partial v_{sh}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} p_{s,hki} + \quad (1.24c)$$
$$+ v_{sh}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sk} F_s + v_{sk}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \left(\xi_{sk} f_{sh} + \xi_{sh} f_{sk}\right) F_s = 0. \quad (1.24d)$$

Při úpravě poslední rovnice byla použita rovnice kontinuity (1.24a). Přitom $\mathrm{D}_s/\mathrm{D}t$ je operátor derivace podle času v soustavě pohybující se s plynem s-částic (Lagrangeově soustavě),

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v_{si}\frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.25)$$

Jak uvidíme dále, tento systém rovnic je ekvivalentní rovnicím (1.16,1.19,1.20). Kontrakcí rovnice (1.24c) a jejím vynásobením $\frac{1}{2}$ získáme

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}p_s\right) + \frac{3}{2}p_s\frac{\partial v_{si}}{\partial x_i} + p_{s,ij}\frac{\partial v_{sj}}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i} p_{s,jji} + v_{si}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{si} F_s - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{si} f_{si} F_s = 0. \quad (1.26)$$

1.1.5 Uzavření systému rovnic: Eulerovy rovnice

Z původní Boltzmannovy rovnice pro distribuční funkci jsme získali systém momentových rovnic pro jednotlivé momenty. Stav, ve kterém se tyto rovnice nacházejí však ještě stále není uspokojivý. Z rovnice kontinuity (1.16) je sice možné spočíst nultý moment N_s, ale pouze se znalostí prvního momentu $\boldsymbol{v}_s$. Ten lze vypočítat z pohybových rovnic (1.19), ale jen v případě, že známe druhý moment $p_{s,hk}$. Při výpočtu komponent tlaku z rovnic (1.20) narazíme na obdobný problém. Obecně platí, že v momentové rovnici řádu n se vyskytuje moment o řád vyšší. Je tedy zřejmé, že je nutné nalézt podmínky vhodné pro uzavření celého systému rovnic. Tvar výsledných rovnic je samozřejmě závislý na tom, jaké podmínky použijeme. V případě hvězdných větrů se používají rovnice v nejjednodušší tzv. pěti-momentové aproximaci, které jsou ekvivalentní Eulerovým hydrodynamickým rovnicím. Systém rovnic se pak uzavírá následujícími vztahy:

$$p_{s,hk} = \delta_{hk} p_s, \tag{1.27a}$$

$$p_{s,hki} = 0. \tag{1.27b}$$

Porovnáním s definicí teploty (1.11) vidíme, že první ze vztahů odpovídá stavové rovnici. Vztahy též vyjadřují předpoklad, že tepelné rychlosti částic jsou v různých směrech nezávislé. Za těchto podmínek lze rovnice (1.16,1.18, 1.21) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(N_s m_s v_{sk}\right) = 0, \tag{1.28a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(N_s m_s v_{sh}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(N_s m_s v_{sh} v_{sk}\right) + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s = 0, \tag{1.28b}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 + \frac{3}{2}p_s\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 v_{si} + \frac{5}{2}p_s v_{si}\right) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{sk} f_{sk} F_s = 0. \tag{1.28c}$$

Tento systém lze různým způsobem přepisovat a získávat tak různé typy rovnic. S využitím operátoru derivace podle času v soustavě pohybující se s plynem (1.25) lze rovnici kontinuity (1.28a) přepsat jako

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\rho_s + \rho_s \frac{\partial v_{sk}}{\partial x_k} = 0. \tag{1.29}$$

Obdobně lze i pohybovou rovnici (1.28b) s využitím výše uvedeného operátoru a rovnice kontinuity (1.28a) zapsat ve tvaru

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} v_{sh} + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s = 0. \tag{1.30}$$

Podobně, i když poněkud složitěji, lze upravit i energiovou rovnici (1.28c). Členy obsahující kvadrát rychlosti lze s pomocí rovnice kontinuity (1.28a) přepsat do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}N_s m_s v_s^2 v_{si}\right) = \rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{2}v_s^2\right).$$

Takto lze upravit též člen obsahující tlak

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_s \frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_{si}\rho_s \frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) = \rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right).$$

Stojí za připomenutí, že často se vyskytující člen $\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}$ vyjadřuje vnitřní energii ideálního jednoatomového plynu na jednotku hmotnosti. Po naznačených úpravách nabývá energiová rovnice (1.28c) tvar

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{2}v_s^2 + \frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(v_{si} p_s\right) - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{si} f_{si} F_s = 0. \tag{1.31}$$

Často bývá výhodné použít tuto rovnici ve tvaru, který explicitně neobsahuje síly působící na příslušné složky plynu. Toho lze jednoduše dosáhnout vynásobením pohybové rovnice (1.30) rychlostí v_{sh} a jejím sečtením přes prostorové indexy,

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{1}{2}v_s^2\right) + v_{sh}\frac{\partial p_s}{\partial x_h} - v_{sh}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{si} f_{si} F_s = 0 \tag{1.32}$$

a následným odečtením této výsledné rovnice od energiové rovnice (1.31),

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + p_s\frac{\partial v_{sh}}{\partial x_h} + v_{sh}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s f_{sh} F_s - \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \xi_{sh} f_{sh} F_s = 0. \tag{1.33}$$

Pokud bychom předpokládali, že působící síla na rychlosti nezávisí, pak poslední člen na pravé straně vypadává a získáváme vyjádření energiové rovnice (rovnice pro teplotu) ve tvaru

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + p_s\frac{\partial v_{sh}}{\partial x_h} = 0. \tag{1.34}$$

Z výsledné rovnice je patrné, že působící síla může vézt k *přímému* ohřevu plynu pouze v případě, pokud závisí na rychlosti. Naopak, vnější síla, která na rychlosti nezávisí nemůže *přímo* ohřívat plyn, ale pouze koná práci.

Nakonec si povšimneme ekvivalence rovnic získaných různými skupinami multiplikátorů Q (pro jednoduchost jen v případě platnosti zjednodušujících předpokladů (1.27a,1.27b)). Rovnice kontinuity (1.24a,1.29) a pohybové rovnice (1.24b,1.30) jsou shodné. Aby bylo možné porovnat také energiové rovnice, je nutné v (1.34) rozdělit derivaci podílu a užít rovnice kontinuity (1.29),

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) = \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}p_s\right) - \frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\rho_s = \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}p_s\right) + \frac{3}{2}p_s\frac{\partial v_{si}}{\partial x_i},$$

což je již možné přímo porovnat s (1.26).

1.2 Srážkové členy pro případ Coulombovských srážek

V předchozích kapitolách jsme se zabývali pouze levou stranou Boltzmannovy kinetické rovnice. Získané rovnice pak odpovídají případu, kdy jsou srážky mezi jednotlivými složkami plynu zanedbatelné. Ve většině případů však toto zjednodušení možné není, proto je nutné do momentových rovnic (1.24) doplnit vztahy odpovídající srážkám mezi částicemi.

V prostředí hvězdného větru horkých hvězd se velká většina částic nachází v ionizovaném stavu. Protože jsou navíc srážky mezi nenabitými částicemi podstatně méně účinnější než srážky mezi nabitými částicemi (Braginskij 1963), budeme uvažovat pouze srážky mezi nabitými částicemi.

1.2.1 Srážkový člen v Boltzmannově rovnici

Nyní obrátíme svou pozornost na výpočet srážkových členů v jednotlivých momentových rovnicích. Budeme předpokládat, že jednotlivé částice lze považovat za bodové, a že síla, kterou na sebe působí, je sféricky symetrická. Budeme uvažovat pouze konzervativní silové pole, které působí pouze na krátké vzdálenosti a které pro velké vzdálenosti dostatečně rychle klesá. Všechny srážky budou elastické, dochází během nich k přerozdělení momentu hybnosti a kinetické energie srážejících se částic bez jakýchkoliv ztrát. Za těchto předpokladů je srážkový člen na pravé straně Boltzmannovy rovnice (1.1) dán integrálem

$$\left(\frac{\mathrm{d}F_s}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{coll}} = \sum_t \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t \left(F_s' F_t' - F_s F_t\right) g b \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\epsilon_1. \tag{1.35}$$

Jednotlivé členy sumy odpovídají srážkám mezi částicemi typů s a t, sumace přes t prochází všechny částice. Funkce F_s a F_t označují distribuční funkce jednotlivých částic před srážkou se složkami rychlosti ξ_{sh}, ξ_{th}. Čárkované veličiny (jako jsou například F_s' a F_t') značí hodnotu zmiňovaných veličin po srážce. Jednotlivé komponenty rychlostí po srážce, ξ_{sh}' a ξ_{th}', lze spočítat pomocí komponent rychlosti před srážkou ξ_{sh}, ξ_{th} se znalostí původního pohybu částice t popisovaného ze souřadné soustavy spojené s částicí s. Pro tento popis je vhodné použít jednak srážkovou vzdálenost b, která označuje nejkratší vzdálenost, na kterou by se mohly přiblížit částice t a s, pokud by na sebe silově nepůsobily. Směr vektoru $\boldsymbol{b}$ je kolmý na původní relativní rychlost

$$\boldsymbol{g} = \boldsymbol{\xi}_t - \boldsymbol{\xi}_s \tag{1.36}$$

a jeho prostorová orientace je dána úhlem ϵ_1 měřeným okolo směru vektoru relativní rychlosti $\boldsymbol{g}$. V integrandu (1.35) probíhá úhel ϵ_1 mezi 0 a 2π, velikost relativní rychlosti $\boldsymbol{g}$ probíhá všechny možné hodnoty od 0 do ∞.

Jednotlivé momenty pravé strany Boltzmannovy rovnice lze získat vynásobením integrandu (1.35) příslušnými funkcemi Q, definovanými vzorci (1.15a–1.15c) přes rychlostní prostor částic s. Protože integrand neobsahuje derivace distribučních funkcí, je možné přejít k integraci přes prostor tepelných rychlostí $\boldsymbol{c}_s$, $\boldsymbol{c}_t$. Na pravé straně momentových rovnic obdržíme

$$\Delta Q \equiv \sum_t \iiiint \mathrm{d}\boldsymbol{c}_s\, d\boldsymbol{c}_t Q(c_s) \left(F_s' F_t' - F_s F_t \right) gb \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\epsilon_1. \tag{1.37}$$

Tento vzorec lze přepsat jako

$$\Delta Q \equiv \sum_t \iiiint \mathrm{d}\boldsymbol{c}_s \,\mathrm{d}\boldsymbol{c}_t \left(Q' - Q \right) F_s F_t \, gb \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\epsilon_1, \tag{1.38}$$

kde $Q'(c_s) \equiv Q(c_s')$. Protože na hodnotách b a ϵ_1 závisí pouze Q', je možné předešlý vztah zjednodušit na tvar

$$\Delta Q \equiv \sum_t \iint \mathrm{d}\boldsymbol{c}_s \,\mathrm{d}\boldsymbol{c}_t F_s F_t g \iint \left(Q' - Q \right) \,\mathrm{d}b \,\mathrm{d}\epsilon_1. \tag{1.39}$$

1.2.2 Momentové rovnice s Fokkerovým-Planckovým srážkovým členem

Je možné předpokládat, že většina srážek vede pouze k malým změnám rychlosti dané testovací částice a že by mělo být možné sečíst všechny tyto malé změny a vyjádřit jejich efekt na distribuční funkci rychlostí. Na tomto předpokladu je založeno odvození Fokkerovy-Planckovy rovnice (viz. dodatek A.5).

Aby bylo možné vypočítat srážkové členy pro momentové rovnice získané v kapitole 1.1.3, je nutné integrovat Fokkerovu-Planckovu rovnici vynásobenou různými multiplikátory přes prostor rychlostí. Podrobné odvození srážkových členů je uvedeno v dodatku A.

Rovnice kontinuity (1.16) se zavedením Fokkerova-Planckova srážkového členu zůstává nezměněna,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(N_s m_s \right) + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(N_s m_s v_{sk} \right) = 0. \tag{1.40}$$

To má jasný fyzikální smysl, protože rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmoty a při uvažovaných elastických srážkách žádné částice nevznikají ani nezanikají.

V pohybové rovnici (1.19) se objeví nový člen, pokud budeme předpokládat, že působící síla nezávisí na rychlosti srážejících se částic, pak (viz (A.79))

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} v_{sh} + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - \frac{\rho_s}{m_s} f_{sh} = \sum_{t \neq s} \frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu \alpha^3} \ln \Lambda \, u_h \left[\frac{\alpha^3}{u^3} \mathrm{erf} \frac{\mathrm{u}}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\alpha^2}{\mathrm{u}^2} \exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2} \right) \right]. \quad (1.41)$$

V této rovnici značí e_s, e_t náboje jednotlivých složek, $\ln \Lambda$ je Coulombův logaritmus, definovaný vztahem (A.59), rozdíl rychlostí složek $\boldsymbol{u}$, střední tepelná rychlost α a redukovaná hmotnost μ jsou dány vztahy

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}_s, \quad (1.42a)$$

$$\alpha^2 = \frac{2k\,(m_t T_s + m_s T_t)}{m_s m_t}, \quad (1.42b)$$

$$\mu = \frac{m_s m_t}{m_s + m_t}. \quad (1.42c)$$

Vidíme, že pokud je vzájemná rychlost dvou složek plynu nulová, pak je nulový také příspěvek srážkového členu v pohybové rovnici. Protože pohybovou rovnici je možné chápat také jako rovnici kontinuity hybnosti, vyjadřuje srážkový člen přenos hybnosti mezi jednotlivými složkami. Tomu odpovídá i znaménko tohoto členu. Pokud je rychlost částice t větší než rychlost částice s je člen v rovnici kladný, tedy hybnost se přenáší od částice rychlejší k částici pomalejší. Jak bude ještě ukázáno v dalších kapitolách, tento člen umožňuje oddělení jednotlivých složek plynu.

V energiové rovnici (1.34) se též objeví nové členy, které mají podle (A.91) tvar

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} \left(\frac{3}{2} \frac{p_s}{\rho_s} \right) + p_s \frac{\partial v_{sh}}{\partial x_h} = \sum_{t \neq s} \frac{16\sqrt{\pi} N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu \alpha^3} \ln \Lambda \frac{k\,(T_t - T_s)}{m_0} \exp\left(-\frac{u^2}{\alpha^2} \right) +$$
$$+ \sum_{t \neq s} \frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu \alpha} \ln \Lambda \, \frac{m_t}{m_0} \left[\frac{\alpha}{u} \mathrm{erf} \frac{\mathrm{u}}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2} \right) \right], \quad (1.43)$$

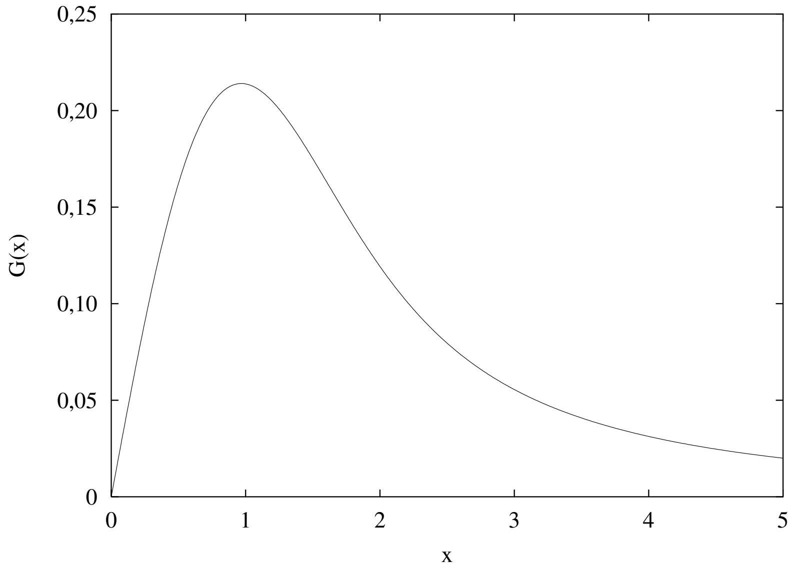
ve které označuje m_0 součet hmotností srážejících se částic, $m_0 = m_s + m_t$. První člen v rovnici (1.43) je nulový v případě, že teploty obou složek jsou shodné ($T_t = T_s$). Zřejmě tedy vyjadřuje přenos tepla mezi jednotlivými složkami. Naopak druhý člen v rovnici (1.43) je nenulový i v případě rovnosti teplot uvažovaných složek a je nulový jen pokud vzájemná rychlost složek $\boldsymbol{u}$ je nulová. Navíc tento člen závisí na druhé mocnině rychlosti u a je vždy kladný. Z makroskopického hlediska vyjadřuje ohřev látky třením. Zajímavá je též závislost na poměru m_t/m_0. Ze vzorce vyplývá, že pokud má jedna z částic podstatně menší hmotnost než druhá (například elektron vzhledem k atomovému jádru), pak získává většinu tepla tření.

1.2.3 Možnost oddělení jednotlivých složek plynu

Člen popisující srážky v pohybové rovnici (1.41) je úměrný funkci rozdílu rychlostí složek. Abychom mohli tuto funkční závislost lépe studovat, zavedeme tzv. *Chandrasekharovu funkci* tvarem

$$G(x) = \frac{1}{2x^2} \left(\mathrm{erf}\,(\mathrm{x}) - \frac{2\mathrm{x}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\mathrm{x}^2\right) \right). \quad (1.44)$$

Srážkový člen je pak úměrný $G(u/\alpha)$. Průběh Chandrasekharovy funkce je nakreslen na obr. 1.1. Pro malé hodnoty parametru x je $G(x) \sim x$. To fyzikálně odpovídá Stokesovu zákonu, podle kterého je tření přímo úměrné rozdílu rychlostí. Pro velké rozdíly rychlostí (srovnatelné s tepelnou rychlostí částic) však již není tření přímo úměrné rychlosti částic. Pro $x \approx 1$ dosahuje tření svého maxima a pro ještě větší rozdíl rychlostí naopak klesá.



Obrázek 1.1: Průběh Chandrasekharovy funkce

Pokles třecí síly s rychlostí umožňuje dynamické oddělení složek plynu („runaway“ efekt). Tento jev byl studován Dreicerem (1959, 1960) a byl též pozorován experimentálně.

Porovnáme-li člen odpovídající třecí síle a člen odpovídající ohřevu třením, pak je zřejmé, že ohřev je úměrný skalárnímu součinu třecí síly a rozdílu rychlostí složek. Pokud je tedy rozdíl rychlostí složek malý, pak je také ohřev složek třením zanedbatelný. Naopak, ohřev třením je nezanedbatelný, pokud dochází k oddělování složek, kdy je rozdíl rychlostí složek srovnatelný s tepelnou rychlostí α (1.42b).

1.3 Úpravy hydrodynamických rovnic

1.3.1 Vektorový tvar rovnic

Pro přepis hydrodynamických rovnic do jiné než kartézské souřadné soustavy je výhodné přepsat hydrodynamické rovnice (1.16, 1.41, 1.43) ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \nabla\left(\rho_s \boldsymbol{v}_s\right) = 0, \tag{1.45a}$$

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\boldsymbol{v}_s + \nabla p_s - \frac{\rho_s}{m_s}\boldsymbol{f}_s = \sum_{t\neq s} K_{st} G\left(\frac{u_{st}}{\alpha_{st}}\right)\frac{\boldsymbol{u}_{st}}{u_{st}}, \tag{1.45b}$$

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + p_s \nabla \boldsymbol{v}_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{t\neq s} K_{st}\frac{2k\left(T_t - T_s\right)}{m_s + m_t}\frac{\exp\left(-\frac{u_{st}^2}{\alpha_{st}^2}\right)}{\alpha_{st}} + \\ + \sum_{t\neq s}\frac{m_t}{m_s + m_t} K_{st} G\left(\frac{u_{st}}{\alpha_{st}}\right) u_{st}. \tag{1.45c}$$

Přitom ale rychlost $\boldsymbol{v}_s$ a síla $\boldsymbol{f}_s$ jsou vektory a operátor $\mathrm{D}_s/\mathrm{D}t$ derivace podle času v soustavě pohybující se s plynem s-částic je oproti (1.25) zaveden jako

$$\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}_s \nabla. \tag{1.46}$$

Nově uvedená konstanta tření má tvar

$$K_{st} = N_s N_t \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{kT_{st}} \ln \Lambda, \tag{1.47a}$$

$$T_{st} = \frac{m_t T_s + m_s T_t}{m_s + m_t}. \tag{1.47b}$$

1.3.2 Sféricky symetrické rovnice

Za předpokladu sférické symetrie je jedině radiální složka vektoru rychlosti $v_{r,s}$ nenulová, podobně jediná nenulová složka vektoru síly je radiální složka $f_{r,s}$, přičemž jak rychlost, tak síla závisejí pouze na poloměru a na času. Za těchto předpokladů se hydrodynamické rovnice (1.45a, 1.45b, 1.45) zjednodušují na

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho_s v_{r,s}\right) = 0, \tag{1.48a}$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{r,s}\frac{\partial}{\partial r}\right) v_{r,s} + \frac{\partial p_s}{\partial r} - \frac{\rho_s}{m_s} f_{r,s} = \sum_{t\neq s} K_{st} G\left(\frac{u_{st}}{\alpha_{st}}\right)\frac{u_{r,st}}{u_{st}}, \tag{1.48b}$$

$$\rho_s \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_{r,s}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + p_s \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 v_{r,s}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{t\neq s} K_{st} \frac{2k\left(T_t - T_s\right)}{m_s + m_t} \frac{\exp\left(-\frac{u_{st}^2}{\alpha_{st}^2}\right)}{\alpha_{st}} + {}$$
$$+ \sum_{t\neq s} \frac{m_t}{m_s + m_t} K_{st} G\left(\frac{u_{st}}{\alpha_{st}}\right) u_{st}. \tag{1.48c}$$

Zatímco ve vzorcích $u_{r,st}$ značí radiální komponentu vektoru, u_{st} je jeho velikost.

1.3.3 Rovnice pro jednosložkový plyn

Pokud odhlédneme od vícesložkové struktury plynu, pak je možné ukázat, že výše uvedené rovnice (1.45) je možné přepsat ve tvaru rovnic pro jednosložkové proměnné (Krall a Trivelpiece 1973). Pokud zanedbáme ohřev třením, pak tyto rovnice mají vektorový tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\left(\rho \boldsymbol{v}\right) = 0, \tag{1.49a}$$

$$\rho \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \rho\left(\boldsymbol{v}\nabla\right)\boldsymbol{v} + \nabla p - \frac{\rho}{m}\boldsymbol{f} = 0, \tag{1.49b}$$

$$\frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{3}{2}\left(\boldsymbol{v}\nabla\right)\left(\frac{p}{\rho}\right) + p\nabla\boldsymbol{v} = 0, \tag{1.49c}$$

kde rychlost těžiště $\boldsymbol{v}$ a celkový tlak p jsou dány vztahy

$$\boldsymbol{v} = \frac{\sum_s \rho_s \boldsymbol{v}_s}{\sum_s \rho_s}, \tag{1.50}$$

$$p = \sum_s p_s. \tag{1.51}$$

Kapitola 2

Základy teorie záření

2.1 Veličiny popisující záření

Při odvozování vztahů popisujících záření a jeho interakci s látkou budu vycházet z knihy Mihalase (1978).

Intenzita záření $I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ v astrofyzice udává množství energie $\mathrm{d}\mathcal{E}$, prošlé jednotkovou plochou $\mathrm{d}S$ v bodě $\boldsymbol{r}$ ve směru $\boldsymbol{n}$ do prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ v intervalu frekvencí $(\nu,\nu+\mathrm{d}\nu)$ v čase t za čas $\mathrm{d}t$. Tedy

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}S\,cos\theta\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t, \tag{2.1}$$

kde θ je úhel mezi směrem $\boldsymbol{n}$ a normálou k ploše $\mathrm{d}S$.

Místo intenzity záření je možné pole záření popsat pomocí rozdělovací funkce fotonů f_R. Ta je definována tak, že $f_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu$ je počet fotonů v jednotce objemu v bodě $\boldsymbol{r}$ a v čase t, které mají frekvence v intervalu $(\nu,\nu+\mathrm{d}\nu)$ a vektor rychlosti směřující do prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ okolo směru $\boldsymbol{n}$. Protože každý z těchto fotonů má energii $h\nu$ a počet fotonů procházejících za čas dt elementem plochy $\mathrm{d}S$ je roven $f_R\,(c\,\mathrm{d}t)\,(\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{S})\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu$, lze celkovou energii těchto fotonů vyjádřit jako

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = ch\nu f_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}S\,cos\theta\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

Porovnáním s definičním vztahem pro intenzitu záření (2.1) získáváme důležitý vztah mezi hustotou fotonů a intenzitou záření

$$I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) = ch\nu f_R(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t). \tag{2.3}$$

Střední intenzita záření $J(\boldsymbol{r},\nu,t)$ (nultý moment intenzity) se zavádí vztahem

$$J(\boldsymbol{r},\nu,t) \equiv \frac{1}{4\pi}\oint I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.4}$$

Je možné ukázat, že střední intenzita záření souvisí s hustotou zářivé energie. Využijeme-li definici intenzity záření (2.1) a vyjádříme-li elementární objem jako $\mathrm{d}V = c\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}S\,\cos\theta$, pak hustota energie přicházející z elementu prostorového úhlu $\mathrm{d}\omega$ v intervalu frekvencí o šířce $\mathrm{d}\nu$ je rovna

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = \frac{1}{c}I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}V.$$

Z toho je tedy zřejmé, že *hustotu zářivé energie* je možné vypočítat jako

$$E_R(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \oint \mathrm{d}\omega I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) = \frac{4\pi}{c}\int_0^\infty J(\boldsymbol{r},\nu,t)\mathrm{d}\nu. \tag{2.5}$$

Dále zavedeme *tok záření* $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\nu,t)$ tak, aby veličina $\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ vyjadřovala množství energie, protékající ploškou $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ za jednotku času v jednotkovém intervalu frekvencí. Tento požadavek splňuje veličina

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\nu,t) \equiv \oint I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.6}$$

Vidíme, že tok záření je prvním momentem intenzity záření. Při výpočtech je též důležitý integrál vektoru toku záření přes frekvence,

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) \equiv \int_0^\infty \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\nu,t)\,\mathrm{d}\nu. \tag{2.7}$$

Dosadíme-li do této definice namísto intenzity záření hustotu fotonů podle (2.3) a uvědomíme-li si, že vztah $h\nu\boldsymbol{n}/c$ vyjadřuje hybnost fotonu, tak vidíme, že podíl $\boldsymbol{F}/c^2$ je hustota hybnosti, svázaná s polem záření.

Poslední moment intenzity záření, který budeme využívat, je druhý moment, daný vztahem

$$P_{ij}(\boldsymbol{r},\nu,t) \equiv \frac{1}{c}\oint I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\;n_i n_j\,\mathrm{d}\omega. \tag{2.8}$$

Abychom zjistili jeho fyzikální význam, využijeme popisu záření pomocí hustoty fotonů (2.3) a zapíšeme definici (2.8) jako

$$P_{ij}(\boldsymbol{r},\nu,t) = \oint \left(f_R\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t\right)cn_i\right)\left(\frac{h\nu n_j}{c}\right)\mathrm{d}\omega.$$

Je patrné, že vzorec udává tok impulzu záření o frekvenci ν za jednotku času ve směru osy j, která prochází jednotkovou ploškou kolmou na osu i. Vidíme tedy, že P_{ij} odpovídá jednotlivým komponentám *tenzoru tlaku záření* P.

2.2 Rovnice přenosu záření

Během průchodu fotonů hvězdnou atmosférou dochází k jejich pohlcování a opětovnému vyzařování, případně k jejich rozptylu. Tyto procesy se jako celek označují jako přenos záření. Je rozumné procesy vedoucí k pohlcování záření a procesy vedoucí k emisi záření popisovat odděleně. Proto se zavádí *absorpční koeficient* $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$ a *emisní koeficient* $\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$. Budeme sledovat elementární objem, omezený plochou $\mathrm{d}S$ a tloušťkou $\mathrm{d}s$. Část energie $\delta\mathcal{E}$ pohlcené tímto elementem za čas $\mathrm{d}t$ ze záření o intenzitě $I(z,n,\nu)$ v intervalu frekvencí $\mathrm{d}\nu$, dopadajícího ve směru normály k $\mathrm{d}S$ v elementu tělesného úhlu $\mathrm{d}\omega$ je rovna

$$\delta\mathcal{E} = \chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t. \tag{2.9}$$

Dále tento element vyzařuje energii $\delta\mathcal{E}$ v intervalu frekvencí $\mathrm{d}\nu$ do tělesného úhlu $\mathrm{d}\omega$ ve směru $\boldsymbol{n}$ za čas $\mathrm{d}t$, pro kterou platí:

$$\delta\mathcal{E} = \eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\omega\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}t. \tag{2.10}$$

Při popisu pohlcování záření látkou se obvykle rozděluje absorpční koeficient na dva členy. Zavádí se absorpční koeficient $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ pro „pravou absorpci“, při které dochází k pohlcování jednotlivých fotonů a na koeficient $\sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ popisující rozptyl. Přitom platí vztah

$$\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) = k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) + \sigma(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t). \tag{2.11}$$

V případě nepohyblivé atmosféry je často koeficient $k(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ izotropní. Naopak, v pohybujícím se prostředí absorpční koeficient díky Dopplerovu jevu závisí na velikosti projekce vektoru rychlosti látky ve směru pozorovatele, ztrácí tedy svoji izotropii. Podobně, emisní koeficient způsobený tepelným zářením je v nepohyblivých prostředích izotropní. Příspěvek zapřičiněný rozptylem však není izotropní ani ve statickém prostředí.

Rovnice přenosu záření je analogií Boltzmannovy rovnice (1.1) pro případ fotonového plynu. V nerelativistickém případě má obecný tvar

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\right) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)=\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)-\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t). \tag{2.12}$$

Označíme-li *zdrojovou funkci* $S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ jako podíl koeficientu emise a absorpce

$$S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)=\frac{\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)}{\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)}, \tag{2.13}$$

pak je možné rovnici přenosu záření přepsat též jako

$$\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{n}\cdot\nabla\right) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)=-\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\left[I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)-S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\right]. \tag{2.14}$$

2.3 Momentové rovnice

Podobně jako byly v předešlé kapitole odvozovány hydrodynamické rovnice z Boltzmannovy kinetické rovnice, je obdobným způsobem možné odvozovat momentové rovnice též z rovnice přenosu záření (2.12). Zatímco však jsme v kapitole 1. integrovali Boltzmannovu rovnici přes prostor rychlostí, budeme nyní integrovat rovnici přenosu záření přes prostorové úhly.

2.3.1 Energiová rovnice

Integrací rovnice přenosu záření (2.12) přes všechny prostorové úhly získáme s využitím definic střední intenzity (2.4) a toku záření (2.6) momentovou rovnici nultého řádu ve tvaru

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial J(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},t)=\oint\left[\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)-\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\right]\mathrm{d}\omega. \tag{2.15}$$

Pokud navíc předchozí momentovou rovnici integrujeme přes všechny frekvence fotonů, získáváme *energiovou rovnici* pro pole záření

$$\frac{\partial E_R(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=\int_0^\infty\mathrm{d}\nu\oint\mathrm{d}\omega\left[\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)-\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\right]. \tag{2.16}$$

Uvědomíme-li si význam veličin, které jsou v této rovnici použity, především hustoty záření (2.5) a toku záření (2.7), vidíme, že tato rovnice má jasný fyzikální smysl. Změna hustoty zářivé energie v čase je rovna celkové energii, vyzářené látkou minus celková energie látkou pohlcená a minus tok energie z elementárního objemu. Pokud se látka v dané souřadné soustavě nepohybuje a emisní a absorpční koeficienty jsou izotropní, pak lze předchozí vztah zjednodušit,

$$\frac{\partial E_R(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)=4\pi\int_0^\infty\left[\eta(\boldsymbol{r},\nu,t)-\chi(\boldsymbol{r},\nu,t)J(\boldsymbol{r},\nu,t)\right]\mathrm{d}\nu. \tag{2.17}$$

Integrální výraz (s opačným znaménkem) vyjadřuje celkové zářivé ochlazování a ohřev látky. V případě pohybujícího se prostředí tento vzorec již neplatí. Je však možné ukázat, že pokud je integrál spočten v soustavě pohybující se s prostředím, pak lze tuto hodnotu použít též v soustavě spojené s pozorovatelem. Přitom se dopouštíme chyby řádu v/c. V nerelativistickém přiblížení tedy vzorec (2.17) poskytuje uspokojivý popis zářivého ochlazování a oteplování. Vidíme, že energie získaná látkou od záření je dána vzorcem

$$Q^{\mathrm{rad}} = 4\pi \int_0^\infty \left[\chi_0(\boldsymbol{r},\nu,t) J_0(\boldsymbol{r},\nu,t) - \eta_0(\boldsymbol{r},\nu,t)\right] \mathrm{d}\nu. \tag{2.18}$$

Index 0 značí, že veličiny jsou vyjádřeny v soustavě spojené s pohybujícím se prostředím.

2.3.2 Rovnice hybnosti

Vynásobením rovnice přenosu záření (2.12) vektorem $\boldsymbol{n}/c$ a její integrací přes prostorové úhly je možné získat momentovou rovnici prvního řádu, která má s užitím označení pro tok záření (2.6) a tenzor tlaku (2.8) vyjádření

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},\nu,t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathsf{P}(\boldsymbol{r},\nu,t) = \frac{1}{c}\oint \left[\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) - \chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\right] \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\omega. \tag{2.19}$$

Tuto rovnici lze opět integrovat přes frekvence a získat tak rovnici pro hybnost záření,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathsf{P}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \oint \mathrm{d}\omega \left[\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) - \chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\right] \boldsymbol{n}, \tag{2.20}$$

která má zásadní význam pro popis zářením urychlovaného hvězdného větru. Povšimneme si tedy jejího fyzikálního smyslu. Podle kapitoly 2.1 vidíme, že rychlost změny hustoty celkového impulsu záření je rovna záporně vzaté síle, kterou záření působí na látku a členu popisujícímu zisk (nebo ztrátu) hybnosti v důsledku interakce s látkou. Pokud se v dané soustavě látka nepohybuje a emisní koeficient $\eta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)$ je izotropní, pak při integraci přes úhly vypadává a získáváme vztah

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \nabla\cdot\mathsf{P}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \chi(\boldsymbol{r},\nu,t) \oint \mathrm{d}\omega I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\boldsymbol{n}. \tag{2.21}$$

Záporně vzatý integrální výraz je celková síla, kterou záření působí na látku. Podobně jako v případě energiové rovnice lze ukázat, že tento výraz je možné použít (s chybou řádu v/c) též pro pohybující se prostředí, pokud je integrál spočten v soustavě pohybující se s prostředím. Sílu záření lze tedy zapsat jako

$$f^{\mathrm{rad}} = \frac{1}{c}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu \chi_0(\boldsymbol{r},\nu,t) \oint \mathrm{d}\omega I_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\boldsymbol{n}. \tag{2.22}$$

2.4 Záření za předpokladu sférické symetrie

V případě sférické symetrie se uvedené vzorce podstatně zjednodušují. Intenzita záření již nezávisí na všech složkách polohového vektoru $\boldsymbol{r}$, ale pouze na jeho radiální složce r. Obdobně také nezávisí na všech složkách normálového vektoru $\boldsymbol{n}$, ale pouze na úhlu θ mezi jednotkovým vektorem v radiálním směru a vektorem $\boldsymbol{n}$. Výpočet střední intenzity se zjednodušuje na

$$J(r,\nu,t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I(r,\mu,\nu,t)\, \mathrm{d}\mu. \tag{2.23}$$

Zde je zavedena, jak je v astrofyzice běžným zvykem, proměnná μ vztahem $\mu = \cos\theta$. Pokud sledujeme záření hvězdy o poloměru R_* procházející průhledným prostředím, pak při výpočtu střední intenzity (2.23) není nutné integrovat přes všechny úhly μ ale pouze od úhlu μ_c, pod kterým vidíme poloměr hvězdy

$$\mu_c = \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2}. \tag{2.24}$$

Vzorec (2.23) je tedy možné přepsat jako

$$J(r,\nu,t) = \frac{1}{2}\int_{\mu_c}^{1} I(r,\mu,\nu,t)\,\mathrm{d}\mu. \tag{2.25}$$

V případě, že zanedbáme okrajové ztemnění, pak s užitím vlastností intenzity záření je možné předchozí vzorec přepsat jako

$$J(r,\nu,t) = WI(R_*,\nu,t), \tag{2.26}$$

kde koeficient zředění W popisuje oslabení záření vlivem vzdálenosti od zdroje

$$W = \frac{1}{2}\left\{1 - \left[1 - \left(\frac{R_*}{r}\right)^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{2.27}$$

V případě sféricky symetrického prostředí je nenulová pouze radiální složka vektoru toku záření (2.6),

$$F(r,\nu,t) \equiv F_r(r,\nu,t) = 2\pi\int_{-1}^{1} I(r,\mu,\nu,t)\mu\mathrm{d}\mu. \tag{2.28}$$

Pokud mezi povrchem hvězdy a daným místem nedochází k absorpci nebo emisi záření a pokud zanedbáme okrajové ztemnění, pak lze předchozí vzorec zjednodušit na

$$F(r,\nu,t) = 2\pi\int_{\mu_c}^{1} I(r,\mu,\nu,t)\mu\mathrm{d}\mu = \pi\left(\frac{R_*}{r}\right)^2 I(R_*,\nu,t). \tag{2.29}$$

Vidíme, že součin $r^2F(r,\nu,t)$ zůstává konstantní, je tedy výhodné zavést luminositu hvězdy pomocí toku záření (2.7) jako

$$L \equiv 4\pi r^2 F(r)\,. \tag{2.30}$$

Kapitola 3

Teorie hvězdného větru hnaného zářením

3.1 Sobolevova aproximace

Viděli jsme, že pro výpočet síly záření (2.22) je nutné získat nejdříve intenzitu záření řešením rovnice přenosu záření (2.12). To přináší vážný problém pro řešení hydrodynamických rovnic. Zatímco hydrodynamické rovnice udávají vztahy mezi lokálními veličinami (a popřípadě jejich derivacemi), záření vnáší do hydrodynamických rovnic nelokální interakci. Bylo by proto vhodné získat takový aproximativní vztah pro sílu záření, který by obsahoval pouze lokální veličiny. V obecném případě to možné není, ukazuje se však, že pro případ velkých gradientů rychlostí je možné výpočet zářivé síly podstatně zjednodušit.

Tuto vlastnost rovnice přenosu záření nejdříve ukážeme na jejím řešení v případě dvouhladinového atomu. Obecný vztah pro sílu záření v zářením urychlovaném větru pak získáme sečtením příspěvku od všech čar, které k urychlování přispívají.

3.1.1 Přesné řešení rovnice přenosu

Jako první krok při výpočtu zářivé síly získáme přesné řešení rovnice přenosu pro případ dvouhladinového atomu bez kontinua (Rybicki a Hummer 1978). Rovnici přenosu (2.14) v třírozměrném, stacionárním a pohybujícím se prostředí je možné zapsat jako

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = -\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\left[I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) - S(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\right]. \tag{3.1}$$

Pokud střed čáry uvažovaného dvouhladinového atomu má frekvenci ν_0, pak absorpční koeficient atomu $\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$ je dán vztahem

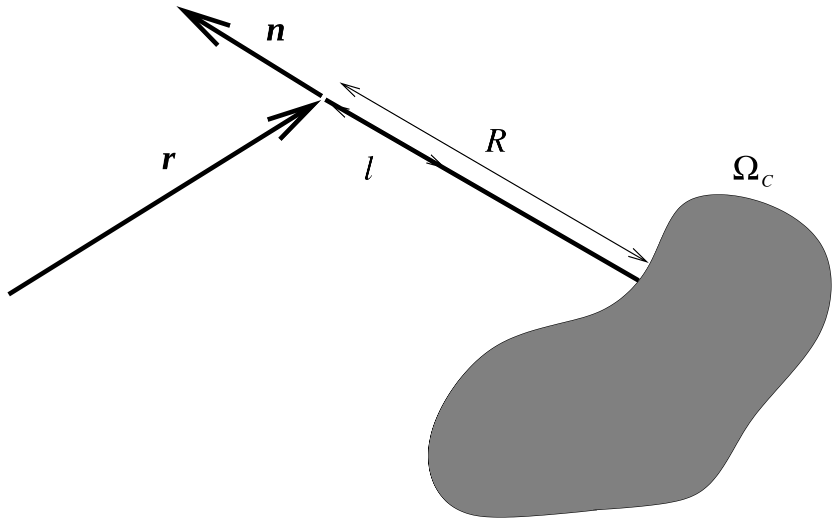
$$\chi(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = \kappa(\boldsymbol{r})\rho(\boldsymbol{r})\,\phi\Big(\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\Big), \tag{3.2}$$

kde $\kappa(\boldsymbol{r})$ v sobě zahrnuje atomární konstanty a obsazení atomárních hladin a je funkcí pouze polohy, $\rho(\boldsymbol{r})$ je hustota látky, $\phi(\nu)$ je profil čáry v klidové soustavě normalizovaný na Dopplerovskou pološířku čáry $\Delta\nu_{\mathrm{D}}$

$$\int_0^\infty \phi(\nu)\mathrm{d}\nu = \Delta\nu_{\mathrm{D}} \tag{3.3}$$

a $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ je makroskopické rychlostní pole. Dopplerovská pološířka je zavedena pomocí střední tepelné rychlosti v_{th} (1.14)

$$\Delta\nu_{\mathrm{D}} = \nu_0\frac{v_{\mathrm{th}}}{c}, \tag{3.4}$$



Obrázek 3.1: Geometrie proměnných pro řešení rovnice přenosu

kde ν_0 označuje střed čáry v soustavě pohybující se s prostředím. Při výpočtu zanedbáváme absorpci v kontinuu (příslušná zobecnění viz. Hummer a Rybicki 1985, Puls a Hummer 1988). Za předpokladu úplné redistribuce v čáře má zdrojová funkce atomu bez kontinua tvar

$$S(\boldsymbol{r}) = [1 - \epsilon(\boldsymbol{r})]\, \bar{J}(\boldsymbol{r}) + \epsilon(\boldsymbol{r}) B(\boldsymbol{r}), \tag{3.5}$$

kde ϵ je podíl tepelných procesů na záření v čáře, $1-\epsilon$ je podíl rozptylu, B je Planckova funkce (v dané frekvenci ν_0 a v daném bodě $\boldsymbol{r}$) a integrovaná střední intenzita je definována jako

$$\bar{J}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\Delta\nu_{\mathrm{D}}} \oint \mathrm{d}\omega \int_0^\infty \phi\left(\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\right) I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\mathrm{d}\nu. \tag{3.6}$$

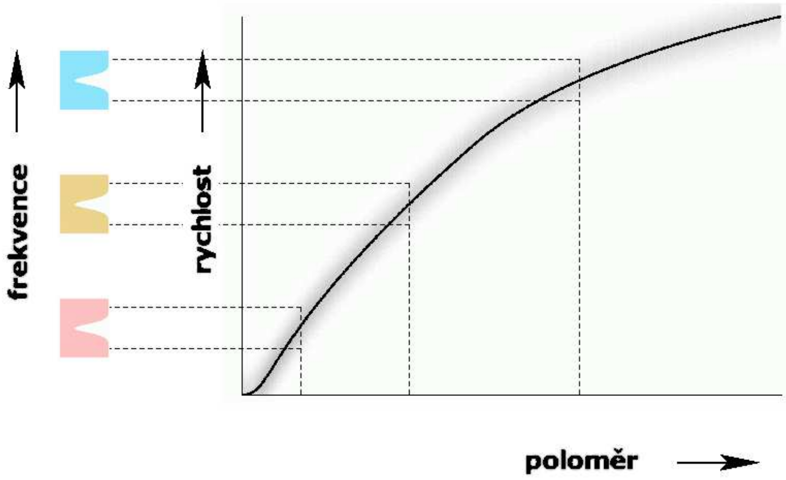
Je možné získat explicitní řešení rovnice rovnice (3.1). Přitom je nutné znát hraniční hodnotu I_ν^{inc}, jež má fyzikální význam dopadajícího záření. Vybereme-li si v daném bodě $\boldsymbol{r}$ paprsek ve směru $\boldsymbol{n}$, pak řešení rovnice přenosu má tvar

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = \int_0^R \mathrm{d}l\, \kappa(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l)\, \rho(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l)\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l)\Big]\, S(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l) \times \\ \times \exp\left\{-\int_0^l \mathrm{d}l'\, \kappa\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l'\big)\, \rho\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l'\big)\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{l'})\Big]\right\} + \\ + I_\nu^{\mathrm{inc}} \exp\left\{-\int_0^R \mathrm{d}l'\, \kappa\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l'\big)\, \rho\big(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l'\big)\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}\boldsymbol{l'})\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Integrační proměnná l je vzdálenost na paprsku, který je dán směrem $\boldsymbol{n}$ (viz. obr. 3.1). Integrační mez R je vzdálenost, ve které je dána hraniční podmínka pro diferenciální rovnici (obvykle se jedná o povrch hvězdy, případně pro některé paprsky $R \to \infty$).

3.1.2 Fyzikální podstata Sobolevovy aproximace

Pro obecné rychlostní pole $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ je výpočet intenzity $I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)$ poměrně složitý. Pokud má ovšem rychlostní pole velký gradient, pak se chování výrazu (3.7) podstatně zjednodušuje. Profil ϕ se začíná chovat jako δ-funkce proměnné l (nebo l'), protože atomy absorbují záření jenom v těch místech, ve kterých jim Dopplerovský posun čáry umožňuje absorbovat záření s danou frekvencí ν. Přesněji



Obrázek 3.2: Sobolevova aproximace ve hvězdném větru

vyjádřeno, v daném bodě dochází k absorpci (emisi) záření, pokud je argument ϕ roven ν_0, tedy pro projekci rychlosti $v_l \equiv \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}$ platí

$$v_l = \frac{c}{\nu_0}\left(\nu - \nu_0\right). \tag{3.8}$$

Díky tomu intenzita podél paprsku zůstává konstantní, s výjimkou bodů, ve kterých mají atomy takový Dopplerovský posun, který jim dovoluje absorbovat právě na frekvenci ν. Tímto způsobem se úloha určení intenzity omezuje na okolí bodů (nazývaných rezonanční body), ve kterých je splněna rovnost (3.8). Tento přístup je podstatou *Sobolevovy aproximace*.

Jiný pohled na Sobolevovu aproximaci dává obr. (3.2). Na obrázku je nakreslena typická závislost rychlosti na poloměru ve hvězdném větru. Budeme-li ve vztažné soustavě nepohybující se vzhledem ke hvězdě sledovat jednu vybranou čáru, pak při urychlování hvězdného větru dochází k posunu frekvence, na které je daný atom schopen absorbovat (emitovat). Vybereme-li si daný bod, pak šedivá oblast označuje frekvenční rozsah, na kterém daný bod absorbuje. To znamená, že oblast, ve které dochází ke změně intenzity (na dané frekvenci) je omezena šedou oblastí promítnutou do osy poloměrů. Pokud je daná oblast dostatečně úzká, je možné použít zjednodušující Sobolevovu aproximaci. Přesněji (Owocki 1994), pokud je pološířka daného profilu $\Delta\nu_\mathrm{D}$ dána teplotním rozšířením (3.4), pak charakteristická délka na ose x, na které dochází ke změně intenzity, je dána tzv. *Sobolevovou délkou*

$$L_\mathrm{S} \equiv \frac{v_\mathrm{th}}{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)}.$$

Aby bylo možné použít Sobolevovu aproximaci, pak musí být charakteristická délka, na které se mění parametry větru, podstatně delší než L_S. Vybereme-li konkrétně charakteristickou délku ve větru jako vzdálenost, na které se mění hustota, pak

$$H \equiv \frac{\rho}{\left(\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right)} \approx \frac{v}{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)} \gg \frac{v_\mathrm{th}}{\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)} \equiv L_\mathrm{S}.$$

V uvedeném přiblížení platí, že Sobolevovu aproximaci lze použít v případě, kdy je rychlost větru (v souřadné soustavě spojené s hvězdou) podstatně větší než tepelná rychlost v_th.

Našim cílem je vyřešit v daném bodě rovnici přenosu záření. Tato úloha však může být v obecném případě poněkud složitější. Pro každou frekvenci existuje množina bodů, které mají vhodný Dopplerovský posun k tomu, aby přispívali k intenzitě záření. Vidíme však, že pokud je možné použít

Sobolevovu aproximaci, pak tato množina bodů tvoří plochu v třírozměrném prostoru, nazývanou *rychlostní plocha*. Geometrie této plochy závisí na rychlostním poli $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$. Zvolíme-li v daném bodě libovolný paprsek, pak pro různá rychlostní pole bude mít tento paprsek obecně různý počet průsečíků s rychlostní plochou. Další výklad bude však omezen jen na případ, ve kterém mají všechny paprsky v jednotlivých bodech pouze jeden průsečík s rychlostní plochou. To fyzikálně odpovídá stavu, kdy se látka v okolí hvězdy rozpíná (nebo smršťuje). Teoretické zobecnění pro více průsečíků s rychlostní plochou však není z matematického hlediska složité (viz. Rybicki a Hummer 1978).

3.1.3 Řešení rovnice přenosu v Sobolevově aproximaci

Intenzita záření

Nyní spočteme integrál (3.7) za předpokladu platnosti Sobolevovy aproximace. Díky tomu, že rezonanční oblast je dostatečně úzká, je možné v této oblasti považovat charakteristiky látky (opacitu, hustotu) za konstantní.

Pokud platí Sobolevova aproximace, pak v okolí rezonančního bodu se rychlost příliš nemění. Rozvineme ji tedy do Taylorovy řady a budeme uvažovat pouze první dva členy řady (Rybicki a Hummer 1978),

$$v_i(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l) \approx v_i(\boldsymbol{r}) - \sum_j n_j \frac{\partial v_i(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} l. \tag{3.9}$$

Pak skalární součin $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l)$ lze rozvinout jako

$$\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}l) = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) - Q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\, l, \tag{3.10}$$

kde Q je kvadratická forma

$$Q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \sum_i \sum_j n_i n_j \frac{\partial v_i(\boldsymbol{r})}{\partial r_j} = \sum_i \sum_j n_i n_j \epsilon_{ij} \equiv \frac{\mathrm{d}v_l}{\mathrm{d}l}. \tag{3.11}$$

Při výpočtu Q lze pro různé souřadné soustavy lze využít tabelovaných hodnot symetrického tenzoru napětí

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial r_j} + \frac{\partial v_j}{\partial r_i}\right). \tag{3.12}$$

Dosadíme-li nyní do rovnice (3.7) pak za předpokladu, že se κ, ρ a S v oblasti rezonance podstatně nemění a mohou tedy být vytknuty před integrál,

$$\begin{aligned} I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = \kappa\rho S \int_0^R \mathrm{d}l\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} - Ql\right)\Big] \exp\left\{-\kappa\rho \int_0^l \mathrm{d}l'\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} - Ql\right)\Big]\right\} + \\ + I_\nu^{\mathrm{inc}} \exp\left\{-\kappa\rho \int_0^R \mathrm{d}l'\, \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} - Ql\right)\Big]\right\}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Jednotlivé veličiny κ, ρ, S, v a Q jsou počítány v bodě rezonance r. Výsledný vztah je již možné poměrně jednoduše integrovat. Zavedeme nové bezrozměrné proměnné

$$\lambda \equiv \frac{l}{L_{\mathrm{S}}}, \tag{3.14a}$$

$$x \equiv \frac{\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}}, \tag{3.14b}$$

kde Sobolevova délka L_S je určena rovnicí

$$L_\mathrm{S} = \frac{c}{\nu_0} \frac{\Delta\nu_\mathrm{D}}{|\mathrm{d}v_l/\mathrm{d}l|} \tag{3.15}$$

a $\Delta\nu_\mathrm{D}$ je Dopplerovská pološířka (3.4). Vidíme, že vztah pro Sobolevovu délku odpovídá tomu, jak byl v předchozí kapitole intuitivně odvozen. Zavedeme bezrozměrný profil čáry

$$\varphi(x) = \phi\left(x\Delta\nu_\mathrm{D}\right). \tag{3.16}$$

Oproti (3.3), ve shodě s běžným postupem, posuneme integrační meze pro výpočet normalizace profilu, $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\mathrm{d}x = 1$. Tím jsme do výpočtu nevnesli žádnou chybu, protože spektrální čára je vždy frekvenčně omezená. V těchto nových proměnných je možné zapsat rovnici (3.13) jako

$$I = S\tau \int_0^\infty \mathrm{d}\lambda\, \varphi(x+\lambda) \exp\left\{-\tau \int_0^\lambda \mathrm{d}\lambda'\, \varphi(x+\lambda')\right\} + I_\nu^\mathrm{inc} \exp\left\{-\tau \int_0^\lambda \mathrm{d}\lambda'\, \varphi(x+\lambda')\right\}. \tag{3.17}$$

V horní limitě jsme místo R/L_S zapsali ∞, protože, ve shodě se Sobolevovou aproximací, předpokládáme $R \gg L_\mathrm{S}$. Optická hloubka τ je dána vztahem

$$\tau \equiv \kappa\rho L_\mathrm{S} = \frac{\kappa\rho v_\mathrm{th}}{|Q|}. \tag{3.18}$$

Tento vztah si zasluhuje podrobnější komentář. V literatuře se používají různé definice absorpčního koeficientu. Ačkoliv toto odvození vychází z článku Rybicki a Hummer (1978), byla použita odlišná definice absorpčního koeficientu podle Castora (1974, absorpční koeficient definovaný na jednotku objemu namísto na jednotku hmotnosti) tak, aby bylo možné plynule přejít od zářivé síly pro jednu čáru k celkové zářivé síle. Díky tomu získáváme formálně odlišný vztah pro optickou hloubku, než jaký odvodili Rybicki a Hummer (1978).

Se zavedením nových proměnných

$$t \equiv x + \lambda, \tag{3.19a}$$
$$t' \equiv x + \lambda', \tag{3.19b}$$

je možné zapsat intenzitu záření jako

$$I = S\tau \int_x^\infty \mathrm{d}t\, \varphi(t) \exp\left\{-\tau \int_x^t \mathrm{d}t'\, \varphi(t')\right\} + I_\nu^\mathrm{inc} \exp\left\{-\tau \int_x^\infty \mathrm{d}t'\, \varphi(t')\right\}. \tag{3.20}$$

Vidíme, že tento vztah je již možné lehce integrovat, výsledné řešení rovnice přenosu v Sobolevově aproximaci je

$$I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu) = S\left\{1 - \exp\left[-\tau\Phi\left(x\right)\right]\right\} + I_\nu^\mathrm{inc} \exp\left[-\tau\Phi\left(x\right)\right], \tag{3.21}$$

kde

$$\Phi(t) \equiv \int_t^\infty \varphi(t')\mathrm{d}t'. \tag{3.22}$$

Tento vztah popisuje jak intenzitu v oblasti, kde dochází k absorpci (případně emisi) záření, tak mimo tuto oblast. Ve většině případů nás však zajímá pouze řešení mimo rezonanční oblast. Podívejme se tedy na řešení před rezonanční oblastí, kde $x \to \infty$. V této oblasti platí

$$I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\big|_{x\to\infty} = I_\nu^\mathrm{inc}. \tag{3.23}$$

Podle očekávání vidíme, že před rezonanční oblastí se intenzita záření nemění. Záření pak prochází vrstvou, kde dochází k jeho pohlcování a vyzařování a na konci této rezonanční oblasti se jeho intenzita opět nemění, pro vystupující záření platí

$$I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)|_{x\to-\infty} = I_\nu^{\mathrm{inc}}\mathrm{e}^{-\tau} + S\left(1-\mathrm{e}^{-\tau}\right). \tag{3.24}$$

První člen popisuje dopadající záření, zeslabené absorbující vrstvou optické hloubky τ, druhý emisi záření touto vrstvou. Stojí za povšimnutí, že tento vzorec nezávisí na profilu $\varphi(t)$. Navíc, pokud změníme znaménko rychlostního pole, pak se jednotlivé vzorce též nemění.

V případě, že zvolený paprsek (daný směrem $\boldsymbol{n}$) má více průsečíků s rychlostní plochou, pak výslednou intenzitu záření je možné získat vícenásobnou aplikací vzorce (3.24).

Funkce zdroje

Abychom mohli řešení rovnice přenosu záření uzavřít, je nutné spočíst funkci zdroje (3.5). Nejdříve spočteme střední intenzitu (3.6). Naznačené integrace provedeme jednotlivě. Nejprve integrace (3.24) přes frekvence dává

$$\bar{I}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \frac{1}{\Delta\nu_{\mathrm{D}}}\int_0^\infty \phi\Big[\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\Big]\, I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu)\,\mathrm{d}\nu. \tag{3.25}$$

Díky tomu, že se profil mění především v rezonanční oblasti, musíme dosadit intenzitu přímo ze vzorce (3.21), po transformaci proměnné podle (3.14b) získáváme

$$\bar{I}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\left\{S\left[1-\mathrm{e}^{-\tau\Phi(x)}\right] + I_\nu^{\mathrm{inc}}\mathrm{e}^{-\tau\Phi(x)}\right\}\mathrm{d}x. \tag{3.26}$$

Po integraci obdržíme

$$\bar{I}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n}) = S\left[1-\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\right] + I_\nu^{\mathrm{inc}}\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}. \tag{3.27}$$

Přitom předpokládáme, že v oblasti rezonance se hraniční intenzita I_ν^{inc} podstatně nemění a tedy intenzita vystupující v této rovnici je dána intenzitou v bodě rezonance

$$I_\nu^{\mathrm{inc}} \equiv I^{\mathrm{inc}}\Big(\nu_0 + \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{n}\boldsymbol{v}\Big). \tag{3.28}$$

Při výpočtu integrálu přes úhly budeme předpokládat, že paprsky pocházející z prostorového úhlu Ω_c (který odpovídá hvězdě, viz. obr. 3.1) mají stejnou hraniční intenzitu I_c (zanedbáváme jev okrajového a gravitačního ztemnění), paprsky které tímto prostorovým úhlem neprocházejí, mají nulovou hraniční intenzitu. Hraniční podmínka má tedy tvar

$$I_\nu^{\mathrm{inc}} = \begin{cases} I_c, & \boldsymbol{n}\in\Omega_c, \\ 0, & \boldsymbol{n}\notin\Omega_c. \end{cases} \tag{3.29}$$

Integrací (3.27) přes všechny prostorové úhly pak získáváme

$$\bar{J}(\boldsymbol{r}) = \left[1-\beta(\boldsymbol{r})\right]S(\boldsymbol{r}) + \beta_c(\boldsymbol{r})I_c, \tag{3.30}$$

kde veličiny β a β_c jsou dány vzorci

$$\beta = \frac{1}{4\pi}\oint \frac{1-\mathrm{e}^{\tau}}{\tau}\mathrm{d}\omega, \tag{3.31a}$$

$$\beta_c = \frac{1}{4\pi} \oint_{\Omega_c} \frac{1 - \mathrm{e}^{\tau}}{\tau} \mathrm{d}\omega. \tag{3.31b}$$

Funkci zdroje pak získáme dosazením (3.30) do rovnice (3.5),

$$S(\boldsymbol{r}) = \frac{(1-\epsilon)\,\beta_c I_c + \epsilon B}{\epsilon + (1-\epsilon)\,\beta}. \tag{3.32}$$

Tento vztah již můžeme přímo dosadit do rovnice pro intenzitu (3.24).

3.1.4 Sféricky symetrický případ

Pokud je možné předpokládat, že hvězdný vítr je sféricky symetrický, pak se získané rovnice podstatně zjednodušují. V tomto případě má vektor rychlosti jedinou nenulovou komponentu, radiální složku v_r a vektor $\boldsymbol{n}$ je určen úhlem, který svírá s radiálním směrem θ. Výraz pro Q (viz. vztah 3.11) má tvar (Castor 1974)

$$Q = \mu^2 \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} + \left(1 - \mu^2\right) \frac{v_r}{r}, \tag{3.33}$$

kde $\mu = \cos\theta$. Hraniční podmínka (3.29) může být zapsána pro $\mu > \mu_c$ (respektive $\mu < \mu_c$), kde μ_c je kosinus polovičního úhlového rozměru hvězdy (2.24). Potom

$$\beta = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{\tau}}{\tau} \mathrm{d}\mu, \tag{3.34a}$$

$$\beta_c = \frac{1}{2} \int_{\mu_c}^{1} \frac{1 - \mathrm{e}^{\tau}}{\tau} \mathrm{d}\mu. \tag{3.34b}$$

Při výpočtu intenzity záření a následně zářivé síly se často zanedbává tepelné záření hvězdného větru ($\epsilon = 0$). Za tohoto předpokladu je podle (3.32) funkce zdroje rovna

$$S(\boldsymbol{r}) = \frac{\beta_c}{\beta} I_c. \tag{3.35}$$

Intenzita záření je podle (3.21) dána vztahem (Gayley a Owocki 1994)

$$I(r,\mu,\nu) = I_c \left\{ \frac{\beta_c}{\beta} + \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \mathrm{e}^{-\tau \Phi(x)} \right\}, \tag{3.36}$$

kde funkce $D(\mu)$ vyjadřující hraniční podmínku (3.29) je zavedena vztahem

$$D(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu \geq \mu_c, \\ 0, & \mu < \mu_c. \end{cases} \tag{3.37}$$

Podobně pro střední intenzitu $\bar{I}$ platí podle (3.27)

$$\bar{I} = I_c \left\{ \frac{\beta_c}{\beta} + \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \frac{1 - \mathrm{e}^{-\tau}}{\tau} \right\}. \tag{3.38}$$

Síla záření na jednotku hmotnosti (zářivé zrychlení) je dána integrálem (2.22)

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\rho c} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\nu \chi(\boldsymbol{r},\nu,t) \oint \mathrm{d}\omega I(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n},\nu,t)\boldsymbol{n} = \frac{\kappa \Delta\nu_{\mathrm{D}}}{c} \oint \bar{I}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\boldsymbol{n}\mathrm{d}\omega = \frac{2\pi\kappa\Delta\nu_{\mathrm{D}}}{c} \int_{-1}^{1} \mu \bar{I}(r,\mu)\mathrm{d}\mu. \tag{3.39}$$

Dosadíme-li nyní do tohoto vztahu vyjádření pro střední intenzitu (3.38), pak první člen je po integraci nulový díky tomu, že je sudou funkcí μ. To fyzikálně znamená, že v našem přiblížení rozptýlené záření nemá vliv na zářivou sílu. Výsledný vztah pro sílu záření má tedy tvar

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi\kappa\Delta\nu_{\mathrm{D}}I_c}{c}\int_{\mu_c}^{1}\mu\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau}}{\tau}\mathrm{d}\mu. \tag{3.40}$$

Pokud dosadíme optickou hloubku podle (3.18) pak spolu s vyjádřením Q ve sférických souřadnicích (3.33), získáme pro zářivou sílu výraz odvozený Castorem (1974)

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi\nu_0 I_c}{\rho c^2}\int_{\mu_c}^{1}\mu\left[\left(1-\mu^2\right)\frac{v_r}{r}+\mu^2\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]\left[1-\exp\left(-\frac{r}{v_r}\frac{\kappa\rho v_{\mathrm{th}}}{1+\sigma\mu^2}\right)\right]\mathrm{d}\mu, \tag{3.41}$$

kde proměnná σ je definována jako (Castor 1970)

$$\sigma \equiv \frac{\mathrm{d}\ln v_r}{\mathrm{d}\ln r}-1. \tag{3.42}$$

3.2 CAK model hvězdného větru

V předchozí kapitole jsme získali vyjádření pro zářivou sílu způsobovanou jedinou čárou. Abychom získali reálný výraz pro zářivou sílu, musíme sečíst příspěvky poměrně velkého počtu čar. Takovýto vztah poprvé získali Castor, Abbott a Klein (1975, CAK). Podle jejich jmen se také teorie výpočtu hvězdného větru, která bude v dalším výkladu odvozena, nazývá CAK teorie. Zmiňovaní autoři poprvé získali teoretický odhad celkového množství hmoty, kterou hvězda ztrácí hvězdným větrem a z její velikosti usoudili, že hvězdný vítr má podstatný vliv na hvězdný vývoj. Ještě než se budeme věnovat CAK teorii, odvodíme jednodušší vztah pro zářivou sílu, než je (3.41).

3.2.1 Přibližné vyjádření zářivé síly

V nejjednodušším přiblížení je možné uvažovat, že počítáme zářivou sílu daleko od hvězdy (*radial streaming* aproximace). Proto položíme ve vzorci (3.33) pro výpočet Q kosinus úhlu rovný jedné, $\mu = 1$. Díky tomu se vztah (3.41) pro zářivou sílu redukuje na

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{2\pi\nu_0 I_c}{\rho c^2}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\left\{1-\exp\left[-\kappa\rho v_{\mathrm{th}}\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}\right]\right\}\int_{\mu_c}^{1}\mu\mathrm{d}\mu, \tag{3.43}$$

který je již možné jednoduše integrovat. S novou definicí optické hloubky

$$\tau_{\mathrm{S}}(r) = \kappa\rho v_{\mathrm{th}}\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}, \tag{3.44}$$

má pak vztah pro zářivou sílu tvar

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\pi}{c}\kappa\Delta\nu_{\mathrm{D}}I_c\frac{1-\exp\left(-\tau_{\mathrm{S}}(r)\right)}{\tau_{\mathrm{S}}(r)}\left(\frac{R_*}{r}\right)^2. \tag{3.45}$$

Castor (1974) tento výraz ještě dále zjednodušil. Použil aproximativní formuli

$$\frac{1-\exp\left(-\tau_{\mathrm{S}}(r)\right)}{\tau_{\mathrm{S}}(r)} \approx \min\left(1{,}1/\tau_{\mathrm{S}}(r)\right). \tag{3.46}$$

Opticky tlusté čáry mají velkou optickou hloubku, zatímco opticky tenké čáry mají malou optickou hloubku. Protože pravděpodobnost interakce fotonu v opticky tlusté čáře je rovna 1, v opticky tenké čáře $\tau_S(r)$, odpovídá tato aproximace rozdělení čar na opticky tlusté a opticky tenké (Puls, Springmann a Lennon 2000). Na základě uvedené aproximace lze s užitím vztahu (2.29) získat pro sílu záření

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\kappa F_c \Delta\nu_{\mathrm{D}}}{c} \min\left(1{,}1/\tau_{\mathrm{S}}(r)\right). \tag{3.47}$$

Zavedeme novou hloubkovou proměnnou tak, aby byla nezávislá na absorpčním koeficientu κ vztahem

$$t \equiv \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{\kappa}\tau_{\mathrm{S}}(r) = \sigma_{\mathrm{e}}\rho v_{\mathrm{th}}\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}. \tag{3.48}$$

Přitom jsme (čistě z rozměrových důvodů) využili účinný průřez rozptylu volných elektronů na jednotku hmotnosti σ_{e}. Využijeme-li tuto proměnnou při výpočtu zářivé síly (3.47), dostáváme konečný výsledek

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}} F_c \Delta\nu_{\mathrm{D}}}{c} \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_{\mathrm{e}}},\frac{1}{t}\right). \tag{3.49}$$

3.2.2 Zahrnutí velkého počtu čar

Vztah (3.49) byl odvozen pro případ jediné čáry. V reálných hvězdných atmosférách je však nutné zahrnout velký počet čar. Pokud zanedbáme možnost překrývání se jednotlivých čar (Friend a Castor 1983, Pavlakis a Kylafis 1996), pak je výsledná zářivá síla dána součtem zářivé síly všech přispívajících čar

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}}{c}\sum_{\text{čáry}} F_c \Delta\nu_{\mathrm{D}} \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_{\mathrm{e}}},\frac{1}{t}\right). \tag{3.50}$$

Při výpočtu zářivé síly podle (3.50) lze postupovat dvojím způsobem. Jednak je možné tento výraz spočítat s využitím dostupných atomárních dat. Je však zřejmé, že tento postup je výpočetně náročný, i když vede k přesnému výsledku. Méně přesnější, ale podstatně jednodušší způsob využívá rozdělovacích funkcí čar.

Počet čar s frekvencí v intervalu $(\nu,\nu+\mathrm{d}\nu)$ a absorpčním koeficientem $(\kappa,\kappa+\mathrm{d}\kappa)$ je určen vztahem (CAK, Puls, Springmann a Lennon 2000)

$$\mathrm{d}N(\nu,\kappa) = -N_0 f(\nu,\kappa)\,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\kappa. \tag{3.51}$$

Protože předpokládáme, že počet čar klesá s rostoucím absorpčním koeficientem, je před výrazem záporné znaménko, N_0 je normovací konstanta. Za tohoto předpokladu je (s užitím definice Dopplerovské pološířky (3.4)) zářivá síla dána integrálem

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}}}{c^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu\,\nu F_c \int_0^\infty \mathrm{d}\kappa \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_{\mathrm{e}}},\frac{1}{t}\right) N_0 f(\nu,\kappa). \tag{3.52}$$

CAK aproximovali rozdělovací funkci $f(\nu,\kappa)$ podílem

$$f(\nu,\kappa) = \frac{\kappa^{\alpha-2}}{\nu}. \tag{3.53}$$

Normalizační konstantu N_0 vyjádřili ve tvaru

$$N_0 = \frac{ck}{v_{\mathrm{th}}}\,(1-\alpha)\,\alpha\,\sigma_{\mathrm{e}}^{1-\alpha}. \tag{3.54}$$

Přitom α a k jsou vhodně zvolené parametry. Za tohoto předpokladu je možné vypočítat zářivou sílu (3.52) jako

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{k\sigma_{\mathrm{e}}^{2-\alpha}}{c}\,(1-\alpha)\,\alpha\int_0^\infty F_c \mathrm{d}\nu \int_0^\infty \kappa^{\alpha-2} \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_{\mathrm{e}}},\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}\kappa. \tag{3.55}$$

Integrace přes frekvence dává celkový tok záření F, integraci přes absorpční koeficient lze upravit jako

$$\int_0^\infty \kappa^{\alpha-2}\min\left(\frac{\kappa}{\sigma_\mathrm{e}},\frac{1}{t}\right)\mathrm{d}\kappa = \frac{1}{\sigma_\mathrm{e}}\int_0^{\frac{\sigma_\mathrm{e}}{t}}\kappa^{\alpha-1}\mathrm{d}\kappa + \frac{1}{t}\int_{\frac{\sigma_\mathrm{e}}{t}}^\infty \kappa^{\alpha-2}\,\mathrm{d}\kappa =$$
$$\frac{1}{\alpha\sigma_\mathrm{e}}\left(\frac{\sigma_\mathrm{e}}{t}\right)^\alpha - \frac{1}{(\alpha-1)\,t}\left(\frac{\sigma_\mathrm{e}}{t}\right)^{\alpha-1} = \frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)\,\sigma_\mathrm{e}}\left(\frac{\sigma_\mathrm{e}}{t}\right)^\alpha.$$

S užitím výsledku této integrace pak získáváme slavný vztah, který pro sílu záření poprvé odvodili Castor, Abbott a Klein (1975)

$$g^\mathrm{rad} = \frac{\sigma_\mathrm{e}kF}{c}t^{-\alpha}. \tag{3.56}$$

Odhlédneme-li od multiplikativních konstant, vidíme, že díky definici normalizované Sobolevovy optické hloubky (3.48) je zářivé zrychlení g^rad úměrné mocnině gradientu rychlosti a nepřímo úměrné hustotě.

Alternativní možnost parametrizace velkého počtu čar předložil Gayley (1995). Ta je založena na tzv. $\bar{Q}$-faktorech, odpovídajících klasické kvalitě oscilátoru.

3.2.3 Hydrodynamické rovnice

V případě stacionárního sféricky symetrického toku plynu lze rovnici kontinuity a pohybovou rovnici pro hustotu plynu ρ a radiální složku rychlosti v_r zapsat následujícím způsobem (1.48, 1.49):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho v_r\right) = 0, \tag{3.57a}$$
$$v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = g^\mathrm{rad} - g - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\rho a^2\right), \tag{3.57b}$$

kde a je izotermická rychlost zvuku, g je gravitační síla vztažená na jednotku hmotnosti (gravitační zrychlení), opravená na zářivou sílu způsobenou rozptylem záření volnými elektrony,

$$g = \frac{G\,(1-\mathit{\Gamma})\,\mathfrak{M}}{r^2}. \tag{3.58}$$

Veličiny G a $\mathfrak{M}$ mají klasický význam gravitační konstanty a hmotnosti hvězdy. Podíl zářivé síly způsobené rozptylem záření volnými elektrony a gravitační síly je

$$\mathit{\Gamma} = \frac{\sigma_\mathrm{e}L}{4\pi G\mathfrak{M}c}. \tag{3.59}$$

Zanedbáme-li příspěvek k celkovému tlaku od jiných částic než od vodíku a elektronů, pak za předpokladu plně ionizovaného hvězdného větru platí (odhlédneme-li od hmotnosti elektronů) podle (1.11, 1.51) pro izotermickou rychlost zvuku

$$a^2 = \frac{2kT}{m_\mathrm{p}}. \tag{3.60}$$

Rovnici kontinuity je možné jednoduše integrovat

$$\dot{\mathfrak{M}} \equiv \frac{\mathrm{d}\mathfrak{M}}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2\rho v_r = \mathrm{konst.} \tag{3.61}$$

Veličina $\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t$ udává množství hmoty, které projde za jednotku času plochou koule o poloměru r. Rovnice umožnuje určit, jaká část hmoty hvězdy je unášena hvězdným větrem, $\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t$ je rychlost ztráty hmoty větrem.

Gradient tlaku plynu lze s využitím rovnice kontinuity (3.57a) zapsat jako

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\rho a^2\right) = \frac{a^2}{v_r}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} + \frac{2a^2}{r} - \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}r}. \tag{3.62}$$

S užitím uvedené rovnice a po dosazení vztahu pro zářivou sílu (3.56) získává pohybová rovnice (3.57b) tvar

$$\left(v_r - \frac{a^2}{v_r}\right)\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\mathfrak{M}(1-\Gamma)}{r^2} + \frac{2a^2}{r} - \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}r} + \frac{\Gamma G\mathfrak{M}k}{r^2}\left(\frac{1}{\sigma_\mathrm{e}\rho v_\mathrm{th}}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^\alpha, \tag{3.63}$$

kde jsme využili definice luminosity hvězdy L (2.30) a definice podílu Γ (3.59). S využitím řešení rovnice kontinuity hmotnosti (3.61) je možné soustavu rovnic (3.57a,3.57b) redukovat na rovnici jedinou,

$$\left(v_r - \frac{a^2}{v_r}\right)\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = -\frac{G\mathfrak{M}(1-\Gamma)}{r^2} + \frac{2a^2}{r} - \frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}r} + \frac{\Gamma G\mathfrak{M}k}{r^2}\left[\frac{4\pi}{\sigma_\mathrm{e}v_\mathrm{th}\left(\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t\right)}\right]^\alpha\left(r^2 v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^\alpha. \tag{3.64}$$

Pro hledání řešení rovnice (3.64) je výhodné zavést sadu nových proměnných w, u a h, definovaných vztahy (CAK)

$$w = \frac{1}{2}{v_r}^2, \tag{3.65a}$$

$$u = -\frac{1}{r}, \tag{3.65b}$$

$$h = -G\mathfrak{M}\left(1-\Gamma\right) + 2a^2 r - r^2\frac{\mathrm{d}a^2}{\mathrm{d}r}. \tag{3.65c}$$

Označíme-li jako w' derivaci dw/du, pak rovnice (3.64) může být zapsána v jednoduchém tvaru

$$F(u,w,w') \equiv \left(1 - \frac{a^2}{2w}\right)w' - h(u) - C(w')^\alpha = 0. \tag{3.66}$$

Konstanta C je dána vzorcem

$$C = \Gamma G\mathfrak{M}k\left[\frac{4\pi}{\sigma_\mathrm{e}v_\mathrm{th}\left(\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t\right)}\right]^\alpha. \tag{3.67}$$

Na rozdíl od teorie slunečního větru není funkce $F(u,w,w')$ lineární v proměnné w'. Diferenciální rovnice (3.66) má singulární bod, ve kterém se řešení přerušuje nebo je nespojité. Ten je definován podmínkou

$$\frac{\partial F(u,w,w')}{\partial w'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{w} - \alpha C\left(w'\right)^{\alpha-1} = 0. \tag{3.68}$$

Rovnice (3.68) spolu s (3.66) určuje křivku, na které leží singulární body. Aby řešení diferenciální rovnice (3.66) bylo spojité ve všech oblastech, musí existovat singulární bod, ve kterém je řešení tečné ke křivce singulárních bodů. Aby se našlo kritérium pro w', předpokládá se, že $w(u)$ je řešení diferenciální rovnice pro které všude existuje $w''(u)$. Tedy, jelikož podle (3.66)

$$F\left[u,w(u),w'(u)\right] = 0, \tag{3.69}$$

pak je derivací podle u možné získat

$$\frac{\partial F}{\partial u} + w'\frac{\partial F}{\partial w} + w''\frac{\partial F}{\partial w'} = 0. \tag{3.70}$$

V místě singulárního bodu je $\partial F/\partial w'$ rovná nule, tedy

$$\frac{\partial F}{\partial u} + w' \frac{\partial F}{\partial w} = 0. \tag{3.71}$$

Podmínky (3.66), (3.68) a (3.71) jednoznačně určují tzv. kritický bod, kterým musí spojité řešení procházet. Jejich řešením je možné jednoznačně určit polohu kritického bodu u_c ze znalosti konstanty C. Nebo, naopak, ze znalosti polohy kritického bodu u_c určit konstantu C, tedy určit rychlost ztráty hmoty prostřednictvím větru.

3.2.4 CAK oblasti

Je možné ukázat, že, na rozdíl od teorie slunečního větru, v případě větru hnaného zářením existuje pouze jediné spojité řešení rovnice (3.66), které začíná na povrchu atmosféry při $v \to 0$ a existuje pro libovolné $r \to \infty$.

Jednotlivá řešení rovnice (3.66)

Rovnice (3.66) nemá žádné, má jedno nebo dvě řešení w' podle hodnoty jednotlivých parametrů, které v ní vystupují. Extrémy je možné získat derivací podle w', kdy se získá rovnice

$$1 - \frac{a^2}{2w} - C\alpha \left(w'\right)^{-(1-\alpha)} = 0. \tag{3.72}$$

Podle počtu a typu řešení je možné rozdělit graf závislosti v_r na r na pět oblastí:

Případ $1 - \frac{a^2}{2w} < 0$. Pro tuto hodnotu parametru w nemá rovnice (3.72) žádné řešení vzhledem k w', tedy funkce $F(w')$ je monotónní funkcí parametru w'. Z toho plyne, že rovnice (3.66) má v tomto případě buď jedno, nebo žádné řešení.

1. $h > 0$

   V tomto případě nemá rovnice (3.66) žádné řešení vzhledem k w', neboť funkce $F(w')$ je pro všechny hodnoty parametru w' záporná. Jedná se o oblast V podle CAK.

2. $h < 0$

   V tomto případě má rovnice (3.66) jedno řešení vzhledem k w', neboť funkce $F(w')$ mění své znaménko. Jedná se o oblast I podle CAK.

Případ $1 - \frac{a^2}{2w} > 0$. Pro tuto hodnotu parametru w má rovnice (3.72) jedno řešení vzhledem k w', tedy funkce $F(w')$ má extrém, podle znaménka druhé derivace minimum. Jeho hodnota je

$$w'_{\min} = \left(\frac{1 - \frac{a^2}{2w}}{\alpha C}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}}. \tag{3.73}$$

Pro velké hodnoty parametru w' je $F(w') > 0$, tedy podmínkou pro existenci řešení rovnice (3.72) v tomto případě je $F(w'_{\min}) < 0$. Dosazením vztahu (3.73) je možné tuto podmínku přepsat na tvar

$$\left(1 - \frac{a^2}{2w}\right)\left(\frac{1 - \frac{a^2}{2w}}{\alpha C}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} - h(u) - C\left(\frac{1 - \frac{a^2}{2w}}{\alpha C}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}} < 0, \tag{3.74}$$

nebo

$$\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\alpha C)^{\frac{1}{1-\alpha}}-h(u)-C^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}<0, \tag{3.75}$$

$$\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)^{-\frac{\alpha}{1-\alpha}}C^{\frac{1}{1-\alpha}}\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(\alpha-1)<h(u). \tag{3.76}$$

1. $h>0$

   V tomto případě je rovnice (3.76) splněna pro libovolné hodnoty parametru w', neboť její levá strana je záporná ($\alpha-1<0$). Rovnice (3.66) by tedy v tomto případě mohla mít dvě řešení. Vzhledem k tomu, že pro hodnotu $h(u)=0$ je jedno z řešení rovné nule, je zřejmé, že pro zvětšující-se $h(u)$ by se řešení rovnice (3.76) muselo posunovat do oblasti záporných čísel, kde však $F(u,w,w')$ není definováno. Tedy v této oblasti existuje pouze jedno řešení rovnice (3.66). Jedná se o oblast III podle CAK.

2. $h<0$

   Pro zápornou hodnotu $h(u)$ pak dostáváme podmínku pro existenci řešení ve tvaru

   $$\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)>\alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}(-h)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}. \tag{3.77}$$

   (a) $\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)>\alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}(-h)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$
   V tomto případě má rovnice (3.66) dvě řešení, což odpovídá oblasti II větru CAK.

   (b) $\left(1-\frac{a^2}{2w}\right)<\alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}(-h)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}$
   V tomto případě nemá rovnice (3.66) žádné řešení, což odpovídá oblasti IV větru CAK.

CAK oblasti v případě izotermického větru

Oblasti, zavedené v předchozí kapitole, mají v případě izotermického větru tvar:

1. oblast I: $v_r<a$, $r<r_1$,
2. oblast II: $v_r>a$, $r<r_1$ a $v_r<a\Lambda$,
3. oblast III: $v_r>a$, $r>r_1$,
4. oblast IV: $v_r>a$, $r<r_1$ a $v_r>a\Lambda$,
5. oblast V: $v_r<a$, $r>r_1$,

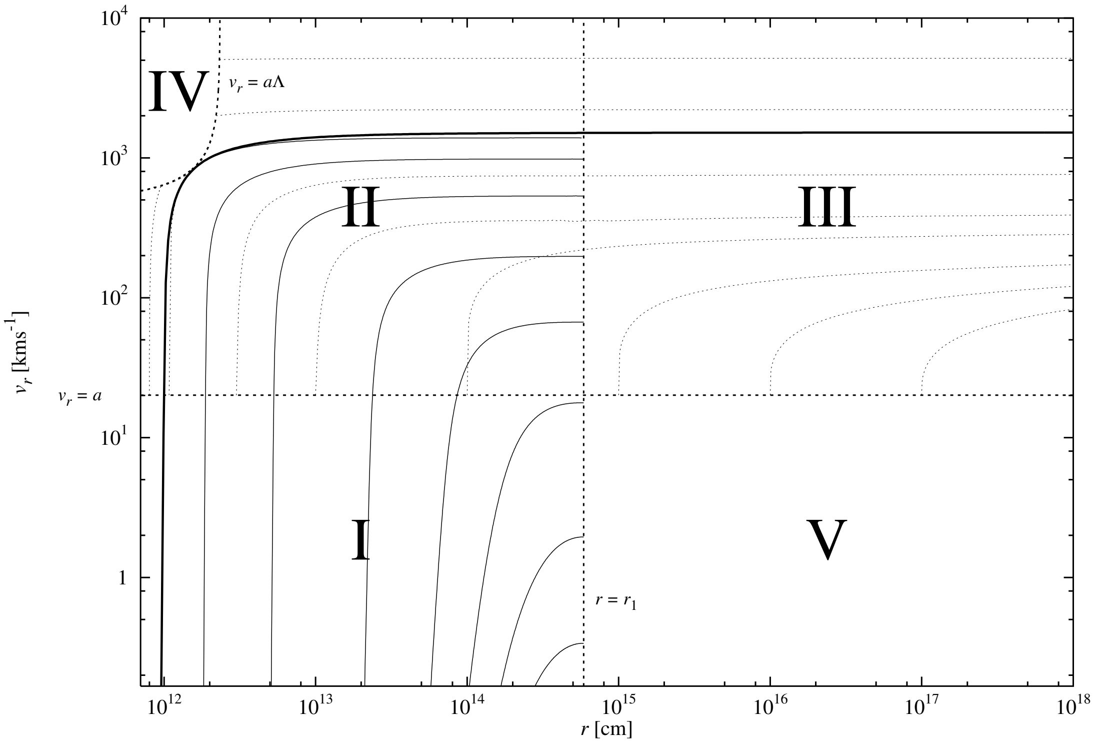
kde nové proměnné jsou definovány vztahy

$$r_1=\frac{G\mathfrak{M}(1-\mathit{\Gamma})}{2a^2}, \tag{3.78}$$

$$\Lambda=\left[\alpha(1-\alpha)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}C^{\frac{1}{\alpha}}(-h)^{-\frac{1-\alpha}{\alpha}}-1\right]^{-1/2}. \tag{3.79}$$

Je zajímavé, že pokud položíme $\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r=0$, pak je možné použitím pohybové rovnice (3.64) ukázat, že derivace rychlosti podle poloměru je nulová pouze pro $r=r_1$. Vidíme tedy, že r_1 odpovídá maximálnímu poloměru, na který lze prodloužit řešení prvního typu. Křivka určená rovnicí

$$v_r=a\Lambda \tag{3.80}$$



Obrázek 3.3: Jednotlivé oblasti řešení diferenciální rovnice 3.66. Tučnou čarou je zakresleno jediné řešení, které je definované pro všechny hodnoty r, plnou a tečkovanou čarou jsou zakresleny dva rozdílné typy řešení. Přerušovanou čarou jsou zakresleny křivky vymezující jednotlivé oblasti (viz. text). Obrázek byl získán pomocí programu popsaného v dodatku (B.1).

se nazývá singulární lokus. Nad touto křivkou se žádná řešení pohybové rovnice (3.66) nenacházejí.

Pro parametry hvězdu s parametry $\mathfrak{M} = 60\,\mathfrak{M}_\odot$, $L = 9{,}66 \cdot 10^5\,L_\odot$, $\Gamma = 0{,}4$, $T_{\text{eff}} = 49\,000$ K, $R_* = 9{,}58510^{11}$ cm $= 13{,}8\ R_\odot$ jsou nakresleny na obr. (3.3) jednotlivé oblasti řešení a jednotlivá řešení pro parametry hvězdného větru $k = \frac{1}{30}$, $\alpha = 0{,}7$, $\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t = 3{,}05 \cdot 10^{-6}\,\mathfrak{M}_\odot/\text{rok}$. Obrázek byl získán pomocí programu popsaného v dodatku (B.1). Jednotlivá řešení byla získána výpočtem větru pomocí tohoto programu pro různé hodnoty r_1, v_{r1}, ρ_1.

Je nutné zdůraznit, že řešení, které popisuje CAK vítr hnaný zářením vznikne složením dvou různých typů řešení diferenciální rovnice (3.66). První z řešení popisuje vítr pro nízké hodnoty poloměru r (oblast I a část oblasti II). Pro vyšší hodnoty poloměru odpovídá CAK řešení druhému kořenu diferenciální rovnice (3.66), které existuje pro $r \to \infty$ (část oblasti II a oblast III). Řešení CAK přechází z jednoho kořenu diferenciální rovnice do druhého v singulárním bodě. Oba dva tyto kořeny jsou v singulárním bodě tečné ke křivce, určené rovnicí (3.80).

Záporné gradienty rychlostí

Při odvozování hydrodynamických rovnic pro případ CAK hvězdného větru jsme se dopustili jisté nepřesnosti. Zatímco v definici Sobolevovy optické hloubky jedné čáry (3.18) jsme uvažovali možnost záporného znaménka veličiny Q, v definici normované Sobolevovy optické hloubky (3.48) jsme již tuto možnost mlčky opustili. Přesnější definice Sobolevovy optické hloubky tedy obsahuje absolutní hodnotu gradientu rychlosti. S užitím této přesnější definice je možné ukázat, že existují řešení upravené pohybové rovnice (3.64), které mají záporný gradient rychlosti (Abbott 1980). Tato řešení popisují akreci hmoty na hvězdu, ovlivňovanou zářením. Je zajímavé, že Bjorkman (1995) ukázal, že pro případ zářením urychlovaného větru existují řešení, odpovídající tzv. slunečnímu vánku. Pro tato řešení je radiální rychlost všude menší než izotermická rychlost zvuku, přesto se rychlost mění spojitě pro všechny vzdálenosti od hvězdy. Mohlo by se tedy zdát, že již není teoretický důvod pro upřednostňování CAK řešení před řešením typu vánku. To by znamenalo, že by se v okolí horkých hvězd vyskytovaly dva druhy hvězdných větrů. Jeden rychlejší, druhý pomalejší a hustší. Nic takového se však nepozoruje, naopak, zdá se, že příroda volí hvězdné větry CAK typu. Uspokojivou odpověď na otázku, proč tomu tak je, dávají až hydrodynamické simulace hvězdných větrů.

3.3 Diskuse CAK bodu

Jak již bylo řečeno, ve stacionárním případě není možné pochopit význam kritického bodu (CAK bodu) soustavy hydrodynamických rovnic, popisujících CAK hvězdný vítr (3.57a, 3.57b). Přejdeme proto k časově závislé soustavě hydrodynamických rovnic, které lze v izotermickém případě zapsat jako (1.48, 1.49)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho v\right) = 0, \tag{3.81a}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r} + g - g^{\mathrm{rad}} = 0. \tag{3.81b}$$

Pro zjednodušení je vynechán index u rychlosti, $v \equiv v_r$.

3.3.1 Charakteristiky CAK rovnice

Rovnice (3.81) tvoří systém dvou parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu proměnných $\rho(r,t)$ a $v(r,t)$. Než je možné hledat charakteristiky tohoto systému, je nutné rovnice transformovat takovým způsobem, abychom získali kvazilineární rovnice (Courant a Hilbert 1964). Zderivujeme tedy soustavu rovnic (3.81) podle poloměru r, získáváme (Abbott 1980)

$$\rho\frac{\partial v_r}{\partial r} + v\frac{\partial \rho_r}{\partial r} + \frac{\partial \rho_r}{\partial t} \equiv F_1(r,t,v,\rho,v_r,\rho_r), \tag{3.82a}$$

$$v\frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\partial g^{\mathrm{rad}}}{\partial v_r}\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{a^2}{\rho}\frac{\partial \rho_r}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial t} \equiv F_2(r,t,v,\rho,v_r,\rho_r), \tag{3.82b}$$

kde $v_r \equiv \partial v/\partial r$, $\rho_r \equiv \partial \rho/\partial r$ a funkce F_1 a F_2 nejsou explicitně vypsány, protože jejich podrobný tvar není pro následující úvahy podstatný. Při analýze je nutné považovat v_r a ρ_r za nezávisle proměnné a tedy k této soustavě rovnic ještě doplnit definiční vztahy

$$\frac{\partial \rho}{\partial r} \equiv F_3(\rho_r) = \rho_r, \tag{3.82c}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} \equiv F_4(v_r) = v_r. \tag{3.82d}$$

Zavedeme-li vektor proměnných $\boldsymbol{u} = (\rho_r,v_r,\rho,v)^{\mathrm{T}}$, pak systém rovnic (3.82) lze zapsat v maticovém tvaru

$$\mathsf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \mathsf{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{F}, \tag{3.83}$$

kde matice A, B a vektor $\boldsymbol{F}$ mají tvar

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 & 0 \\ \frac{a^2}{\rho} & v - g^{\mathrm{rad}}_{v_r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}. \tag{3.84}$$

Přitom jsme zavedli označení $g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \equiv \partial g^{\mathrm{rad}}/\partial v_r$. Charakteristická rovnice, příslušející k (3.83), má tvar

$$\|\mathsf{A} - \tau \mathsf{B}\| = 0, \tag{3.85}$$

kde $\tau = dr/dt$. Pokud dosadíme vztahy pro jednotlivé matice, získáváme dvě sady rovnic pro charakteristiky

$$\tau = v - \frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}}\right)^2 + a^2}. \tag{3.86}$$

Pro hydrodynamické rovnice (3.81) určují charakteristiky rychlost, kterou se šíří vlny. Kladné znaménko odpovídá vlnám, které se šíří po proudu, zatímco záporné znaménko odpovídá vlnám šířícím se proti proudu větru. Je patrné, že oproti typickým akustickým vlnám (přesněji izotermickým vlnám), pro které by platilo

$$\tau = v \pm a$$

zářivá síla vnáší do členu pro rychlost vlnění nejen nový člen, ale také jistou asymetrii mezi vlnami, které se šíří po proudu a proti proudu.

3.3.2 Abbottovy vlny

Chápání charakteristik jako křivek, po kterých se šíří vlny, může být potvrzeno pomocí lineární analýzy stability řešení hydrodynamických rovnic (3.81). Budeme předpokládat, že pro studium perturbací hvězdného větru je možné použít Sobolevovu aproximaci, tedy že charakteristická délka perturbací je větší než Sobolevova délka. Aby bylo možné oddělit akusto-optické vlny, zanedbáme hustotní rozložení ve větru. Budeme předpokládat, že odchylky hustoty $\delta\rho$ a rychlosti δv od původního stacionárního stavu, charakterizovaného proměnnými ρ_0, v_0, jsou malé. Šíření vln budeme sledovat v soustavě pevně spojené se stacionárním pohybem větru v daném bodě. Tato inerciální soustava se tedy vůči hvězdě pohybuje rychlostí v_0. Za těchto předpokladů mají rovnice kontinuity a linearizovaná pohybová rovnice tvar (Abbott 1980)

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial r} = 0, \tag{3.87a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial \delta\rho}{\partial r} + \rho_0 g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \frac{\partial \delta v}{\partial r}. \tag{3.87b}$$

Zderivujeme-li nyní rovnici kontinuity (3.87a) podle proměnné r a pohybovou rovnici (3.87b) podle času, získáme následující soustavu rovnic

$$\frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t \partial r} + \rho_0 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial r^2} = 0, \tag{3.88a}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t^2} = -a^2 \frac{\partial^2 \delta\rho}{\partial t \partial r} + \rho_0 g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t \partial r}. \tag{3.88b}$$

Dosazením z rovnice kontinuity získáváme vlnovou rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \delta v}{\partial t^2} - g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial t \partial r} - a^2 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial r^2} = 0. \tag{3.89}$$

Budeme-li předpokládat řešení této rovnice ve formě šířících se vln, $\delta v = V \exp\left[i\left(\omega t - \kappa r\right)\right]$, kde ω označuje úhlovou frekvenci a κ vlnový vektor, pak po dosazení do diferenciální rovnice (3.89) získáváme algebraickou rovnici

$$\omega^2 + g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \omega\kappa - a^2 \kappa^2 = 0, \tag{3.90}$$

kterou lze zapsat ve tvaru disperzní relace

$$\omega = \kappa \left[-\frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \right)^2 + a^2} \right]. \tag{3.91}$$

Nejdříve si povšimneme, že se jedná o lineární disperzní relaci. Porovnáme-li tuto disperzní relaci s jejím tvarem pro čistě akustické vlny,

$$\omega = \pm \kappa a,$$

vidíme, že zářivá síla má podstatný vliv na tvar disperzní relace. Je také podstatné, že frekvence ω je reálná a proto je CAK model hvězdného větru stabilní. Tento závěr je však založen na předpokladu, že pro popis vln je možné použít Sobolevovu aproximaci. To obecně neplatí, naopak se ukazuje, že zářením urychlovaný hvězdný vítr je nestabilní vůči perturbacím s charakteristickou délkou menší než je Sobolevova délka (Owocki a Rybicki 1984). Porovnáme-li grupovou rychlost akusto-optických (Abbottových) vln

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{d\kappa} = -\frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g_{v_r}^{\mathrm{rad}} \right)^2 + a^2}, \tag{3.92}$$

s rovnicemi charakteristik (3.86) vidíme, že původní předpoklad, že charakteristiky určují rychlost šíření vlnění, byl oprávněný.

Z rovnice (3.92) vyplývá, že existují dva druhy vln, jeden šířící se po směru proudu, druhý proti jeho směru. Budeme sledovat šíření vln v CAK bodě, definovaném podmínkou (3.68)

$$\left(1 - \frac{a^2}{v^2} \right) v - g_{v_r}^{\mathrm{rad}} = 0. \tag{3.93}$$

Dosadíme-li nyní za sílu záření z této kritické podmínky do rovnice charakteristik (3.86), získáváme pro rychlost šíření vlnění v CAK bodě

$$\tau = \begin{cases} v \left(1 + \frac{a^2}{v^2} \right), \\ 0. \end{cases} \tag{3.94}$$

To tedy znamená, že kritická podmínka definuje bod, ve kterém je rychlost (zpětných) Abbottových vln rovna rychlosti větru. Pro případ monotónně rostoucí radiální rychlosti je tedy CAK bod posledním bodem ve hvězdném větru, ze kterého se mohou šířit vlny až k povrchu hvězdy. Nad tímto bodem je již rychlost větru větší než je rychlost Abbottových vln a tedy jak dopředné, tak zpětné vlny se šíří směrem od hvězdy.

Tyto úvahy také ozřejmují, proč skutečný hvězdný vítr se šíří právě podle CAK řešení hvězdného větru (Lamers a Cassinelli 1999). Pokud je rychlost větru vyšší než jaká by odpovídala CAK řešení, pak se vítr dostane do oblasti ohraničené singulární křivkou. Díky tomu, že v této oblasti stacionární řešení neexistuje a že se jedná o nadzvukovou oblast, vytvoří se rázová vlna, která se šíří směrem k povrchu. Rázová vlna pak zvýší hustotu větru u povrchu hvězdy, tedy sníží jeho rychlost. Celý děj se pak opakuje do té doby, než rychlost větru odpovídá CAK řešení. Pokud naopak je rychlost větru menší než by odpovídalo CAK řešení, pak je rychlost větru všude menší než rychlost Abbottových vln. To tedy znamená, že jakákoliv nestabilita ve hvězdném větru se může šířit až k povrchu hvězdy a tedy hvězdný vítr je celkově nestabilní. Tento závěr podporují též numerické simulace (Feldmeier a Shlosman 2000). Děje, vedoucí k ustavení rychlosti ztráty hmoty jsou zcela analogické jevům, které vznikají při nadzvukovém proudění tryskou (Landau a Lifšic 1986). Přesto však nejnovější výsledky zřejmě ukazují, že celý problém je poněkud složitější (Feldmeier 2000, viz. též diskuze v kap. 3.5).

3.4 Rozšíření CAK teorie

3.4.1 Zpřesnění rozdělovací funkce

Namísto jednoduché rozdělovací funkce (3.53) zavedl Abbott (1982) rozdělovací funkci čar ve tvaru, který popisuje její závislost na ionizační rovnováze za předpokladu rovnováhy fotoionizace a zářivé rekombinace,

$$f(\nu,\kappa) = \left(\frac{N_\mathrm{e}/W}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\right)^\delta \frac{\kappa^{\alpha-2}}{\nu}. \tag{3.95}$$

Přitom N_e je hustota elektronů, koeficient zředění W popisuje závislost střední intenzity záření na poloměru, člen $10^{11}\mathrm{cm}^{-3}$ byl zaveden z důvodu normalizace jednotek a δ je bezrozměrná konstanta.

Navíc, Abbott (1982) spočítal parametry α, k a δ popisující rozdělovací funkci čar a tedy určující sílu záření se započtením čar prvků od H po Zn v ionizačních stavech od I do IV. Pokud se však používají tyto parametry pro výpočet síly záření, pak je nutné použít správnou hodnotu tepelné rychlosti v_th ve vzorci pro optickou hloubku (3.48). Z logické úvahy by plynulo, že se jedná o tepelnou rychlost absorbujících atomů. V prostředí hvězdných větrů se však většinou na urychlování podílí několik různých atomů s různou tepelnou rychlostí. Proto byl Abbott nucen zvolit jedinou tepelnou rychlost, vůči které jsou parametry α a k normovány. Abbott (1982) zvolil tepelnou rychlost vodíku. Proto pokud se používají parametry zářivé síly spočtené Abbottem, je nutné ve vzorcích pro zářivou sílu použít tepelnou rychlost vodíku.

3.4.2 Zpřesnění úhlové integrace

Při výpočtu reálné síly záření je navíc nutné přesně vypočíst úhlovou integraci síly záření (opustit „radial streaming“ aproximaci, Pauldrach, Puls a Kudritzki 1986, Friend a Abbott 1986). Síla záření je ve zjednodušeném případě počítána podle (3.52,3.56)

$$g^\mathrm{rad} = \frac{\sigma_\mathrm{e} v_\mathrm{th}}{c^2}\int_0^\infty \mathrm{d}\nu\, \nu F_c \int_0^\infty \mathrm{d}\kappa \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_\mathrm{e}},\frac{1}{t}\right) N_0 f(\nu,\kappa) = \frac{\sigma_\mathrm{e} k F}{c} t^{-\alpha},$$

zatímco přesná integrace přes úhly vede ke vzorci (viz. 3.41, 3.52)

$$\begin{aligned} g^\mathrm{rad} = \frac{2\sigma_\mathrm{e} v_\mathrm{th}}{c^2}\left(\frac{r}{R_*}\right)^2 \int_0^\infty \mathrm{d}\nu\, \nu F_c \int_0^\infty \mathrm{d}\kappa \int_{\mu_c}^1 \mathrm{d}\mu \mu \min\left(\frac{\kappa}{\sigma_\mathrm{e}},\frac{1}{t'}\right) N_0 f(\nu,\kappa) = \\ = \frac{2\sigma_\mathrm{e} k F}{c}\left(\frac{r}{R_*}\right)^2 \int_{\mu_c}^1 \mu \left(t'\right)^{-\alpha} \mathrm{d}\mu, \end{aligned} \tag{3.96}$$

kde jsme opět použili přibližný vzorec (3.46) a optická hloubka t' je definována jako (3.18,3.48)

$$t' = \frac{r}{v}\frac{\sigma_\mathrm{e}\rho v_\mathrm{th}}{1+\sigma\mu^2}. \tag{3.97}$$

Použijeme-li nyní nově zavedenou rozdělovací funkci čar (3.95), pak po integraci je možné získat vzorec pro zářivou sílu, který bude použit v celé práci,

$$g^\mathrm{rad} = \frac{\varGamma G \mathfrak{M} k}{r^2}\left(\frac{N_\mathrm{e}/W}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\right)^\delta \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - \left(1+\sigma\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma\left(1+\sigma\right)^\alpha}\left(\frac{1}{\sigma_\mathrm{e}\rho v_\mathrm{th}}\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^\alpha. \tag{3.98}$$

3.5 Omezení CAK teorie

Při odvozování síly pro zářivou sílu (3.98) jsme se dopustili mnoha nepřesností. Mnohé z nich velký vliv na výsledné modely hvězdných větrů nemají, jiné však mohou ve zvláštních případech vést dokonce k nepochopení základních jevů ve hvězdných větrech.

3.5.1 Sobolevova aproximace

Jednou z nejvážnějších otázek spojovaných s CAK modely hvězdných větrů je otázka platnosti Sobolevovy aproximace. Pauldrach, Puls a Kudritzki (1986) diskutovali rozdíly mezi modelem hvězdného větru spočteným jednak se zářivou silou v Sobolevově aproximaci a jednak s užitím řešení rovnice přenosu záření v soustavě spojené s pohybujícím se prostředím („comoving“ soustavě). Ukázali, že výsledné modely se nijak podstatně neliší a že je tedy možné používat Sobolevovu aproximaci pro výpočet modelů hvězdných větrů.

Oproti tomu však Owocki, Castor a Rybicki (1988) a Poe, Owocki a Castor (1990) spočetli modely hvězdných větrů s obecnější zářivou silou než zářivou silou spočtenou v CAK aproximaci, ovšem se zanedbáním rozptýleného záření. Ukázali, že hvězdný vítr (pro velké hodnoty poměru tepelné a zvukové rychlosti) konverguje ke stacionárnímu řešení, které však neodpovídá CAK řešení. Tento výsledek je v rozporu se zmiňovaným závěrem z výpočtu v „comoving“ soustavě (Pauldrach, Puls a Kudritzki 1986). Situaci částečně vyjasnil Owocki (1991, 1993) když ukázal, že zahrnutí difuzního záření vede k poměrně dobrému souladu mezi výslednými hydrodynamickými modely a CAK hvězdným větrem. Výsledné modely nejsou sice stabilní, ale CAK řešení odpovídá jejich střední hodnotě. Bohužel další zpřesnění výpočtu zářivé síly (Owocki a Puls 1999) tento výsledek opět nepotvrzuje.

3.5.2 Vliv vícenásobného rozptylu

Při odvození Sobolevovy aproximace člen popisující zářivou sílu spojenou s rozptýleným zářením vypadává. To však platí pouze v případě, pokud není rozptyl vícenásobný. Zatímco pro mnohé hvězdy je jev vícenásobného rozptylu nepodstatný (Puls 1987), pro Wolfovy-Rayetovy hvězdy je zřejmě velice důležitý. Ukazuje se (Friend a Castor 1983, Abbott a Lucy 1985, Gayley, Owocki a Cranmer 1995), že právě vícenásobný rozptyl záření ve hvězdném větru je nadějným vysvětlením tzv. „momentového problému“ Wolfových-Rayetových hvězd. Hybnost spojená se zářením hvězdy je dána podílem L/c, zatímco hybnost, kterou vítr získal od záření, je dána součinem $\dot{\mathfrak{M}} v_\infty$. Zdálo by se tedy, že pro hvězdný vítr hnaný zářením musí platit

$$\frac{\dot{\mathfrak{M}} v_\infty}{\frac{L}{c}} < 1.$$

Ve skutečnosti však právě pro zmiňované Wolfovy-Rayetovy hvězdy tato nerovnost neplatí. Hlavním důvodem je to, že hybnost je vektorová veličina a nic nás tedy neopravňuje napsat výše uvedenou nerovnost. A právě při vícenásobném rozptylu se tato vlastnost projeví. Vícenásobný rozptyl se pak spíše než „momentovým problémem“ stává „problémem opacity“, kdy chybí čáry pro vysvětlení velkých hodnot rychlosti ztráty hmoty. Skutečně také rychlosti ztráty hmoty získané na základě modelů se započteným vícenásobným rozptylem (Vink, de Koter a Lamers 2000) odpovídají lépe pozorováním.

3.5.3 Nestability ve hvězdném větru

Při studiu nestabilit je nutné odlišovat dva případy. První, pokud zářivá síla je dána CAK aproximací (3.56) a druhý, kdy tomu tak není.

S pomocí lineární analýzy časově závislých hydrodynamických rovnic jsme ukázali, že hvězdný vítr se silou započtenou v CAK aproximaci je stabilní. Tento závěr potvrzují také numerické modely (Feldmeier a Shlosman 2000). Tito autoři došli k závěru, že se hvězdný vítr z mnohých počátečních podmínek vyvíjí směrem k CAK řešení a řešení typu vánku se neuplatní. Ukázali však, že mohou existovat také stabilní řešení s vyšší hodnotou rychlosti ztráty hmoty než v CAK řešení. Jak bylo odvozeno v kap. 3.2.4, tato řešení musí protínat křivku ohraničující zakázaná řešení v oblasti IV (viz. obr. 3.3). V bodě, kde protínají tuto křivku se řešení „zalamují“. Dále je gradient rychlosti záporný až do určitého bodu, ve kterém dochází k opětovnému „zalomení“ průběhu rychlosti. Fyzikální smysl těchto řešení je však nejasný. Stejně tak dosud neexistují žádné pozorovací důkazy, ospravedlňující tato řešení.

Výsledky studia nestabilit se však podstatně liší za předpokladu, že síla záření je dána obecnějším vztahem, než je (3.56). Owocki a Rybicki (1984) ukázali, že hvězdný vítr je pro výchylky s malou vlnovou délkou (které podstatně nemění Sobolevovu optickou hloubku) nestabilní, zatímco pro výchylky s vlnovou délkou srovnatelnou se Sobolevovou optickou hloubkou a větší je stabilní (vznikají Abbottovy vlny). Právě nestability ve hvězdném větru se často dávají do souvislosti se vznikem rentgenovského záření pozorovaného u OB hvězd (viz. např. Feldmeier, Puls a Pauldrach 1997). Samotné nestability však pro vysvětlení pozorované intenzity rentgenovského záření nedostačují, je zřejmě nutné navíc započítat srážky vznikajících rázových vln. Nejnovější družicová pozorování však ukazují, že tato teorie rázových vln ve hvězdném větru nestačí k pochopení vzniku rentgenovského záření OB hvězd. Cohen, Cassinelli a Waldron (1997) na základě pozorování družice *ASCA* ukázali, že pozdní B hvězdy vykazují rentgenovskou emisi, která nemůže být vysvětlena pomocí rázových vln ve hvězdném větru. Podrobné studium rentgenovské emise hvězdy ζ Ori pomocí družice *CHANDRA* (Waldron a Cassinelli 2001) ukazuje na přítomnost emise vznikající v plazmatu s vysokou hustotou v blízkosti hvězdy. Podobný závěr učinili také Cassinelli a kol. (2001) v případě hvězdy ζ Pup. V těchto oblastech má však vítr malou rychlost a tedy by v této oblasti žádné rentgenovské záření vznikat nemělo (Feldmeier, Puls a Pauldrach 1997). Navíc získané rentgenovské profily čar neodpovídají pozorované rychlosti ztráty hmoty.

Dalším problémem spojovaným s rentgenovským zářením OB hvězd je otázka časové neproměnnosti pozorované intenzity rentgenovského záření. Zatímco modely rentgenovské emise (např. Feldmeier, Puls a Pauldrach 1997) předpovídají velkou proměnnost rentgenovského záření, pozorování (viz. např. Berghöfer a Schmitt 1993) těmto závěrům odporují. Možným řešením je výskyt většího počtu rázových vln ve vícerozměrných modelech nestabilit (Oskinova a kol. 2001).

Ačkoliv je např. díky pozorování v UV oblasti (Prinja a Howarth 1986) či v rádiové oblasti (Bieging, Abbott a Churchwell 1989) zřejmé, že zářením hnané větry jsou proměnné, syntetická spektra spočtená na základě stacionárních modelů jsou v dobrém souladu s pozorováním (viz. např. Pauldrach a kol. 1994, Pauldrach, Hofmann a Lennon 2000). Oproti tomu hydrodynamické modely hvězdných větrů (např. Owocki a Puls 1999) předpovídají podstatně větší proměnnost. Tento nesoulad může být způsoben nedokonalostí zmiňovaných hydrodynamických modelů.

Z tohoto velmi omezeného souhrnu je patrné, že otázky stability (a s tím souvisejícího rentgenovského záření) a případně jednoznačnosti řešení hvězdných větrů nejsou ani zdaleka uzavřeny a jistě se na tomto poli dočkáme ještě mnohých zajímavých výsledků.

3.5.4 Vícerozměrné modely hvězdných větrů

Při výpočtu zářivé síly jsme předpokládali, že hvězdný vítr je sféricky symetrický. Je však zřejmé, že tento předpoklad u mnohých hvězd platit nebude. Pomineme-li různé nehomogenity hvězdného větru, pak největší odchylku od sférické symetrie způsobuje rotace hvězdy. Rotace způsobí zakřivení povrchu hvězdy a díky gravitačnímu ztemnění pozmění efektivní teplotu jednotlivých bodů povrchu hvězdy. Právě rotace poskytla jeden z nadějných modelů pro vznik disku v okolí Be hvězd, model větrem stlačovaného disku (Bjorkman a Cassinelli 1993). Ačkoliv prvotní numerické výpočty tento model potvrzovaly (Owocki, Cranmer a Blondin 1994), právě přesné započtení zářivé síly ve vícerozměrném disku (Owocki, Cranmer a Gayley 1996, Petrenz a Puls 2000) ukázalo, že model Bjorkmana a Cassinelliho je, alespoň ve své původní podobě, neplatný. To však nic nemění na tom, že zahrnutí vícerozměrné struktury hvězdných větrů je jedním z dalších nutných kroků při budování reálných modelů hvězdných větrů.

3.5.5 Magnetické pole

Všechna dosavadní měření intenzity magnetického pole O hvězd byla negativní (viz. např. de Jong a kol. 2001, Landstreet 1980). To však znamená, že dosud známe pouze horní hranici jeho intenzity. Magnetická pole s intenzitou menší než je tato stanovená hranice však mohou ovlivňovat dynamiku hvězdného větru (Friend a MacGregor 1984, Poe a Friend 1986, MacGregor a Friend 1987). Proto jsou magnetická pole dalším nepříliš studovaným faktorem, který může ovlivňovat větry horkých hvězd. Navíc, chemicky pekuliární hvězdy spektrálního typu B mají magnetická pole a zřejmě také hvězdné větry. Konzistentní modely těchto větrů však zatím nebyly spočteny.

Část II

Modelování hvězdného větru

Kapitola 4

Modely vícesložkového větru

4.1 Způsob řešení hydrodynamických rovnic

V této kapitole je obecně popsána metoda řešení rovnic vícesložkového hvězdného větru, která je dále použita pro řešení jednotlivých modelů větru.

Naším cílem je nalézt numerické řešení stacionárních sféricky symetrických hydrodynamických rovnic, popisujících hvězdný vítr. Tyto rovnice pro jednotlivé složky mají v nejobecnějším případě tvar (1.48)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_a v_{r\,a}\right) = 0,$$

$$v_{r\,a}\frac{\mathrm{d}v_{r\,a}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\rho_a}\sum_{b\neq a} K_{ab} G\left(\frac{u_{ab}}{\alpha_{ab}}\right)\frac{u_{r,ab}}{u_{ab}} - g_a - \frac{1}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a_a^2\rho_a\right),$$

$$\frac{3}{2}k v_{r\,a}\frac{\rho_a}{m_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r} + a_a^2\rho_a\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 v_{r\,a}\right) = Q_a^{\mathrm{rad}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{b\neq a} K_{ab}\frac{2k\left(T_b - T_a\right)}{m_a + m_b}\frac{\exp\left(-\frac{u_{ab}^2}{\alpha_{ab}^2}\right)}{\alpha_{ab}} +$$
$$+\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a + m_b} K_{ab} G\left(\frac{u_{ab}}{\alpha_{ab}}\right) u_{ab}.$$

V rovnicích označuje g_a zrychlení, způsobované vnějšími silami a nově byl zaveden člen Q_a^{rad} popisující zářivý ohřev. Tyto rovnice však k popisu hvězdného větru často nestačí, kromě okrajových podmínek je často nutné řešit např. rovnice popisující obsazení jednotlivých hladin, rovnice pro elektrické pole a další.

4.1.1 Zvolená síť

Při numerickém řešení hydrodynamických rovnic není možné získat spojitou závislost hledaných parametrů (hustot, rychlostí a dalších) na poloměru. Naopak je nutné vybrat diskrétní síť bodů, ve kterých se budou jednotlivé rovnice řešit. Výsledkem numerického modelu pak není spojitý průběh hledaných veličin, ale pouze hodnoty těchto veličin v jednotlivých bodech sítě. Při zjemňování sítě by se pak získané numerické řešení mělo blížit přesnému řešení.

Protože budeme hledat řešení rovnic pro velký rozsah poloměrů, budou uzly sítě rozděleny logaritmicky. Označíme-li jako r_1 první bod sítě a jako r_{NR} poslední bod sítě, pak jednotlivé souřadnice uzlů sítě r_i jsou členy geometrické řady

$$r_i = q r_{i-1}, \tag{4.2}$$

kde kvocient q je dán vzorcem

$$q = \exp\left(\frac{\ln \frac{r_{\mathrm{NR}}}{r_1}}{\mathrm{NR} - 1}\right), \tag{4.3}$$

kde NR je počet uzlů sítě. Pro výpočet modelů byly použity dvě sítě. Podle toho, zda se počítá model pod kritickým bodem nebo nad kritickým bodem, označuje r_1 poloměr hvězdy nebo polohu kritického bodu. Protože je však vzdálenost mezi povrchem hvězdy a kritickým bodem typicky velmi malá, blíží se síť pod kritickým bodem k síti s lineárním rozložením bodů. Počet bodů sítě NR se pohybuje mezi $50 - 300$. První uzlový bod sítě je zvolen v místě, kde jsou zadány spodní okrajové podmínky.

4.1.2 Aproximace derivací

Jednotlivé derivace v rovnicích je možné aproximovat více způsoby. Označíme-li proměnnou, jejíž derivace je počítána (např. hustotu, rychlost a teplotu jednotlivých složek) jako X, pak je možné využít dvoubodovou aproximaci derivace

$$\left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\right|_{r=\overline{r}_i} \approx \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i},$$

kde pro rozdíl poloměrů Δr_i a pro průměr dvou poloměrů $\overline{r}_i$ byly použity vztahy

$$\Delta r_i = r_i - r_{i-1}, \tag{4.4a}$$

$$\overline{r}_i = \frac{1}{2}\left(r_i + r_{i-1}\right). \tag{4.4b}$$

Dále byla vyzkoušena metoda založená na použití tří bodů sítě

$$\left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_i} \approx \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{X_{i+1}-X_i}{\Delta r_{i+1}} + \frac{1}{2}\frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, & i < \mathrm{NR}, \\ \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, & i = \mathrm{NR}. \end{cases}$$

K numericky nejstabilnějšímu výpočtu modelů však vedla trojbodová metoda, ve které jsou jednotlivé derivace počítány následujícím způsobem:

$$\left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\right|_{r=r_i} \approx \left[\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}r}\right]_i \equiv \begin{cases} y_i \frac{X_{i+1}-X_i}{\Delta r_{i+1}} + (1-y_i)\frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, & i < \mathrm{NR}, \\ \frac{X_i - X_{i-1}}{\Delta r_i}, & i = \mathrm{NR}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Přitom y_i značí

$$y_i = \frac{r_i - \overline{r}_i}{\overline{r}_{i+1} - \overline{r}_i}. \tag{4.6}$$

Tímto způsobem jsou přibližně vyjádřeny rovnice ve všech vnitřních bodech sítě. Obdobně by bylo možné řešit také rovnice pro vnější hranici modelu (kde $i = \mathrm{NR}$). Byl však zvolen způsob, který vede k téměř shodným výsledkům, ale který je možné naprogramovat podstatně jednodušším způsobem. Hustota na vnější hranici je získávána přímo z rovnice kontinuity, ale rychlost a případně i další proměnné jsou získány extrapolací hodnot dvou předcházejících bodů. Okrajová podmínka pak odpovídá rovnosti derivací ve dvou posledních bodech sítě.

4.1.3 Metoda úplné linearizace

Hydrodynamické rovnice popisující hvězdný vítr (bez ohledu na to, zda se jedná o vítr jednosložkový nebo vícesložkový) je možné řešit několika různými způsoby. Často se využívají metody založené na hydrodynamické simulaci hvězdného větru. Přitom se sleduje vývoj systému, dokud vývoj nedospěje do stacionárního stavu. Tyto metody se často využívají především pro popis sféricky nesymetrických hvězdných větrů (Owocki, Cranmer a Blondin 1994, Petrenz a Puls 2000). Beutler (1979) vyvinul integrální metodu, kterou pro studium slunečního větru použil Bürgi (1992).

Rovnice popisující stacionární sféricky symetrický hvězdný vítr (3.64) je diferenciální rovnice prvního řádu. Proto je možné pro její řešení využít klasické numerické metody, navržené pro tento druh rovnic (viz. např. CAK).

Pro výpočet modelů hvězdných větrů jsme však zvolili Henyeyovu metodu (Henyey, Forbes a Gould 1964). V podstatě se jedná o Newton-Raphsonovu metodu, která je schopná řešit rovnice spolu s příslušnými okrajovými podmínkami. V rámci teorie hvězdných atmosfér bývá často tato metoda nazývána metodou úplné linearizace (Mihalas 1978). Tuto metodu pro výpočet modelu zářením urychlovaného větru využili Nobili a Turola (1988), pro výpočet vícesložkového hvězdného větru byla použita Babelem (1995, 1996).

Princip metody je poměrně jednoduchý. Nejprve zvolíme síť, na které budeme rovnice řešit (viz. kap. 4.1.1). Rovnice, které řešíme (hydrodynamické rovnice spolu s příslušnými okrajovými podmínkami), je možné aproximovat pomocí algebraických rovnic, ve kterých jsou jednotlivé derivace zapsány pomocí diferencí (podrobněji v kap. 4.1.2). Tyto algebraické rovnice je možné formálně zapsat pomocí nelineárního operátoru P jako

$$\mathsf{P}\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{4.7}$$

kde $\boldsymbol{\psi}$ je sloupcový vektor proměnných (jeho složkami jsou typicky hustoty, rychlosti a případě další proměnné popisující model větru v jednotlivých uzlech sítě). Newtonova-Raphsonova metoda využívá iterační postup (Hubeny a Lanz 1992)

$$\mathsf{J}^n \delta\boldsymbol{\psi}^{n+1} = -\mathsf{P}^n\boldsymbol{\psi}^n, \tag{4.8}$$

ve kterém je vektor $\boldsymbol{\psi}^n$ řešením v iteračním kroku n a J^n je Jacobián ve stejném iteračním kroku,

$$J^n_{kl} = \frac{\partial P_k}{\partial \psi_l}. \tag{4.9}$$

Přitom ψ^0 je počáteční odhad řešení, popsaný v kapitole (4.1.5). Ze systému rovnic (4.8) lze pak vypočíst opravu $\delta\boldsymbol{\psi}^{n+1}$, ze které je možné získat odhad řešení v $n+1$ kroku. Pro numerické řešení systému lineárních rovnic byl použit numerický balíček `LAPACK`, vyvinutý na University of Tennessee. Konkrétní tvary operátoru P i Jacobiánu J jsou uvedeny v dodatku B.1 pro různé druhy modelů hvězdných větrů.

Při výpočtu oprav podle rovnice (4.8) je vhodné omezit jejich velikost tak, aby při jednom kroku nedocházelo k příliš velké změně vektoru $\boldsymbol{\psi}$. Bez zavedení tohoto omezení by se vektor proměnných mohl dostat mimo oblast konvergence Newtonovy-Raphsonovy metody. Při výpočtu modelu pod kritickým bodem velikost opravy nepřesahuje $0{,}7$ velikosti hodnoty v předchozím kroku, při výpočtu nad kritickým bodem nepřesahuje $0{,}1$ hodnoty v předchozím kroku. Ve vícesložkovém modelu je podobně omezena také změna rozdílu rychlostí složek.

4.1.4 Zahrnutí kritického bodu

Jediný problém představuje zahrnutí kritického bodu. Ačkoliv původní Henyeyovu metodu lze využít pro započtení kritického bodu (Nobili a Turola 1988), abychom se vyhnuli některým numerickým problémům, zvolili jsme jiný postup. Smyslem zahrnutí rovnice kritického bodu je získání takové okrajové hustoty složky urychlované zářením ρ_1, pro kterou model hvězdného větru hladce prochází kritickým bodem. Proto nejprve vybereme počáteční odhad hustoty na spodním okraji ρ_1, pro kterou spočteme model větru pomocí posloupnosti Newtonových-Raphsonových iterací. Samozřejmě je vhodné zvolit takovou hustotu, která co možná nejlépe odpovídá hledanému CAK řešení, protože její výběr ovlivňuje rychlost výpočtu. Pokud model konverguje a pokud v žádném svém bodě nesplňuje kritickou podmínku (4.19), pak okrajová hustota je menší, než hledaná (viz. obr. 3.3). Naopak, pokud model protíná křivku singulárního lokusu (viz. obr. 3.3), nebo dokonce nekonverguje, pak je okrajová hustota ρ_1 větší, než hledaná hustota odpovídající CAK řešení. Podle výsledku je tedy nutné změnit hodnotu ρ_1 a opakovat celý postup znovu, dokud není získána hodnota okrajové hustoty odpovídající CAK řešení. Ve všech modelech je tato hodnota spočtena s přesností vyšší než 1%[1]. Tato metoda bývá v literatuře označována jako „shooting“ metoda.

V okamžiku, když je spočtena okrajová hustota ρ_1 odpovídající CAK řešení, známe také hledaný CAK model od povrchu hvězdy až do kritického bodu. V tomto místě je pak nutné navázat řešení, které jsme získali (řešení prvního typu) na řešení, které je spojité pro $r \to \infty$. Proto nyní spočteme model pomocí posloupnosti Newtonových-Raphsonových iterací s hraniční hustotou a rychlostí zadanou v kritickém bodě (spočtenými předešlým postupem). Spojením obou modelů získáme hledaný CAK model hvězdného větru.

4.1.5 Počáteční model pro Newton-Raphsonovu metodu

Rychlost hvězdného větru se často aproximuje vztahem typu

$$v_r(r) = v_r(R_*) + \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^{\beta} v_\infty, \tag{4.10}$$

ve kterém $v_r(R_*)$ odpovídá rychlosti na povrchu hvězdy a bezrozměrný parametr β je řádově roven jedné (viz. např. Lamers a Rogerson 1978, Hamann 1981, Drew 1989). Proto byl také tento vztah použit pro počáteční odhad rychlosti. Pokud je nutné zadat rychlosti více složek, pak pro absorbující složku byla zvolena rychlost poněkud větší než rychlost neabsorbující složky,

$$v_{r\mathrm{i}}(r) = \left[1 + \xi \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^{\beta'}\right] v_{r\mathrm{p}}(r), \tag{4.11}$$

kde ξ je vhodný malý parametr (řádu $10^{-5} - 10^{-2}$) a koeficient β' je opět roven přibližně jedné. Počáteční hustoty složek byly získávány pomocí rovnice kontinuity (1.48a). Pro zadání počáteční rychlosti a hustoty elektronů byla využita rovnice kvazineutrality (4.86) a podmínka nulovosti celkového proudu (4.87).

4.1.6 Výpočet $G(x)$ a $G'(x)$ pro malá x

Pro malé hodnoty argumentu je výpočet Chandrasekharovy funkce $G(x)$ z numerických důvodů nepřesný (počítá se podíl dvou malých čísel). V tomto případě proto není vhodné počítat Chandrasekharovu funkci přímo ze vzorce (1.44), ale použít jejího přibližného vyjádření. Funkci $\exp\left(-x^2\right)$ lze přibližně vyjádřit Taylorovým polynomem čtvrtého řádu

$$\mathrm{e}^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4. \tag{4.12}$$

[1] Při výpočtu známe hustotu vyšší, než je hustota odpovídající CAK hodnotě ρ_1^+ a hustotu nižší ρ_1^-. Přesnost, s jakou byla CAK hustota nalezena, pak udává podíl $\left(\rho_1^+ - \rho_1^-\right)/\rho_1^+$.

Protože funkce $\Phi(x)$ je definována jako $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp\left(-t^2\right) \mathrm{d}t$, platí v rámci uvedeného přiblížení

$$\Phi(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5 \right). \tag{4.13}$$

Namísto přesného vyjádření (1.44) lze pro funkci $G(x)$ pro malé hodnoty jejího argumentu napsat vzorec

$$G(x) \approx \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}x^2 \right) \tag{4.14}$$

a podobně pro funkci $G'(x)$ lze napsat

$$G'(x) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{5}x^2 \right). \tag{4.15}$$

Numerické testy ukázaly, že pro $x < 0{,}1$ je možné dosáhnout s použitím tohoto vzorce relativní chyby menší než 10^{-5}. Pro větší hodnoty parametru x byl již použit přesný vzorec (1.44).

4.2 Jednosložkový vítr

Než přejdeme k popisu vícesložkového větru, popíšeme postup výpočtu modelů jednosložkového větru. Tyto jednoduché modely pak budou sloužit pro porovnání se složitějšími, vícesložkovými modely.

4.2.1 Izotermický vítr

Rovnice popisující model

Sféricky symetrický, izotermický a stacionární hvězdný vítr je popsán rovnicemi kontinuity hmotnosti a hybnosti (3.57a) a (3.57b)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \rho v_r\right) = 0, \tag{4.16a}$$

$$v_r \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = g^{\mathrm{rad}} - g - \frac{a^2}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}. \tag{4.16b}$$

Přitom síla záření v CAK aproximaci je dána vzorcem (3.98)

$$g^{\mathrm{rad}} = \frac{\mathit{\Gamma} G \mathfrak{M} k}{r^2} \left(\frac{N_{\mathrm{e}}/W}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}} \right)^{\delta} \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - \left(1+\sigma\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma\left(1+\sigma\right)^{\alpha}} \left(\frac{1}{\sigma_{\mathrm{e}} v_{\mathrm{th}} \rho} \frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} \right)^{\alpha}, \tag{4.17}$$

kde kosinus polovičního úhlového rozměru hvězdy μ_c, faktor zředění W a proměnná σ jsou zavedeny vztahy (2.24,2.27,3.42). V případě jednosložkových modelů hvězdných větrů horkých hvězd je možné předpokládat úplnou ionizaci atomů vodíku, $N_{\mathrm{e}} \approx \rho/m_{\mathrm{p}}$.

Spodní okrajové podmínky

Abychom mohli řešit systém rovnic (4.16), je nutné znát příslušné okrajové podmínky. V našem případě je vhodné zadat hustotu a rychlost větru v blízkosti hvězdy. Protože však požadujeme, aby řešení hladce procházelo bodem (3.93), zmenšuje se počet okrajových podmínek na jedinou. Tou může být například zadaná rychlost na povrchu hvězdy. Protože pro případ hvězdného větru předpokládáme, že rychlost větru klesá na povrchu hvězdy k nule, je možné zadat v podstatě libovolnou, ale dostatečně malou

Tabulka 4.1: Parametry síly záření použité při výpočtu tabulky 4.2.

$T_{\rm eff}$ [K]	k	α	δ
20 000	0,32	0,565	0,02
30 000	0,17	0,59	0,09
40 000	0,124	0,64	0,07
50 000	0,124	0,64	0,07

hodnotu (ve srovnání s konečnými rychlostmi větru). Numerické testy ukazují, že výsledné modely na její přesné hodnotě závisejí pouze zanedbatelně, protože v blízkosti hvězdy existuje velký gradient rychlosti. Důležité je pouze to, aby okrajová rychlost byla menší než rychlost v kritickém bodě (3.93). Proto byla jako krajová rychlost zvolena izotermická rychlost zvuku,

$$v_r(R_*) = a. \tag{4.18}$$

Druhou z podmínek, určující okrajovou hodnotu hustoty, je kritická podmínka (3.93), která má pro sílu záření (4.17) tvar

$$v_r - \frac{a^2}{v_r} - \frac{\partial g^{\rm rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r\right)} = 0, \tag{4.19}$$

ve kterém je derivace zářivé síly podle derivace rychlosti dána vztahem

$$\frac{\partial g^{\rm rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r\right)} = g^{\rm rad}\left[\alpha\left(\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right)^{-1} + x_{\mathrm{d}\sigma}\frac{r}{v_r}\right]. \tag{4.20}$$

Ve vzorci bylo využito označení

$$x_{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{x_\sigma}\frac{(1+\sigma)^\alpha - \mu_c^2\left(1+\sigma\mu_c^2\right)^\alpha}{\left(1-\mu_c^2\right)\sigma\left(1+\sigma\right)^\alpha} - \frac{1}{\sigma} - \frac{\alpha}{1+\sigma}, \tag{4.21}$$

$$x_\sigma = \frac{(1+\sigma)^{\alpha+1} - \left(1+\sigma\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma\left(1+\sigma\right)^\alpha}. \tag{4.22}$$

Rovnice (4.19) je shodná s rovnicí (3.68) až na poslední člen, který se nově objevuje díky vylepšení úhlové integrace (viz. kap. 3.4.2). Tato podmínka sice slouží pro výpočet okrajové hodnoty hustot, není však zadána na spodním okraji. Aby bylo tato podmínka splněna, byl použit numerický postup popsaný v kap. 4.1.4.

Numerické řešení rovnic

Hledaný vektor proměnných, popisující jednosložkový izotermický hvězdný vítr, byl zvolen ve tvaru

$$\boldsymbol{\psi} = \left(\rho_1, v_{r\,1}, \rho_2, v_{r\,2}, \ldots, \rho_{\rm NR}, v_{r\,\rm NR}\right)^{\rm T}, \tag{4.23}$$

kde index čísluje jednotlivé uzlové body. Tvar operátoru P popisujícího jednotlivé hydrodynamické rovnice a k němu příslušející Jacobián jsou uvedeny v dodatku B.1. Způsob numerického řešení výsledných algebraických rovnic byl popsán v kapitole 4.1.

Porovnání modelů s pozorováním

Porovnání výsledků získaných pomocí této modifikované CAK teorie a výsledků pozorování je ukázáno v tab. 4.2. Pozorované hodnoty a parametry síly záření uvedené v tabulce 4.1 jsou převzaty z práce Pauldrach, Puls a Kudritzki (1986). Je patrné, že tyto poměrně jednoduché modely jsou schopné poměrně dobře předpovědět pozorované hodnoty rychlosti ztráty hmoty $\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t$ a konečné rychlosti v_∞.

Tabulka 4.2: Porovnání teoretických modelů hvězdných větrů s pozorováním. Přitom $v_\infty^{\rm obs}$ označuje pozorovanou hodnotu konečné rychlosti, $v_\infty^{\rm teor}$ hodnotu spočtenou.

Hvězda	$T_{\rm eff}$ [K]	$\mathfrak{M}$ [g $\cdot 10^{35}$]	R_* [cm $\cdot 10^{12}$]	$\dot{\mathfrak{M}}_{\rm obs}$ [10^{-6}	$\dot{\mathfrak{M}}_{\rm teor}$ $\cdot\ \mathfrak{M}_\odot$/rok]	$v_\infty^{\rm obs}$ [km s^{-1}]	$v_\infty^{\rm teor}$	Zdroj určení $v_\infty^{\rm obs}$
ε Ori	28 000	1,79	2,59	3,1	4,6	2010	1880	Abbott a kol. (1980)
ζ Ori A	30 000	1,83	2,09	2,3	2,3	2250	2290	Abbott a kol. (1980)
9 Sgr	50 000	1,31	0,85	4,0	5,1	3440	3280	Abbott (1984)
HD 48099	39 000	0,88	0,76	0,63	0,81	3500	3280	Garmany (1981)
HD 42088	40 000	0,27	0,40	0,20	0,26	2600	2500	Garmany (1981)
λ Cep	42 000	1,05	1,18	4,0	7,1	2500	2250	Garmany (1981)

4.2.2 Neizotermický vítr

Rovnice

Pro případ neizotermického sféricky symetrického hvězdného větru je nutné k rovnicím popisujícím izotermický vítr (4.16) připojit rovnici popisující teplotu (1.49c),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho v_r\right) = 0, \tag{4.24a}$$

$$v_r\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r} = g^{\rm rad} - g - \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a^2\rho\right), \tag{4.24b}$$

$$\frac{3}{2}\rho v_r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a^2\right) + a^2\rho\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 v_r\right) = Q^{\rm rad}, \tag{4.24c}$$

kde člen $Q^{\rm rad}$ popisuje ochlazování a ohřev zářením. Do jeho výpočtu byly zahrnuty pouze volně-volné a vázaně-volné přechody atomu H, tedy

$$Q^{\rm rad} = Q_{\rm ff}^H + Q_{\rm bf}^H - Q_{\rm ff}^C - Q_{\rm bf}^C, \tag{4.25}$$

kde jednotlivé členy mají tvar (Kubát, Puls, Pauldrach 1999)

$$Q_{\rm ff}^H = 4\pi N_{\rm e}N_{\rm H^+}\int_0^\infty \alpha_{\rm ff}(\nu,T)J_\nu\mathrm{d}\nu, \tag{4.26a}$$

$$Q_{\rm ff}^C = 4\pi N_{\rm e}N_{\rm H^+}\int_0^\infty \alpha_{\rm ff}(\nu,T)\left(J_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-h\nu/kT}\mathrm{d}\nu, \tag{4.26b}$$

$$Q_{\rm bf}^H = 4\pi\sum_l N_l\int_0^\infty \alpha_{{\rm bf},l}(\nu)J_\nu\left(1-\frac{\nu_l}{\nu}\right)\mathrm{d}\nu, \tag{4.26c}$$

$$Q_{\rm bf}^C = 4\pi\sum_l N_l\int_0^\infty \alpha_{{\rm bf},l}(\nu)\left(J_\nu + \frac{2h\nu^3}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-h\nu/kT}\left(1-\frac{\nu_l}{\nu}\right)\mathrm{d}\nu, \tag{4.26d}$$

kde $N_{\rm H^+}$ je koncentrace ionizovaného vodíku, N_l je obsazení hladiny l atomu vodíku (v modelech jsou uvažovány pouze první dvě hladiny), které lze za předpokladu LTE získat z Boltzmannova respektive Sahova rozdělení, $\alpha_{\rm ff}(\nu,T)$ je volně-volný absorpční účinný průřez závislý na teplotě a frekvenci ν, J_ν je střední intenzita záření, $\alpha_{{\rm bf},l}$ je fotoionizační účinný průřez, h značí Planckovu konstantu, c rychlost světla a ν_l frekvenci příslušné ionizační hrany.

Jednotlivé účinné průřezy mají tvar (Mihalas 1978)

$$\alpha_{\rm ff}(\nu,T) = \frac{4e^6}{3ch}\left(\frac{2\pi}{3kTm_{\rm e}^3}\right)^{1/2}\frac{\overline{g}_{\rm III}(\nu,T)}{\nu^3}, \tag{4.27a}$$

$$\alpha_{\mathrm{bf},l}(\nu) = \frac{64\pi^4 m_{\mathrm{e}} e^{10}}{3\sqrt{3}ch^6} \frac{g_{\mathrm{II}}(l,\nu)}{l^5\nu^3}, \tag{4.27b}$$

kde $\overline{g}_{\mathrm{III}}(\nu,T)$ a $g_{\mathrm{II}}(l,\nu)$ jsou odpovídající gauntovské faktory.

Veličinu J_ν je možné získat výpočtem syntetického spektra. Přímým výstupem je veličina $H(R_*,\nu)$, která souvisí s intenzitou záření (pokud intenzita nezávisí na úhlu) vztahem

$$H(R_*,\nu) = \frac{1}{2}\int_0^1 I(R_*,\nu)\mu\mathrm{d}\mu = \frac{1}{4}I(R_*,\nu). \tag{4.28}$$

Pro hledanou střední intenzitu záření pak s využitím vzorce (2.26) platí

$$J(r,\nu) = WI(R_*,\nu) = 4WH(R_*,\nu). \tag{4.29}$$

Eddingtonovský tok $H(R_*,\nu)$ byl spočten pomocí sféricky symetrických statických modelů vodíkových atmosfér (Kubát 2001).

Kritický bod

Díky započtení rovnice pro teplotu je nutné poněkud pozměnit rovnici kritického bodu (4.19). Oproti podmínce určující kritický bod izotermického větru (3.93) přibývá v rovnici kritického bodu neizotermického větru člen pocházející z rovnice pro teplotu (4.24c). Rovnice pro kritický bod tak nabývá tvar

$$v_r - \frac{5}{3}\frac{a^2}{v_r} - \frac{\partial g^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r\right)} = 0. \tag{4.30}$$

Přitom vzorec pro $\partial g^{\mathrm{rad}}/\partial\left(\mathrm{d}v_r/\mathrm{d}r\right)$ je uveden ve vztahu (4.20).

Spodní okrajové podmínky

Okrajová podmínka pro rychlost je shodná s podmínkou (4.18), použitou v případě izotermického větru. Pro hledání okrajové hustoty byl použit postup popsaný v kap. 4.1.4. Pokud je tato okrajová hustota nalezena, pak model hladce prochází kritickým bodem (4.30).

K těmto dvěma okrajovým podmínkám je nutné vybrat třetí podmínku pro teplotu. Ta byla zvolena tak, aby se základna větru nacházela v zářivé rovnováze, tedy

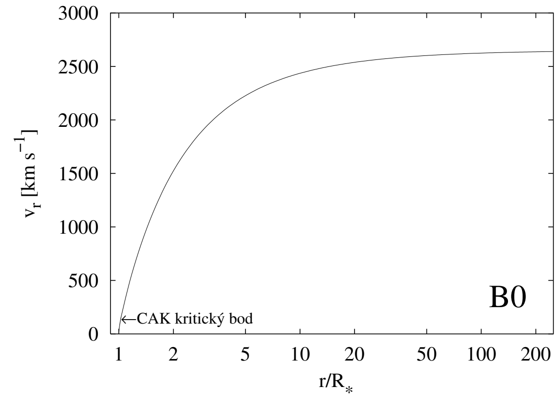
$$Q^{\mathrm{rad}}(R_*) = 0. \tag{4.31}$$

Numerické řešení rovnic

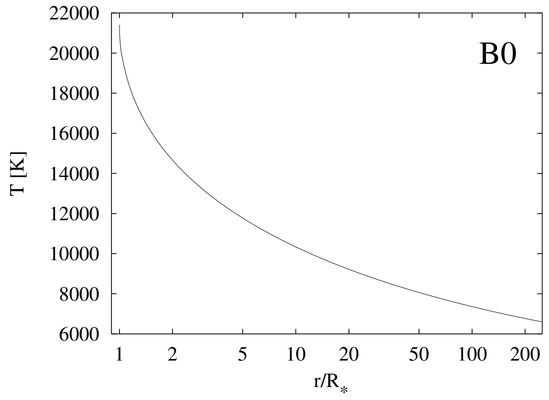
Způsob numerického řešení rovnic pro neizotermický vítr je v zásadě shodný jako pro izotermický vítr (podrobněji viz. kap. 4.1). Na rozdíl od modelu izotermického větru (4.23) vektor proměnných obsahuje teplotu větru v jednotlivých uzlových bodech sítě,

$$\boldsymbol{\psi} = \left(\rho_1, v_{r\,1}, T_1, \rho_2, v_{r\,2}, T_2, \ldots, \rho_{\mathrm{NR}}, v_{r\,\mathrm{NR}}, T_{\mathrm{NR}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.32}$$

V operátoru P jsou kromě členu popisujících rovnici kontinuity a pohybovou rovnici také členy popisující energiovou rovnici a okrajové podmínky. Operátor P je však spočten pomocí stejného postupu jako operátor P pro izotermický vítr, který je podrobně popsán v dodatku (B.1).



(a)



(b)

Obrázek 4.1: Průběh rychlosti a teploty v modelu větru hvězdy B0

Tabulka 4.3: Veličiny popisující hvězdu spektrálního typu B0 a její jednosložkový vítr

$\mathfrak{M}$ $[\mathfrak{M}_\odot]$	R_* $[R_\odot]$	$T_{\rm eff}$ [K]	k	α	δ
14,57	5,80	29 900	0,156	0,609	0,120

Modely

Model neizotermického větru hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu B0 je nakreslen na obr. 4.1. Hmotnost, poloměr a efektivní teplotu odpovídající tomuto spektrálnímu typu uvádí Harmanec (1988), parametry k, α a δ popisující sílu záření jsou převzaty z práce Abbotta (1982). Uvedené veličiny jsou shrnuty v tabulce 4.3.

Z numerického modelu vyplývá, že teplota hvězdného větru je určena především zářivým ohřevem a ochlazováním. Díky tomu je vítr v zářivé rovnováze a jeho teplota klesá spolu s klesající střední intenzitou záření J. Tento závěr je v souladu s podrobnějšími výpočty tepelné rovnováhy větrů, tak jak je publikovala Drew (1985, 1989).

4.3 Dvojsložkový izotermický vítr

Atmosféry hvězd hlavní posloupnosti se skládají v převážné většině z vodíku, hélia a menšího množství dalších prvků, kovů. Avšak právě tyto v podstatě stopové prvky získávají převážnou část hybnosti, kterou větru uděluje záření. Tak například pro hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu O většinu hybnosti získávají uhlík, dusík a kyslík, pro chladnější hvězdy spektrálního typu B pak kromě uhlíku také například síra a železo (Abbott 1982). Vidíme tedy, že atomy, které jsou ve hvězdném větru urychlovány zářením, tvoří jen nepatrnou část hmotnosti větru. Jelikož z pozorování hvězdných větrů vyplývá, že se hvězdný vítr pohybuje jako celek, je zřejmé, že musí docházet k předávání hybnosti mezi urychlovanými (absorbujícími) ionty a neabsorbujícími (pasivními) ionty (převážně vodíkem).

Zřejmě nejpravděpodobnější proces, při kterém může docházet k předávání hybnosti mezi jednotlivými složkami hvězdného větru, jsou Coulombovské srážky nabitých částic. Neutrálních částic je ve hvězdném větru relativně velmi málo a navíc srážky neutrálních částic jsou méně efektivní, než srážky nabitých částic (Braginskij 1963), proto jejich příspěvek můžeme zanedbat. Nejjednodušším modelem, který je schopen popsat předávání hybnosti mezi menšinovými, absorbujícími ionty a většinovými, neabsorbujícími ionty je dvojsložkový izotermický model. Tento model samozřejmě není schopen podrobně popsat zářením urychlovaný vítr jednotlivých hvězd, ale s jeho pomocí je možné vystihnout základní jevy, vyskytující se ve vícesložkovém hvězdném větru. Na jeho základě je též možné odhadnout, pro které hvězdy lze použít jednodušší, jednosložkový model větru (Krtička a Kubát 2000).

Budeme tedy předpokládat, že stacionární, sféricky symetrický a izotermický (teplotu větru položíme rovnu efektivní teplotě hvězdy T_{eff}) hvězdný vítr se skládá ze dvou různých složek. Jednou ze složek jsou vodíkové ionty s hmotností m_{p} a nábojem q_{p} rovným elementárnímu náboji, popsané rychlostí $v_{r\mathrm{p}}$ a hustotou ρ_{p}. Druhou složkou jsou absorbující ionty (kovy) s hmotností m_{i} a nábojem q_{i}, popsané rychlostí $v_{r\mathrm{i}}$ a hustotou ρ_{i}.

4.3.1 Rovnice

Uvažovaný hvězdný vítr je popsán jednak soustavou dvou rovnic kontinuity (1.48a),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}\right) = 0, \tag{4.33a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}\right) = 0, \tag{4.33b}$$

jednak soustavou rovnic kontinuity hybnosti (1.48b)

$$v_{r\mathrm{p}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} = -g + \frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}R_{\mathrm{pi}} - \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{\rho_{\mathrm{p}}}\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}, \tag{4.34a}$$

$$v_{r\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} - g - \frac{1}{\rho_{\mathrm{i}}}R_{\mathrm{pi}} - \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{\rho_{\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}, \tag{4.34b}$$

kde a_a^2 je kvadrát izotermické rychlosti zvuku, $a_a^2 = kT/m_a$ (index a označuje jednotlivé složky), ve vzorci pro gravitační zrychlení je započítána oprava na absorpci na volných elektronech (viz. 3.58, 3.59), $g = G\mathfrak{M}(1-\mathit{\Gamma})/r^2$ a síla tření (na jednotku objemu) je dána vzorcem (1.47a)

$$R_{\mathrm{pi}} = N_{\mathrm{p}}N_{\mathrm{i}}\frac{4\pi\ln\Lambda q_{\mathrm{p}}^2q_{\mathrm{i}}^2}{kT}G\left(\frac{u_{\mathrm{pi}}}{\alpha_{\mathrm{pi}}}\right). \tag{4.35}$$

Přitom jsou relativní rychlost u_{pi} a střední tepelná rychlost α_{pi} dány vztahy (1.42a,1.42b)

$$u_{\mathrm{pi}} = v_{r\mathrm{i}} - v_{r\mathrm{p}}, \tag{4.36a}$$

$$\alpha_{\mathrm{pi}}^2 = 2kT\frac{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{p}}m_{\mathrm{i}}}. \tag{4.36b}$$

Vyjádření síly záření $g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}$ je v zásadě obdobné jako v jednosložkovém případě (viz. 4.17). Tento vztah je však nutné poněkud pozměnit, protože Abbott (1982) svoji parametrizaci zvolil pro jednosložkový hvězdný vítr. Ve vícesložkovém případě je situace poněkud složitější. Jednak zářivá síla závisí pouze na hustotě absorbující složky, nikoliv na celkové hustotě větru. Toho je možné dosáhnout zavedením Sobolevovy optické hloubky ve tvaru (viz. 3.48)

$$t = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\sigma_{\mathrm{e}}\rho_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{th}}\left(\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right)^{-1}, \tag{4.37}$$

kde $\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}$ je podíl hustoty kovů na celkové hustotě plynu ve hvězdné atmosféře. Naopak, ve výrazu pro opravný člen závislý na hustotě elektronů (vztah 3.95) je nutné ponechat skutečnou hustotu elektronů. Dále, výraz (4.17) udává zářivou sílu na jednotku celkové hustoty (zářivé zrychlení) zatímco v rovnici (4.34b) vystupuje zářivá síla na jednotku hmotnosti absorbující složky. Uvedené požadavky splňuje zářivé zrychlení ve tvaru

$$g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\frac{\mathit{\Gamma}G\mathfrak{M}k}{r^2}\left(\frac{N_{\mathrm{e}}/W}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{\delta}\frac{(1+\sigma)^{\alpha+1}-\left(1+\sigma\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma\left(1+\sigma\right)^{\alpha}}\left(\frac{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}{\sigma_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{th}}\rho_{\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right)^{\alpha}. \tag{4.38}$$

Přitom hodnota konstanty $\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}$, udávající podíl hustoty absorbující složky na celkové hustotě ve hvězdné atmosféře, byla zvolena odpovídající slunečnímu podílu hmotnosti kovů (převzatého z programu TLUSTY, Hubený 1988), $\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}} = 0{,}0127$. Koncentrace elektronů je položena rovna koncentraci vodíkových atomů.

4.3.2 Singulární body

Singulární body dvojsložkového větru budeme sledovat obdobným způsobem jako v případě jednosložkového větru v kap. 3.3.1. Vyjdeme přímo z hydrodynamických rovnic (1.48a,1.48b). Vynecháme-li index r u radiální rychlosti, pak tyto rovnice mají ve dvojsložkovém případě tvar

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho_{\mathrm{p}} v_{\mathrm{p}}\right) = 0, \tag{4.39a}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{i}}}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{i}}\right) = 0, \tag{4.39b}$$

$$\frac{\partial v_{\mathrm{p}}}{\partial t} + v_{\mathrm{p}}\frac{\partial v_{\mathrm{p}}}{\partial r} = -g + \frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}R_{\mathrm{pi}} - \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{\rho_{\mathrm{p}}}\frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}}{\partial r}, \tag{4.39c}$$

$$\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial t} + v_{\mathrm{i}}\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial r} = g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} - g - \frac{1}{\rho_{\mathrm{i}}}R_{\mathrm{pi}} - \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{\rho_{\mathrm{i}}}\frac{\partial \rho_{\mathrm{i}}}{\partial r}. \tag{4.39d}$$

Systém rovnic nyní převedeme do kvazilineárního tvaru zderivováním podle poloměru

$$\frac{\partial \rho_{r\mathrm{p}}}{\partial t} + v_{\mathrm{p}}\frac{\partial \rho_{r\mathrm{p}}}{\partial r} + \rho_{\mathrm{p}}\frac{\partial v_{r\mathrm{p}}}{\partial r} \equiv F_1(r,\rho_{\mathrm{p}},v_{\mathrm{p}},\rho_{r\mathrm{p}},v_{r\mathrm{p}}), \tag{4.40a}$$

$$\frac{\partial \rho_{r\mathrm{i}}}{\partial t} + v_{\mathrm{i}}\frac{\partial \rho_{r\mathrm{i}}}{\partial r} + \rho_{\mathrm{i}}\frac{\partial v_{r\mathrm{i}}}{\partial r} \equiv F_2(r,\rho_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}},\rho_{r\mathrm{i}},v_{r\mathrm{i}}), \tag{4.40b}$$

$$\frac{\partial v_{r\mathrm{p}}}{\partial t} + v_{\mathrm{p}}\frac{\partial v_{r\mathrm{p}}}{\partial r} + \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{\rho_{\mathrm{p}}}\frac{\partial \rho_{r\mathrm{p}}}{\partial r} \equiv F_3(r,\rho_{\mathrm{p}},v_{\mathrm{p}},\rho_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}},\rho_{r\mathrm{p}},v_{r\mathrm{p}},\rho_{r\mathrm{i}},v_{r\mathrm{i}}), \tag{4.40c}$$

$$\frac{\partial v_{r\mathrm{i}}}{\partial t} + v_{\mathrm{i}}\frac{\partial v_{r\mathrm{i}}}{\partial r} + \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{\rho_{\mathrm{i}}}\frac{\partial \rho_{r\mathrm{i}}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}}{\partial v_{r\mathrm{i}}}\frac{\partial v_{r\mathrm{i}}}{\partial r} \equiv F_4(r,\rho_{\mathrm{p}},v_{\mathrm{p}},\rho_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}},\rho_{r\mathrm{p}},v_{r\mathrm{p}},\rho_{r\mathrm{i}},v_{r\mathrm{i}}). \tag{4.40d}$$

V těchto rovnicích, podobně jako v jednosložkovém případě, značí index r derivaci podle poloměru. Tento systém rovnic je samozřejmě nutné doplnit vztahy pro derivace jednotlivých proměnných,

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{p}}}{\partial r} \equiv F_5(\rho_{r\mathrm{p}}) = \rho_{r\mathrm{p}}, \tag{4.40e}$$

$$\frac{\partial v_{\mathrm{p}}}{\partial r} \equiv F_6(v_{r\mathrm{p}}) = v_{r\mathrm{p}}, \tag{4.40f}$$

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{i}}}{\partial r} \equiv F_7(\rho_{r\mathrm{i}}) = \rho_{r\mathrm{i}}, \tag{4.40g}$$

$$\frac{\partial v_{\mathrm{i}}}{\partial r} \equiv F_8(v_{r\mathrm{i}}) = v_{r\mathrm{i}}. \tag{4.40h}$$

Zavedeme-li nyní vektor proměnných

$$\boldsymbol{u} = \left(\rho_{r\mathrm{p}},v_{r\mathrm{p}},\rho_{r\mathrm{i}},v_{r\mathrm{i}},\rho_{\mathrm{p}},v_{\mathrm{p}},\rho_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}}\right)^{\mathrm{T}}, \tag{4.41}$$

pak lze systém kvazilineárních parciálních diferenciálních rovnic (4.40) zapsat pomocí formálně stejného tvaru, jako v případě jednosložkového větru (3.83)

$$\mathsf{A}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial r} + \mathsf{B}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = \boldsymbol{F}, \tag{4.42}$$

kde ovšem jednotlivé matice A, B a vektor $\boldsymbol{F}$ mají poněkud složitější tvar

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} v_\mathrm{p} & \rho_\mathrm{p} & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ \frac{a_\mathrm{p}^2}{\rho_\mathrm{p}} & v_\mathrm{p} & 0 & 0 & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & v_\mathrm{i} & \rho_\mathrm{i} & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & \frac{a_\mathrm{i}^2}{\rho_\mathrm{i}} & v_\mathrm{i} - g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad} & 0\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\;0\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;1\;0\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;1\;0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\;0\;0\;1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;1\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;1\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;1\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \\ 0\;0\;0\;0\;0\;0\;0\;0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Charakteristická rovnice

$$\|\mathsf{A} - \tau \mathsf{B}\| = 0, \tag{4.44}$$

ve které bylo použito označení $\tau = dr/dt$, dává celkem čtyři sady charakteristik, z nichž vždy dvě charakteristiky přísluší jednotlivým složkám,

$$\tau = v_\mathrm{p} \pm a_\mathrm{p}, \tag{4.45a}$$

$$\tau = v_\mathrm{i} - \frac{1}{2} g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2} g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad}\right)^2 + a_\mathrm{i}^2}. \tag{4.45b}$$

Je patrné, že jednotlivé charakteristiky popisují vlny šířící se v různých složkách větru. Nabízí se však otázka, zda jsou tyto módy reálné. Důležitý je případ společného toku obou složek, kdy se rychlosti jednotlivých složek podstatně neliší. V tomto případě očekáváme, že jeden z módů dvojsložkových vln (4.45) splývá s Abbottovými vlnami v jednosložkovém větru (3.86). Tak tomu však není, protože v dvojsložkovém případě je zářivé zrychlení podstatně vyšší než v jednosložkovém (je počítáno na jednotku hmotnosti absorbující složky). Numerické testy dále ukazují, že z tohoto důvodu hvězdný vítr singulárním bodem absorbující složky (4.45b) vůbec neprochází. Z těchto úvah vyplývá, že z charakteristické rovnice (4.45b) nelze, na rozdíl od jednosložkové charakteristické rovnice (3.86), vyjít při hledání podmínky pro okrajovou hustotu větru.

4.3.3 Šíření vln ve dvojsložkovém větru

Zřejmý nesoulad mezi rovnicemi charakteristik v jednosložkovém a dvojsložkovém modelu vede k otázce, zda rovnice (4.45b) popisuje šíření stabilních akusto-optických vln ve dvojsložkovém větru. Pro hledání odpovědi na tuto otázku použijeme lineární analýzu hydrodynamických rovnic (4.39). Budeme předpokládat, podobně jako v kapitole 3.3.2, že odchylky hustot $\delta\rho_\mathrm{p}$, $\delta\rho_\mathrm{i}$ a rychlostí δv_p, δv_i, od původního stacionárního stavu, charakterizovaného proměnnými $\rho_{0,\mathrm{p}}$, $v_{0,\mathrm{p}}$,$\rho_{0,\mathrm{i}}$, $v_{0,\mathrm{i}}$ a $v_{0,\mathrm{i}} - v_{0,\mathrm{p}}$ jsou malé. Šíření vln budeme sledovat ve dvou lokálních inerciálních soustavách spojených se stacionárním pohybem jednotlivých složek větru ve zvoleném bodu,

$$r_\mathrm{p} = r' - v_\mathrm{p}(r')t, \tag{4.46a}$$

$$r_\mathrm{i} = r' - v_\mathrm{i}(r')t, \tag{4.46b}$$

místo v soustavě spojené se statickým pozorovatelem r'. Za těchto předpokladů má linearizovaný systém rovnic (4.39) tvar

$$\frac{\partial \delta\rho_\mathrm{p}}{\partial t_\mathrm{p}} + \rho_{0,\mathrm{p}} \frac{\partial \delta v_\mathrm{p}}{\partial r_\mathrm{p}} = 0, \tag{4.47a}$$

$$\frac{\partial \delta\rho_{\rm i}}{\partial t_{\rm i}} + \rho_{0,{\rm i}}\frac{\partial \delta v_{\rm i}}{\partial r_{\rm i}} = 0, \tag{4.47b}$$

$$\frac{\partial \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm p}} = -\frac{a_{\rm p}^2}{\rho_{0,{\rm p}}}\frac{\partial \delta\rho_{\rm p}}{\partial r_{\rm p}} + \frac{R_{\rm pi}}{\rho_{0,{\rm p}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\left(\delta v_{\rm i} - \delta v_{\rm p}\right), \tag{4.47c}$$

$$\frac{\partial \delta v_{\rm i}}{\partial t_{\rm p}} = -\frac{a_{\rm i}^2}{\rho_{0,{\rm i}}}\frac{\partial \delta\rho_{\rm i}}{\partial r_{\rm i}} + g_{v_{r\,\rm i}}^{\rm rad}\frac{\partial \delta v_{\rm i}}{\partial r_{\rm i}} - \frac{R_{\rm pi}}{\rho_{0,{\rm i}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\left(\delta v_{\rm i} - \delta v_{\rm p}\right), \tag{4.47d}$$

kde Δv_0 značí rozdíl rychlostí obou složek větru, $\Delta v_0 = v_{0,\rm i} - v_{0,\rm p}$, $G(\Delta v_0)$ je zkrácený zápis pro $G\left(u_{\rm pi}/\alpha_{\rm pi}\right)$ a $G'(\Delta v_0) \equiv \partial G\left(u_{\rm pi}/\alpha_{\rm pi}\right)/\partial u_{\rm pi}$. V rovnicích předpokládáme platnost Galileovy transformace souřadnic $t_{\rm p} = t_{\rm i} = t$. Přesto však rozlišujeme mezi $t_{\rm p}$ a $t_{\rm i}$, abychom zdůraznili rozdíl mezi jednotlivými parciálními derivacemi podle času. Při výpočtu $\partial/\partial t_{\rm p}$ zůstává konstantní $r_{\rm p}$, zatímco při výpočtu $\partial/\partial t_{\rm i}$ zůstává konstantní $r_{\rm i}$. Z Galileovy transformace také plyne, že rozdíl rychlostí složek Δv_0 a odchylky hustot a rychlostí $\delta\rho_{\rm p}$, $\delta\rho_{\rm i}$, $\delta v_{\rm p}$ a $\delta v_{\rm i}$ jsou stejné v obou vztažných soustavách.

Zderivujeme-li rovnice kontinuity (4.47a,4.47b) podle $r_{\rm p}$ (respektive podle $r_{\rm i}$) a dosadíme-li získané rovnice do příslušné pohybové rovnice (4.47c,4.47d) derivované podle času, získáme systém vlnových rovnic

$$\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm p}^2} = a_{\rm p}^2\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial r_{\rm p}^2} + \frac{R_{\rm pi}}{\rho_{0,{\rm p}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\left[\frac{\partial \delta v_{\rm i}}{\partial t_{\rm p}} - \frac{\partial \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm p}}\right], \tag{4.48a}$$

$$\frac{\partial^2 \delta v_{\rm i}}{\partial t_{\rm i}^2} = a_{\rm i}^2\frac{\partial^2 \delta v_{\rm i}}{\partial r_{\rm i}^2} + g_{v_{r\,\rm i}}^{\rm rad}\frac{\partial^2 \delta v_{\rm i}}{\partial r_{\rm i}\partial t_{\rm i}} - \frac{R_{\rm pi}}{\rho_{0,{\rm i}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\left[\frac{\partial \delta v_{\rm i}}{\partial t_{\rm i}} - \frac{\partial \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm i}}\right]. \tag{4.48b}$$

Aby bylo tento systém rovnic možné podrobněji studovat, transformujeme získané rovnice do téže souřadné soustavy. Zvolíme souřadnou soustavu absorbující složky. Z transformačních vztahů

$$r_{\rm i} = r_{\rm p} - \Delta v_0 t_{\rm p}, \tag{4.49a}$$

$$t_{\rm i} = t_{\rm p}, \tag{4.49b}$$

plynou symbolické rovnice spojující jednotlivé parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial r_{\rm p}} = \frac{\partial}{\partial r_{\rm i}}, \tag{4.50a}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_{\rm p}} = \frac{\partial}{\partial t_{\rm i}} - \Delta v_0\frac{\partial}{\partial r_{\rm i}}, \tag{4.50b}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{\rm p}^2} = \frac{\partial^2}{\partial r_{\rm i}^2}, \tag{4.50c}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t_{\rm p}^2} = \frac{\partial^2}{\partial t_{\rm i}^2} - 2\Delta v_0\frac{\partial^2}{\partial t_{\rm i}\partial r_{\rm i}} + \Delta v_0^2\frac{\partial^2}{\partial r_{\rm i}^2}. \tag{4.50d}$$

Vlnová rovnice neabsorbující složky (4.48a) může být s užitím výše uvedených vztahů přepsána jako

$$\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm i}^2} - 2\Delta v_0\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial t_{\rm i}\partial r_{\rm i}} + \Delta v_0^2\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial r_{\rm i}^2} = a_{\rm p}^2\frac{\partial^2 \delta v_{\rm p}}{\partial r_{\rm i}^2} + \\ + \frac{R_{\rm pi}}{\rho_{0,{\rm p}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\left(\frac{\partial}{\partial t_{\rm i}} - \Delta v_0\frac{\partial}{\partial r_{\rm i}}\right)\left(\delta v_{\rm i} - \delta v_{\rm p}\right). \tag{4.51}$$

Řešení systému vlnových rovnic (4.48b,4.51) budeme, jako obvykle, hledat ve tvaru šířících se vln,

$$\delta v_a = V_a \exp\left[i\left(\omega_a t - \kappa_a r_{\rm i}\right)\right], \tag{4.52}$$

kde index a označuje jak protony, tak absorbující ionty. Substitucí do vlnových rovnic (4.48b,4.51) získáváme systém algebraických rovnic

$$\left[(\omega_\mathrm{p} + \Delta v_0 \kappa_\mathrm{p})^2 V_\mathrm{p} - a_\mathrm{p}^2 \kappa_\mathrm{p}^2 V_\mathrm{p} - i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} (\omega_\mathrm{p} + \Delta v_0 \kappa_\mathrm{p}) V_\mathrm{p}\right] \mathrm{e}^{i(\omega_\mathrm{p} t - \kappa_\mathrm{p} r_\mathrm{i})} = = -i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} (\omega_\mathrm{i} + \Delta v_0 \kappa_\mathrm{i}) V_\mathrm{i} \mathrm{e}^{i(\omega_\mathrm{i} t - \kappa_\mathrm{i} r_\mathrm{i})}, \quad (4.53a)$$

$$\left[\omega_\mathrm{i}^2 V_\mathrm{i} - a_\mathrm{i}^2 \kappa_\mathrm{i}^2 V_\mathrm{i} + \kappa_\mathrm{i} g_{v_r \mathrm{i}}^\mathrm{rad} \omega_\mathrm{i} V_\mathrm{i} - i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} \omega_\mathrm{i} V_\mathrm{i}\right] \mathrm{e}^{i(\omega_\mathrm{i} t - \kappa_\mathrm{i} r_\mathrm{i})} = = -i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} \omega_\mathrm{p} V_\mathrm{p} \mathrm{e}^{i(\omega_\mathrm{p} t - \kappa_\mathrm{p} r_\mathrm{i})}. \quad (4.53b)$$

Tento systém rovnic může být splněn pouze v tom případě, pokud pro všechny sledované časy t a souřadnice r_i platí

$$\omega_\mathrm{p} t - \kappa_\mathrm{p} r_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{i} t - \kappa_\mathrm{i} r_\mathrm{i}. \quad (4.54)$$

Z toho plyne, že vlnové vektory a frekvence vln jednotlivých složek jsou shodné,

$$\kappa_\mathrm{i} = \kappa_\mathrm{p}, \quad (4.55a)$$

$$\omega_\mathrm{i} = \omega_\mathrm{p}. \quad (4.55b)$$

Označíme-li společné vlnové vektory a frekvence $\kappa \equiv \kappa_\mathrm{p}$ a $\omega \equiv \omega_\mathrm{p}$, získáváme systém algebraických rovnic

$$(\omega + \Delta v_0 \kappa)^2 V_\mathrm{p} = a_\mathrm{p}^2 \kappa^2 V_\mathrm{p} - i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} (\omega + \Delta v_0 \kappa) (V_\mathrm{i} - V_\mathrm{p}), \quad (4.56a)$$

$$\omega^2 V_\mathrm{i} = a_\mathrm{i}^2 \kappa^2 V_\mathrm{i} - \kappa g_{v_r \mathrm{i}}^\mathrm{rad} \omega V_\mathrm{i} + i \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)} \omega (V_\mathrm{i} - V_\mathrm{p}). \quad (4.56b)$$

Tento systém rovnic může být zapsán v maticové formě jako

$$\mathsf{A} \boldsymbol{V} = 0, \quad (4.57)$$

kde vektor $\boldsymbol{V}$ má složky $\boldsymbol{V} = (V_\mathrm{p}, V_\mathrm{i})^\mathrm{T}$ a jednotlivé členy matice A jsou

$$A_{11} = \omega^2 + 2\Delta v_0 \kappa \omega + \Delta v_0^2 \kappa^2 - a_\mathrm{p}^2 \kappa^2 - i P_\mathrm{p} (\omega + \Delta v_0 \kappa), \quad (4.58a)$$

$$A_{12} = i P_\mathrm{p} (\omega + \Delta v_0 \kappa), \quad (4.58b)$$

$$A_{21} = i P_\mathrm{i} \omega, \quad (4.58c)$$

$$A_{22} = \omega^2 - a_\mathrm{i}^2 \kappa^2 + \kappa g_{v_r \mathrm{i}}^\mathrm{rad} \omega - i P_\mathrm{i} \omega. \quad (4.58d)$$

Přitom bylo použito zjednodušujícího označení

$$P_\mathrm{p} = \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}, \quad (4.59a)$$

$$P_\mathrm{i} = \frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}} \frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}. \quad (4.59b)$$

Rovnice (4.57) má netriviální řešení pouze pokud je determinant matice A nulový,

$$||\mathsf{A}|| = 0. \quad (4.60)$$

Tato rovnice vede ke vztahu mezi vlnovým vektorem a frekvencí, jedná se tedy o disperzní relaci pro vlny ve dvojsložkovém hvězdném větru. Obecně má poněkud komplikovanější formu, jedná se o rovnici čtvrtého řádu, má tedy čtyři (obecně komplexní) kořeny. Proto abychom pochopili její obecné řešení (které bude studováno numericky), budeme nejdříve hledat její řešení za předpokladu platnosti jistých zjednodušujících přiblížení.

Dvojsložkové Abbottovy vlny

Je zřejmé, že pokud amplitudy vln nejsou téměř shodné, pak jsou vlny v důsledku působení síly tření utlumeny. Vynásobíme-li soustavu (4.56) příslušnými hustotami a sečteme-li výsledné rovnice, pak za zmiňovaného předpokladu $V_\mathrm{i} \approx V_\mathrm{p}$ získáváme disperzní relaci

$$\left[(\omega+\Delta v_0\kappa)^2 - a_\mathrm{p}^2\kappa^2\right]\rho_{0,\mathrm{p}} + \left[\omega^2 + \omega\kappa g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad} - a_\mathrm{i}^2\kappa^2\right]\rho_{0,\mathrm{i}} = 0. \qquad (4.61)$$

Stojí za povšimnutí, že pokud částice osciluje s frekvencí ω v soustavě spojené s absorbující složkou, pak v soustavě spojené s neabsorbující složkou osciluje s frekvencí[2] $\omega + \Delta v_0\kappa$. Tak lze zdůvodnit přítomnost tohoto členu v disperzní relaci. Pokud zanedbáme hustotu absorbující složky vzhledem k neabsorbující složce, pak lze rovnici (4.61) upravit jako

$$\omega = \kappa\left[-\Delta v_0 - \frac{1}{2}\frac{\rho_{0,\mathrm{i}}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\frac{\rho_{0,\mathrm{i}}}{\rho_{0,\mathrm{p}}} g_{v_r\mathrm{i}}^\mathrm{rad}\right)^2 + a_\mathrm{p}^2 - \Delta v_0^2}\right]. \qquad (4.62)$$

Vidíme, že získaná disperzní relace odpovídá Abbottovým vlnám v jednosložkovém hvězdném větru s disperzní relací (3.91). Tyto vlny jsou tedy hledaným ekvivalentem Abbottových vln ve dvojsložkovém větru. Dále je zřejmé, že ω je reálné, tedy tyto vlny jsou stabilní a netlumí se. Z rovnice (4.62) je patrné, že existují dva druhy vln, jeden se šíří po proudu větru, druhý proti proudu. Obdobně jako v jednosložkovém případě existuje bod nad kterým se oba druhy vln pohybují směrem od hvězdy. Vítr nad tímto bodem již tedy není schopen pomocí vln příčinně ovlivňovat vítr nacházející se pod ním a v tomto bodě se zjevně ustavuje rychlost ztráty hmoty dvojsložkového větru.

Lineární analýza stability je také schopna pomoci zodpovědět otázku, jakou podmínku zvolit namísto rovnice singulárního bodu (4.45b) pro určení okrajové hustoty. Sečteme-li pohybové rovnice (4.34a,4.34b) vynásobené hustotami jednotlivých složek, členy popisující tření vypadávají a získáváme pohybovou rovnici

$$\rho_\mathrm{p}\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{a_\mathrm{p}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + \rho_\mathrm{i}\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{a_\mathrm{i}^2}{v_{r\mathrm{i}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = \rho_\mathrm{i} g_\mathrm{i}^\mathrm{rad} + \frac{2\rho_\mathrm{p}a_\mathrm{p}^2}{r} + \frac{2\rho_\mathrm{i}a_\mathrm{i}^2}{r} - g\left(\rho_\mathrm{p}+\rho_\mathrm{i}\right), \qquad (4.63)$$

ve které jsme navíc použili rovnice kontinuity (4.33a,4.33b). Společná pohybová rovnice (4.63) nezávisí na žádných derivacích proměnných, pokud platí

$$\rho_\mathrm{p}\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{a_\mathrm{p}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + \rho_\mathrm{i}\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{a_\mathrm{i}^2}{v_{r\mathrm{i}}} - \frac{\partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = 0. \qquad (4.64)$$

[2]Disperzní relaci (4.56) lze odvodit i bez použití transformací derivací (4.50). Z tohoto odvození pak bezprostředně vyplývá i zmiňovaná transformace frekvencí. Na rozdíl od předchozího postupu budeme řešení systému vlnových rovnic (4.48b,4.51) hledat ve tvaru vln v jednotlivých vztažných soustavách zvlášť, $\delta v_a = V_a \exp\left[i\left(\omega_a t - \kappa_a r_a\right)\right]$, kde index a označuje jednotlivé složky větru. Namísto (4.54) pak musí v každém bodě a času, ve kterém sledujeme šíření vln platit

$$\omega_\mathrm{p} t - \kappa_\mathrm{p} r_\mathrm{p} = \omega_\mathrm{i} t - \kappa_\mathrm{i} r_\mathrm{i}.$$

S využitím transformačních vztahů (4.46) pak lze tuto rovnost přepsat jako

$$\left(\omega_\mathrm{p} + \kappa_\mathrm{p} v_\mathrm{p}(r')\right)t - \kappa_\mathrm{p} r' = \left(\omega_\mathrm{i} + \kappa_\mathrm{i} v_\mathrm{i}(r')\right)t - \kappa_\mathrm{i} r'.$$

Z požadavku platnosti tohoto vztahu pro všechny body a časy již plyne zmiňovaný vztah mezi frekvencemi kmitů v obou soustavách,

$$\kappa_\mathrm{i} = \kappa_\mathrm{p},$$
$$\omega_\mathrm{i} + \kappa_\mathrm{i} v_\mathrm{i}(r') = \omega_\mathrm{p} + \kappa_\mathrm{p} v_\mathrm{p}(r').$$

Dosazením těchto vztahů do pohybových rovnic (4.48b,4.51) lze již přímo odvodit soustavu rovnic(4.56), ve kterých nyní frekvence ω odpovídá frekvenci pozorované v soustavě absorbující složky ω_i.

Tato rovnice v jednosložkové limitě ($v_{r\mathrm{p}} \approx v_{r\mathrm{i}}$ a $\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}/\mathrm{d}r \approx \mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r$) přechází na kritickou podmínku jednosložkového větru (3.93). Odpovídá bodu, ve kterém je grupová rychlost dvojsložkových Abbottových vln rovna rychlosti větru.

Iontové Abbottovy vlny

Zbývá ještě nalézt fyzikální interpretaci charakteristik absorbující složky (4.45b). Budeme uvažovat případ vln v absorbující složce, při kterých vodíkové atomy zůstávají nepohyblivé (v soustavě pohybující se stacionárním proudem vodíkových atomů). V takovém případě tedy platí $V_\mathrm{i} \gg V_\mathrm{p}$. Všimneme-li si první rovnice ze soustavy určující disperzní relaci (4.56a) pak je zřejmé, že imaginární člen na pravé straně musí být vyvážen členy úměrnými V_p. Z toho plyne, že malé oscilace neabsorbující složky jsou opožděny vzhledem k oscilacím absorbující složky.

Nyní obrátíme pozornost k důležitější rovnici ze soustavy určující disperzní relaci, k rovnici (4.56b). Zanedbáme-li amplitudu kmitů neabsorbující složky vzhledem k amplitudě kmitů absorbující složky, pak má tato rovnice tvar

$$\omega^2 = a_\mathrm{i}^2\kappa^2 - \omega\kappa g_{v_r\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} + i\frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}\omega. \tag{4.65}$$

Tuto disperzní relaci budeme studovat v běžném případě, kdy člen $a_\mathrm{i}^2\kappa^2$ může být zanedbán. Získáváme

$$\omega = -\kappa g_{v_r\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} + i\frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_{0,\mathrm{i}}}\frac{G'(\Delta v_0)}{G(\Delta v_0)}. \tag{4.66}$$

Je zřejmé, že zatímco reálná část frekvence ω závisí na κ lineárně, imaginární část na κ nezávisí. Pokud Chandrasekharova funkce je rostoucí funkcí rozdílu rychlostí, $G'(\Delta v_0) > 0$, pak je imaginární člen kladný a vlny jsou tlumeny. V opačném případě je však imaginární člen záporný a dané řešení hvězdného větru není stabilní. Podíváme-li se na průběh Chandrasekharovy funkce na obr. 1.1 pak je zřejmé, že pokud je rozdíl rychlostí obou složek větru malý, pak je funkce rostoucí a dvojsložkový vítr je stabilní. Pokud ovšem je rozdíl rychlostí složek větru větší než hodnota odpovídající maximu Chandrasekharovy funkce (máme na mysli explicitní závislost Chandrasekharovy funkce na svém argumentu), pak funkce klesá a dvojsložkový vítr je nestabilní.

Fyzikální příčina nestability takovéhoto hvězdného větru je zřejmá. Pokud Chandrasekharova funkce nedosáhla svého maxima (jako funkce svého argumentu), pak zvětšení rozdílu rychlostí mezi složkami vyvolá zvětšení třecí síly, která se snaží zmenšit rozdíl rychlostí. Naopak, zmenšení rozdílu rychlostí sníží sílu tření, což ve svém důsledku vede k zvýšení rozdílu rychlostí. Vítr je tedy stabilní. V opačném případě tomu tak však není. Pokud Chandrasekharova funkce dosáhla svého maxima, pak jakékoliv zvýšení rozdílu rychlostí vede ke snížení třecí síly, což vede k dalšímu nárůstu rozdílu rychlostí. Je tedy zřejmé, že tento stav je nestabilní.

Vlny v případě zanedbatelné síly tření

Pokud obě složky vzájemně neinteragují, tedy pokud je třecí síla zanedbatelná, pak již ze soustavy rovnic (4.53) neplyne, že se frekvence a vlnové vektory kmitů jednotlivých složek rovnají. Soustava disperzních relací (4.56) se rozpadá na dvě nezávislé rovnice, z nichž každá popisuje disperzní relaci jednotlivých složek,

$$(\omega_\mathrm{p} + \Delta v_0\kappa_\mathrm{p})^2 - a_\mathrm{p}^2\kappa_\mathrm{p}^2 = 0, \tag{4.67a}$$

$$\omega_\mathrm{i}^2 - a_\mathrm{i}^2\kappa_\mathrm{i}^2 + \kappa_\mathrm{i} g_{v_r\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}\omega_\mathrm{i} = 0. \tag{4.67b}$$

Disperzní relace neabsorbující složky popisuje izotermické vlny, disperzní relace absorbující složky popisuje netlumené iontové Abbottovy vlny.

4.3.4 Spodní okrajové podmínky

Nyní se již můžeme věnovat dvojsložkovým modelům hvězdných větrů. Díky tomu, že rovnice popisující statický dvojsložkový vítr tvoří soustavu čtyř diferenciálních rovnic prvního řádu pro čtyři proměnné, je nutné zadat celkem čtyři okrajové podmínky. Problém ovšem je, že okrajové hodnoty hustot a rychlostí musí být zvoleny tak, aby vítr hladce procházel jak singulárním bodem neabsorbující složky (4.45a), tak bodem, ve kterém je rychlost vln rovna rychlosti větru (4.64). První z podmínek je možné lehce splnit tak, že se modely větru začínají počítat přímo v singulárním bodě neabsorbující složky. Okrajová podmínka pro rychlost neabsorbující složky pak má přímo tvar (4.45a)

$$v_{r\mathrm{p}}(R_*) = a_\mathrm{p}. \tag{4.68}$$

Využijeme-li rovnice kontinuity (4.33a), pak má pohybová rovnice (4.34a) v singulárním bodě tvar podmínky regularity

$$g = \frac{2a_\mathrm{p}^2}{r} + \frac{1}{\rho_\mathrm{p}} R_\mathrm{pi}. \tag{4.69}$$

Tato rovnice je druhou z hledaných okrajových podmínek, která v podstatě určuje okrajovou rychlost absorbujících iontů. Ve všech modelech, které jsou zde ukázány, však není nutné volit tuto okrajovou podmínku. Ukazuje se, že podmínka rovnosti rychlostí složek na vnitřním okraji by plně dostačovala pro výpočet modelů. Podmínka (4.69) byla zvolena pouze z důvodu větší obecnosti uvažovaných modelů.

Okrajovou hustotu neabsorbující složky je možné získat ze známého chemického složení atmosféry hvězdy. Hluboko v atmosféře (určené poloměrem $r_\mathrm{at} < R_*$) jsou rychlosti obou složek větru téměř shodné a vztah mezi hustotami obou složek je dán vztahem

$$\rho_\mathrm{i}(r_\mathrm{at}) = \mathfrak{Y}_\mathrm{i} \rho_\mathrm{p}(r_\mathrm{at}).$$

S užitím rovnic kontinuity (4.33) pak získáváme hledanou okrajovou podmínku pro hustotu neabsorbující složky

$$\rho_\mathrm{p}(R_*) = \frac{1}{\mathfrak{Y}_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{i}(R_*) \frac{v_{r\mathrm{i}}(R_*)}{v_{r\mathrm{p}}(R_*)}. \tag{4.70}$$

Okrajová hustota absorbující složky je získána v průběhu numerického řešení pomocí podmínky (4.64) určující bod, ve kterém je rychlost větru rovna rychlosti Abbottových vln. Postup určení okrajové hustoty absorbující složky byl popsán v kap. 4.1.4.

4.3.5 Numerické řešení rovnic

Zvolená metoda numerického řešení diferenciálních rovnic byla obecně popsána v kapitole 4.1. Soustavu čtyř diferenciálních rovnic, popisující dvojsložkový izotermický vítr (4.33,4.34) lze obecně vyjádřit jako (4.7)

$$\mathsf{P}\boldsymbol{\psi} = 0, \tag{4.71}$$

kde operátor P odpovídá aproximaci diferenciálních rovnic. Hledaný vektor proměnných $\boldsymbol{\psi}$, popisující model dvojsložkového hvězdného větru, má tvar

$$\boldsymbol{\psi} = (\rho_{\mathrm{i}1}, v_{r\mathrm{i}1}, \rho_{\mathrm{p}1}, v_{r\mathrm{p}1}, \rho_{\mathrm{i}2}, v_{r\mathrm{i}2}, \rho_{\mathrm{p}2}, v_{r\mathrm{p}2}, \dots, \rho_{\mathrm{i}\,\mathrm{NR}}, v_{r\mathrm{i}\,\mathrm{NR}}, \rho_{\mathrm{p}\,\mathrm{NR}}, v_{r\mathrm{p}\,\mathrm{NR}})^\mathrm{T}. \tag{4.72}$$

Soustava čtyř diferenciálních rovnic (4.33,4.34), popisující dvojsložkový izotermický vítr je aproximována operátorem P. Jeho složky mají s využitím aproximace derivace (4.5) v jednotlivých uzlových bodech $1 < i < \mathrm{NR}$ sítě tvar

$$P_{4i-3} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{4.73a}$$

$$P_{4i-2} = v_{r\mathrm{i},i}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_i^2}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{G\mathfrak{M}}{r_i^2}\left(1-\Gamma\right) - x_\alpha\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^\alpha + \mathcal{R}_{\mathrm{ip}}\ln\Lambda, \tag{4.73b}$$

$$P_{4i-1} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{4.73c}$$

$$P_{4i} = v_{r\mathrm{p},i}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{\rho_{\mathrm{p},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{G\mathfrak{M}}{r_i^2}\left(1-\Gamma\right) + \mathcal{R}_{\mathrm{pi}}\ln\Lambda. \tag{4.73d}$$

K těmto rovnicím je nutné přidat členy vyjadřující zvolené okrajové podmínky (4.68,4.69,4.70),

$$P_1 = \rho_{\mathrm{i}1} - \rho_0, \tag{4.74a}$$

$$P_2 = \frac{2a_{\mathrm{p}}^2}{r_1} + \mathcal{R}_{\mathrm{pi}}\ln\Lambda + \frac{G\mathfrak{M}}{r_1^2}\left(1-\Gamma\right), \tag{4.74b}$$

$$P_3 = \rho_{\mathrm{p}1} - \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}1}\frac{v_{r\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}}, \tag{4.74c}$$

$$P_4 = v_{r\mathrm{p}1} - a_{\mathrm{p}}. \tag{4.74d}$$

V této soustavě rovnic bylo použito označení

$$\mathcal{R}_{\mathrm{ab}} = \rho_{\mathrm{b}}\frac{4\pi q_{\mathrm{a}}^2 q_{\mathrm{b}}^2}{m_{\mathrm{a}}m_{\mathrm{b}}kT}\frac{v_{r\mathrm{a}}-v_{r\mathrm{b}}}{|v_{r\mathrm{a}}-v_{r\mathrm{b}}|}G(x_{\mathrm{ab}}), \quad \text{kde } a, b, \text{ označuje i, p,} \tag{4.75a}$$

$$\ln\Lambda = \ln\left(24\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{2\rho_{\mathrm{p},i}}}\left(\frac{kT}{4\pi\, e^2}\right)^{3/2}\right), \tag{4.75b}$$

$$x_\alpha = \frac{\sigma_{\mathrm{e}}L}{4\pi r^2 c}\left(\frac{1}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{p}}W}\right)^\delta \frac{\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\right)^{\alpha+1} - \left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma_{\mathrm{i},i}\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\right)^\alpha}k\left(\sigma_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{th}}\right)^{-\alpha}, \tag{4.75c}$$

$$\sigma_{\mathrm{i},i} = \left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i},i}}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{r_i}{v_{r\mathrm{i},i}} - 1. \tag{4.75d}$$

Pro vnější okraj sítě $i = \mathrm{NR}$ je možné zvolit jinou aproximaci derivace (viz. vzorec (4.5) pro $i = \mathrm{NR}$). Jednodušší je však spočítat parametry větru na vnějším okraji sítě pomocí extrapolací

$$P_{2i-4} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{4.76a}$$

$$P_{2i-3} = \frac{v_{r\mathrm{i},i} - v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\mathrm{i},i-1} - v_{r\mathrm{i},i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{4.76b}$$

$$P_{2i-2} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{4.76c}$$

$$P_{2i} = \frac{v_{r\mathrm{p},i} - v_{r\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\mathrm{p},i-1} - v_{r\mathrm{p},i-2}}{\Delta r_{i-1}}. \tag{4.76d}$$

Numerické testy ukazují, že tento přístup přináší pouze zanedbatelné změny výsledného řešení, ale podstatným způsobem zjednodušuje program.

4.3.6 Spočtené modely

Parametry spočtených modelů dvojsložkových hvězdných větrů jsou uvedeny v tabulce 4.4. Hmotnosti, poloměry a efektivní teploty hvězd hlavní posloupnosti jsou převzaty z práce Harmance (1988), parametry k, α a δ, popisující sílu záření uvádí Abbott (1982). Jako průměrný absorbující iont byl zvolen atom uhlíku. Je ovšem nutné zdůraznit, že výběr průměrného absorbujícího iontu neovlivňuje velikost síly záření, ale pouze velikost síly tření.

Tabulka 4.4: Parametry modelů dvojsložkových izotermických hvězdných větrů

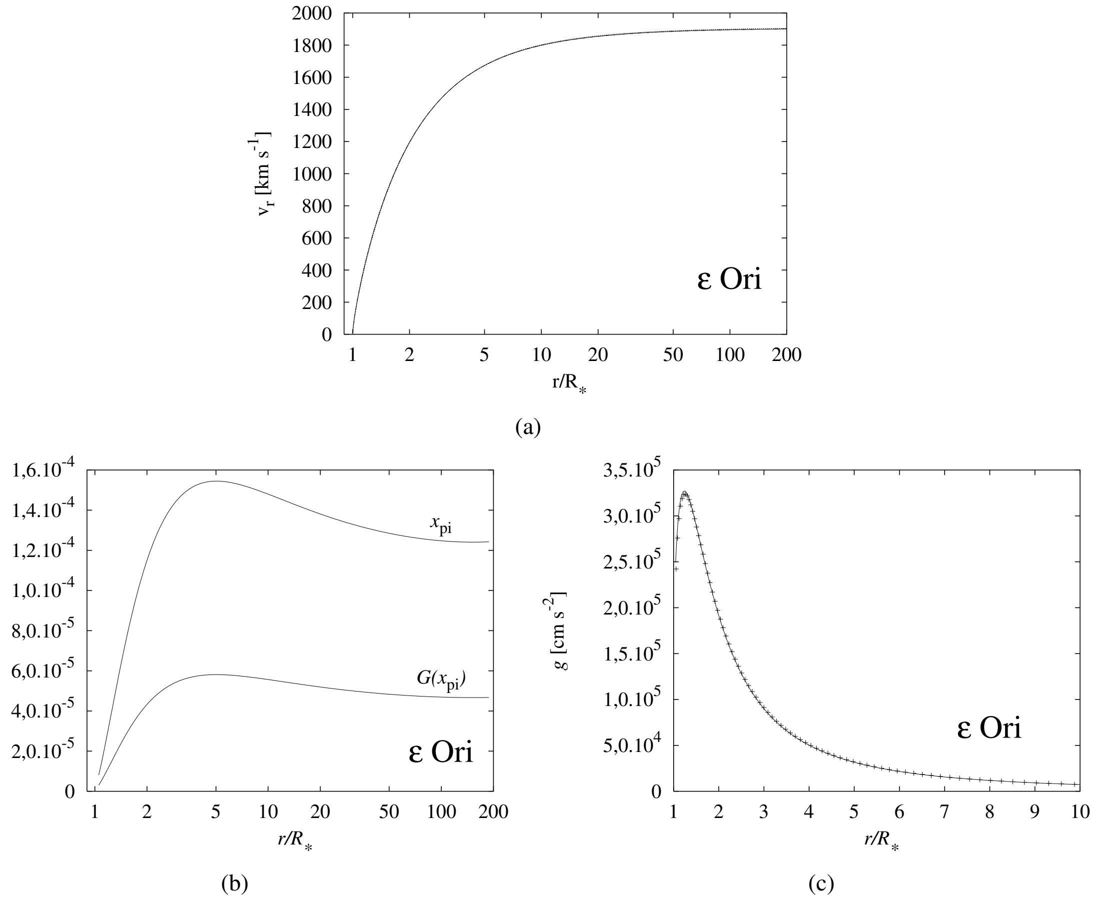
Spektrální	Parametry hvězdy			Parametry větru			Průměrný iont	
typ (hvězda)	$\mathfrak{M}\,[\mathfrak{M}_\odot]$	$R_*\,[R_\odot]$	T_{eff} [K]	k	α	δ	$m_\mathrm{i}/m_\mathrm{p}$	z_i
O6V	31,65	9,85	41 700	0,174	0,606	0,12	3,0	12,0
B0V	14,57	5,80	29 900	0,156	0,609	0,12	2,0	12,0
B3V	6,07	3,56	19 100	0,477	0,506	0,089	2,0	12,0
B4V	5,12	3,26	17 200	0,365	0,509	0,105	2,0	12,0
B5V	4,36	3,01	15 500	0,235	0,511	0,12	4,8	12,0
B5V	4,36	3,01	15 500	0,235	0,511	0,12	2,0	12,0
B5V	4,36	3,01	15 500	0,235	0,511	0,12	1,1	12,0
B6V	3,80	2,81	14 100	0,275	0,517	0,106	2,0	12,0
B7V	3,38	2,65	12 900	0,299	0,522	0,09	2,0	12,0
B8V	2,91	2,44	11 600	0,327	0,529	0,07	1,8	12,0
ε Ori	90,0	37,0	28 500	0,170	0,590	0,09	3,0	12,0

Větry s vysokou hustotou

Protože síla tření je úměrná součinu hustot jednotlivých složek větru, je možné předpokládat, že dvojsložkové a jednosložkové modely větrů s relativně vysokou hustotou větru povedou ke stejnému výsledku. Takovýto případ je ukázán na obrázku 4.2(a), kde je nakresleno porovnání rychlostí jednotlivých složek ve dvojsložkovém modelu a v jednosložkovém modelu pro hvězdu ε Ori. Je patrné, že rychlosti splývají a tedy pro tuto hvězdu je jednosložkový model dostatečně dobrým přiblížením. Tento závěr také potvrzuje průběh sil (vyjádřených na jednotku hmotnosti) ve větru 4.2(c), kdy ve dvojsložkovém větru je síla záření plně vyvážena se silou tření působící na absorbující složku a plně odpovídá síle záření v jednosložkovém větru.

V blízkosti povrchu hvězdy je hustota vysoká, zatímco ve vnějších oblastech větru hustota klesá. Pokles hustoty by však vedl k zmenšení třecí síly (na jednotku hmotnosti). Aby bylo předávání hybnosti mezi jednotlivými složkami větru účinné, musí vzrůst Chandrasekharova funkce, tedy musí vzrůst rozdíl rychlostí složek. V důsledku toho je rozdíl rychlostí složek v blízkosti hvězdy menší než ve vnějších oblastech větru, jak je patrné z obrázku 4.2(b), ve kterém je rozdíl rychlostí složek u_{pi} vyjádřen vzhledem k střední tepelné rychlosti ($x_{\mathrm{pi}} = u_{\mathrm{pi}}/\alpha_{\mathrm{pi}}$). Vidíme, že v celém větru pro argument Chandrasekharovy funkce platí $x_{\mathrm{pi}} \ll 1$. Díky tomu v žádném bodě větru nedosahuje Chandrasekharova funkce své maximální možné hodnoty (jako funkce x_{pi}). V relativně hustém větru tedy (v souladu s intuitivní představou) nedochází k oddělování složek větru (viz. kap. 1.2.3) a jednosložkové řešení plně odpovídá řešení dvojsložkovému.

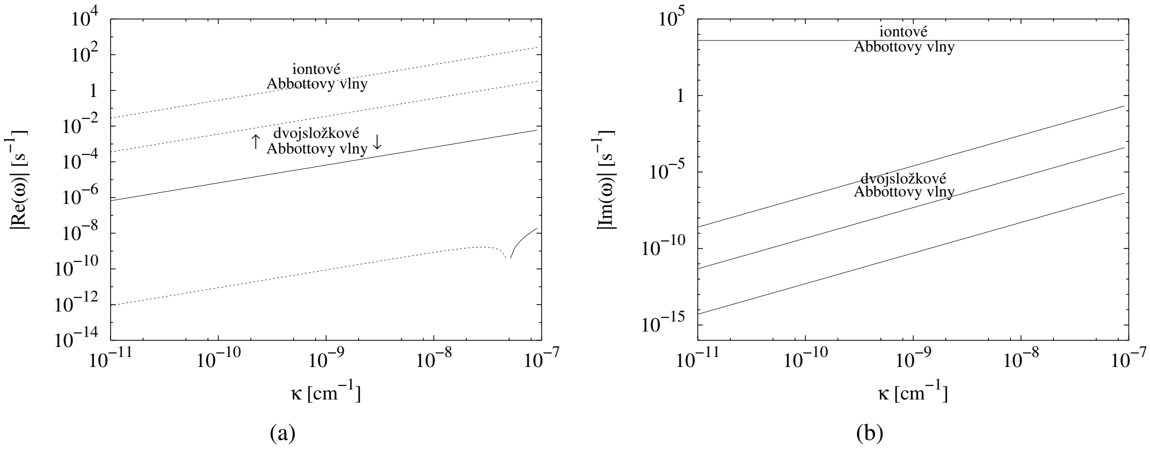
V kapitole 4.3.3 jsme pomocí zjednodušených úvah došli k závěru, že takovéto řešení hydrodynamických rovnic by mělo být stabilní. Abychom tento závěr potvrdili, je nutné spočítat všechny kořeny disperzní relace (4.60). Pro získání kořenů této rovnice byla použita procedura `CPOLY` Jenkinse a Trauba (1970). Jednotlivé kořeny disperzní relace, pro určitost spočtené v bodě ve kterém $v_r \approx 0.3\,v_\infty$, jsou nakresleny na obrázku 4.3. Na obrázku je též zakreslena příslušnost reálné či



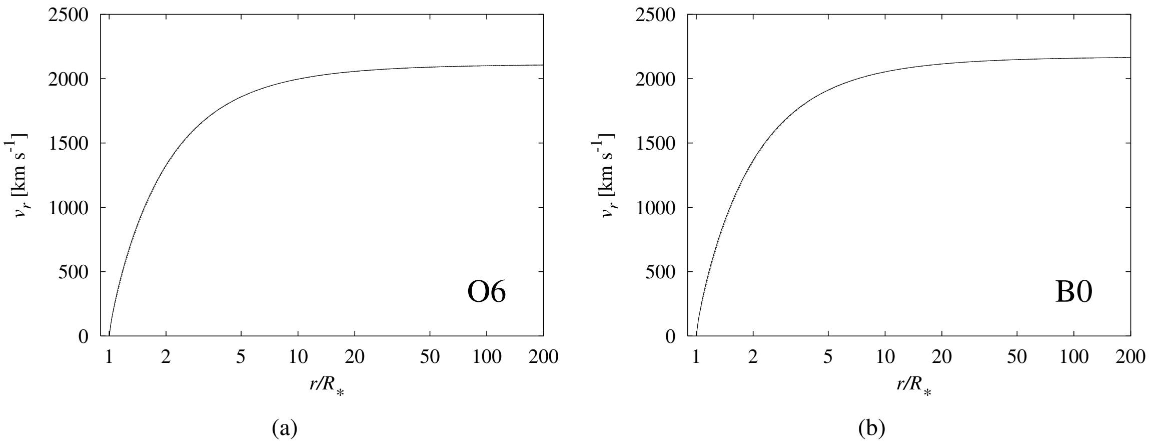
Obrázek 4.2: Model dvojsložkového izotermického větru hvězdy ε Ori, (a) průběh rychlosti absorbujících iontů (čerchovaná čára) a vodíkových iontů (plná čára) v porovnání s jednosložkovým modelem (tečkovaná čára), jednotlivé čáry splývají, (b) průběh velikosti Chandrasehkarovy funce a jejího argumentu v závislosti na poloměru, (c) porovnání velikostí zářivé (plná čára) a třecí síly (čárkovaná čára) působící na absorbující složku ve dvojsložkovém modelu a zářivé síly vztažené na hustotu absorbující složky v jednosložkovém modelu (křížky), jednotlivé čáry splývají.

imaginární části kořenů k jednotlivým druhům Abbottových vln. Jak bylo předpovězeno pomocí zjednodušených úvah (viz. rovnice (4.62), (4.66)), reálné části kořenů disperzní relace závisí na vlnovém vektoru lineárně. Porovnáme-li disperzní relace ve dvojsložkovém a jednosložkovém případě, pak reálná část disperzní relace dvojsložkových Abbottových vln má zcela shodný průběh jako relace jednosložková. Podíváme-li se na odpovídající imaginární část kořenu (obr. 4.3(b)), pak je patrné, že tyto dvojsložkové Abbottovy vlny jsou jen velice málo tlumeny. Kořen s největší imaginární částí na obr. 4.3(b) odpovídá iontovým Abbottovým vlnám. Jak vyplývá z rovnice (4.66), jeho imaginární část nezávisí na vlnovém vektoru κ. Hlavním závěrem však je, že tento numerický výpočet potvrdil teoretické úvahy a ukázal, že imaginární části kořenů disperzní relace (4.60) mají kladné znaménko. Tento vítr je tedy, podobně jako v jednosložkovém případě, stabilní vůči Abbottovým vlnám. Pro podrobnější popis nestabilit dvojsložkového větru by však bylo nutné navíc studovat obecnější případ vln, pro které je jednosložkový vítr nestabilní (Owocki a Rybicki 1984).

Obdobné modely větrů hvězd hlavní posloupnosti spektrálních typů O6 a B0 jsou na obr. 4.4. Opět vidíme, že závislost rychlosti na poloměru je stejná ve dvojsložkovém a jednosložkovém modelu. V tomto případě tedy jednosložkové modely plně vystačují jak pro výpočet rychlosti ztráty



Obrázek 4.3: Čtyři kořeny vlnové disperzní relace ve dvojsložkovém modelu větru ε Ori, v místě kde je radiální rychlost rovna $v_r \approx 0.3\, v_\infty$. (a) Reálná část kořenů disperzní relace, plná čára značí vlnu šířící se ve směru toku, přerušovaná proti směru toku. Vyznačené kořeny disperzní relace plně odpovídají jednosložkovým Abbottovým vlnám. (b) Imaginární část kořenů disperzní relace, všechny kořeny mají kladné znaménko a jsou tedy tlumeny.

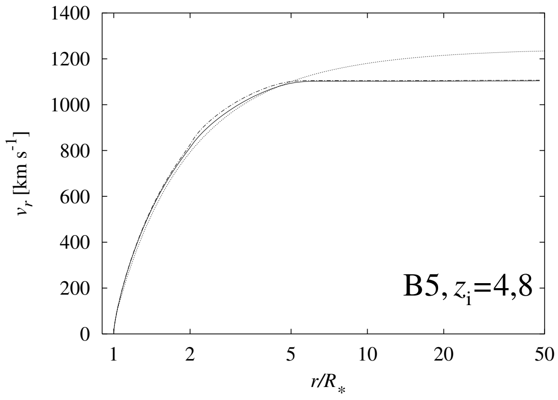


Obrázek 4.4: Porovnání průběhu rychlostí absorbujících iontů (čerchovaná čára) a vodíkových iontů (plná čára) s jednosložkovým modelem (tečkovaná čára) pro větry s relativně vysokou hustotou. Jednotlivé čáry splývají.

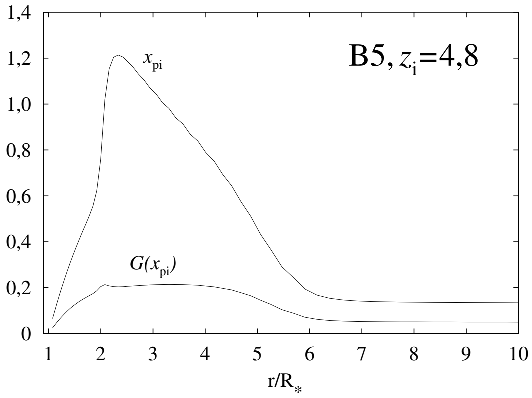
hmoty $\mathrm{d}\mathfrak{M}/\mathrm{d}t$, tak pro výpočet v_∞. Tento závěr učinili též Springmann a Pauldrach (1992) pro případ hvězdy ζ Pup.

Větry s malou hustotou

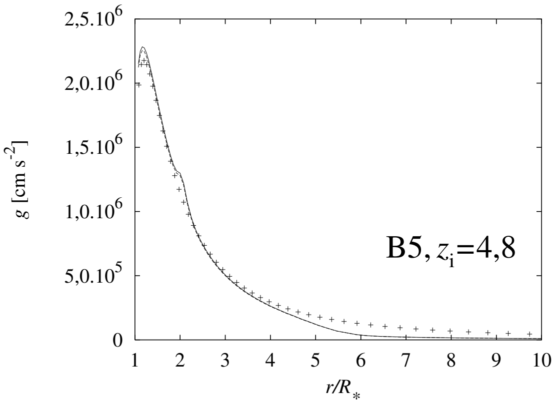
Pro větry s nižší hustotou jednotlivých složek však již jednosložkové řešení nemusí odpovídat dvojsložkovému. V předchozí kapitole jsme viděli, že ve dvojsložkovém modelu větru s rostoucím poloměrem narůstá rozdíl rychlostí obou složek tak, aby bylo možné mezi nimi účinně přenášet hybnost. Protože je třecí síla přímo úměrná součinu hustot složek, pro hvězdy s relativně nízkou hustotou bude rozdíl rychlostí složek větší. V kapitole 1.2.3 však bylo ukázáno, že třecí síla obecně není přímo úměrná rozdílu rychlostí složek. Naopak, pro jistou hodnotu rozdílu rychlostí dosahuje maxima a pak dále klesá. Je tedy zřejmé, že v okamžiku, kdy rozdíl rychlostí dosáhne maxima Chandrasekharovy funkce (jako funkce rozdílu rychlostí), nemůže docházet k dostatečně účinnému přenosu hybnosti mezi jednotlivými složkami a dvojsložkové řešení se začne lišit od jednosložkového. Intuitivně bychom předpokládali, že v takovémto případě dojde k oddělení složek větru.



(a)



(b)



(c)

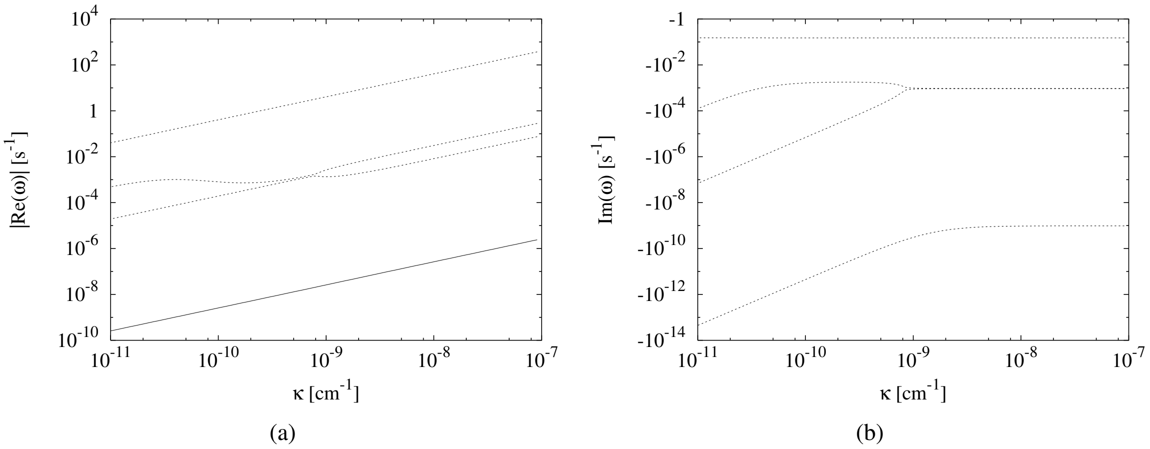
Obrázek 4.5: Model dvojsložkového izotermického větru hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu B5 s nábojem $z_\mathrm{i} = 4{,}8$, (a) průběh rychlosti absorbujících iontů (čerchovaná čára) a vodíkových iontů (plná čára) v porovnání s jednosložkovým modelem (tečkovaná čára), (b) průběh velikosti Chandrasehkarovy funce a jejího argumentu v závislosti na poloměru, (c) porovnání velikostí zářivé (plná čára) a třecí síly (čárkovaná čára) působící na absorbující složku ve dvojsložkovém modelu a zářivé síly vztažené na hustotu absorbující složky v jednosložkovém modelu (křížky), jednotlivé čáry splývají.

Takovýto model je nakreslen na obr. 4.5. V těsné blízkosti hvězdy je hustota složek stále ještě dostatečně vysoká a rozdíl rychlostí složek je poměrně malý. S klesající hustotou však roste rozdíl rychlostí tak, aby se přeneslo dostatečné množství hybnosti mezi složkami, viz. obr. 4.5(b). Podobně roste také Chandrasekharova funkce. V jistém okamžiku však dosahuje svého maxima (jako explicitní funkce svého argumentu, v našem případě v bodě $r \approx 2\,R_*$) a složky si třením již nemohou předávat hybnost dostatečnou na urychlování (viz. obr. 4.5(c)). Přitom ovšem nastává jev, který bychom podle intuitivního náhledu zřejmě neočekávali, gradient rychlosti obou složek klesá a složky se neoddělují, obr. 4.5(a).

Důvodem, proč po dosažení maxima Chandrasekharovy funkce nedochází k oddělení obou složek větru je závislost síly záření na gradientu rychlosti. Budeme uvažovat pohybovou rovnici absorbujících iontů (4.34b) při nadzvukových rychlostech v případě, kdy dochází k dostatečnému přenosu hybnosti mezi jednotlivými složkami (v tomto případě jednosložkové řešení odpovídá dvojsložkovému),

$$v_{r\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\bigg|_1 = g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}\Big|_1 - g - \frac{1}{\rho_\mathrm{i}}\,R_\mathrm{pi}\big|_1\,. \tag{4.77}$$

Přitom neuvažujeme tlak plynu, který je v nadzvukové oblasti zanedbatelný. Nyní budeme předpok-



Obrázek 4.6: Čtyři kořeny vlnové disperzní relace ve dvojsložkovém modelu větru B5, $z_\mathrm{i} = 4{,}8$, v bodě $r = 2{,}4\,R_*$. (a) Reálná část kořenů disperzní relace, plná čára značí vlnu šířící se ve směru toku, přerušovaná proti směru toku. (b) Imaginární část kořenů disperzní relace, všechny kořeny mají záporné znaménko a vedou tedy k nestabilitě.

ládat, že naopak Chandrasekharova funkce dosáhla svého maxima v jistém místě proti proudu větru a tedy v našem sledovaném bodě nedochází k efektivnímu přenosu hybnosti mezi složkami. Tomu odpovídá deficit třecí síly oproti minulému případu ΔR_pi, který schází k tomu, aby si složky mezi sebou dostatečně vyměňovaly hybnost. Pohybová rovnice (4.34b) má nyní tvar

$$v_{r\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\bigg|_2 = g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}\Big|_2 - g - \frac{1}{\rho_\mathrm{i}}\left(R_\mathrm{pi}|_1 - \Delta R_\mathrm{pi}\right). \tag{4.78}$$

Odečteme-li nyní rovnice (4.78) a (4.77) a užijeme-li Taylorova rozvoje zářivé síly do členů prvního řádu v $\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r$, získáváme rovnici

$$v_{r\mathrm{i}}\,\Delta\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = \frac{\partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\bigg|_1\,\Delta\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{\rho_\mathrm{i}}\,\Delta R_\mathrm{pi}, \tag{4.79}$$

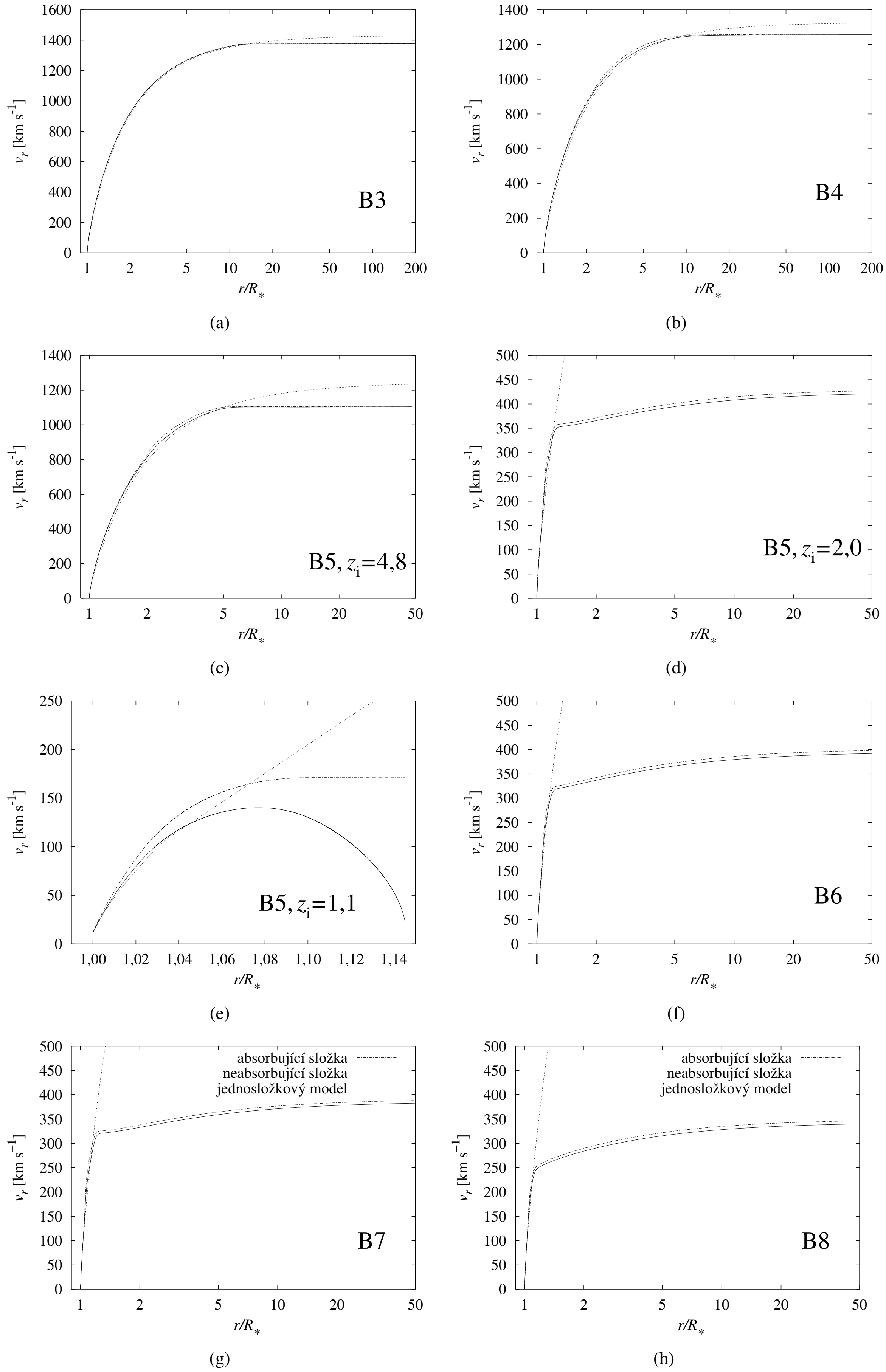
kde $\Delta \mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r = \mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r|_2 - \mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r|_1$. Vyjádříme-li nyní změnu gradientu rychlosti absorbujících iontů,

$$\Delta\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{\rho_\mathrm{i}}\frac{\Delta R_\mathrm{pi}}{v_{r\mathrm{i}} - \frac{\partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r)}\Big|_1}, \tag{4.80}$$

vidíme, že musí být změna gradientu rychlosti $\Delta\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)$ *záporná*, jelikož rychlost absorbující složky je menší než rychlost odpovídající jejímu kritickému bodu (4.45b) a tedy platí $v_{r\mathrm{i}} < \partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}/\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)$ a navíc z definice $\Delta R_\mathrm{pi} > 0$. Díky závislosti zářivé síly na gradientu rychlosti si tedy pokles třecí síly vynucuje pokles zářivé síly a nutně klesá gradient rychlosti absorbující složky.

V tomto zlomovém bodě je rychlost větru větší než rychlost úniková, obě složky větru opouštějí hvězdu. Přestože dojde k prudkému poklesu gradientu rychlosti, absorbující ionty jsou nadále urychlovány zářením a tedy rychlost obou složek nadále mírně roste.

V kapitole 4.3.3 jsme ukázali, že takováto řešení hvězdného větru jsou nestabilní v oblasti, kde $G'(\Delta v_0) < 0$. Nyní tento závěr potvrdíme numerickým řešením disperzní relace (4.60). Použitý postup byl podrobněji popsán v předešlé kapitole. Budeme studovat šíření vln v bodě $r = 2{,}4\,R_*$ v modelu hvězdy spektrálního typu B5 s nábojem absorbujících iontů $q_\mathrm{i} = 4{,}8$.



Obrázek 4.7: Dvojsložkové modely větrů hvězd s nízkou hustotou. Označení je stejné jako na obr. 4.4.

Získaná disperzní relace, zobrazená na obrázku 4.6, se podstatně liší od případu hvězdy ε Ori z předešlé kapitoly (viz. obr. 4.3). Imaginární část všech kořenů je záporná, potvrzují se tedy zjednodušené úvahy z kapitoly 4.3.3, získané řešení *není* stabilní. Kořen disperzní relace, který má největší reálnou i imaginární část (v absolutní hodnotě) odpovídá iontovým Abbottovým vlnám (4.66). V souladu se zjednodušenými výpočty závisí reálná část kořenu disperzní relace Abbottových vln na vlnovém vektoru κ lineárně, zatímco imaginární část na vlnovém vektoru nezávisí.

Na obrázku 4.7 jsou uvedeny modely hvězd s relativně nízkou hustotou, ve kterých v jistém bodě nejsou schopny absorbující ionty předávat dostatek hybnosti neabsorbující složce a dochází k poklesu gradientu rychlosti obou složek. Podíváme-li se nejdříve na modely hvězdy spektrálního typu B5, obr. 4.7(c), 4.7(d), 4.7(e) pak vidíme, že hustota větru není jediným parametrem, který určuje místo, kde dochází ke zlomu rychlostní závislosti. Důležitá je též závislost třecí síly na náboji srážejících se částic. Platí, že čím větší náboj částic, tím silnější Coulombovská interakce mezi nimi působí a tím více hybnosti se během jediné srážky předává. V modelech s větším nábojem jsou schopny srážky zprostředkovat výměnu hybnosti i pro menší hustoty, proto ke zlomu dochází ve větší vzdálenosti od hvězdy. Podobným způsobem přenos hybnosti ovlivňuje také hmotnost srážejících se částic. Znovu platí, že čím větší mají částice hmotnost, tím efektivnější je přenos hybnosti mezi složkami.

Zajímavý je též případ větru s nábojem absorbujících iontů sníženým na hodnotu $q_{\mathrm{i}} = 1{,}1$. Vidíme, že v tomto případě se obě složky oddělují, přestože gradient rychlosti obou složek klesá. Protože rychlost neabsorbující složky je menší než rychlost úniková, tato složka padá zpět na hvězdu. Tento pád je však již nutné popisovat pomocí hydrodynamických simulací (Porter a Skouza 1999). Rychlost vodíku je totiž v jistém bodě znovu rovna rychlosti zvuku, tentokrát ovšem nejsou v tomto bodě splněny podmínky regularity a gradient rychlosti pak neomezeně klesá. Z hydrodynamického hlediska se v tomto bodě zřejmě vytváří rázová vlna a tento jev již není možné studovat pomocí stacionárních modelů. Pro malé hodnoty náboje q_{i} navíc existují řešení, ve kterých je neabsorbující složka v hydrostatické rovnováze a absorbující složka vytváří čistě kovový vítr (Babel 1995, 1996).

Hvězdy s menší luminozitou mají vítr s menší rychlostí ztráty hmoty a tedy menší hustotu větru. Proto s klesající luminozitou hvězdy se bod, ve kterém dochází ke zlomu rychlostní závislosti, posunuje směrem ke hvězdě.

4.4 Trojsložkový neizotermický hvězdný vítr

V kapitole 1.2.3 bylo ukázáno, že ohřev větru třením je nezanedbatelný, pokud je rozdíl rychlostí složek srovnatelný s jejich tepelnými rychlostmi. Podíváme-li se na obrázek 4.5, zobrazující dvojsložkový izotermický model hvězdy, ve kterém tření mezi složkami ovlivňuje závislost rychlosti na poloměru, vidíme, že díky relativně velkému rozdílu rychlostí mezi složkami bude jistě docházet k ohřevu větru třením. Je tedy zřejmé, že izotermické modely neposkytují dostatečně přesný obraz hvězdných větrů s malou hustotou. Dalším faktorem, který může mít v reálných hvězdných větrech důležitou úlohu, je přítomnost elektronů. Ty mohou jednak zprostředkovat předávání hybnosti mezi dvěma hustějšími složkami větru a jednak mohou přispívat k ohřevu větru (Krtička a Kubát 2001a).

Abychom zahrnuli vliv zmiňovaných dvou jevů na hvězdný vítr, budeme uvažovat vítr složený ze tří složek. Ty budou popsány rovnicemi kontinuity, pohybovými rovnicemi a navíc společnou energiovou rovnicí. Dvěmi ze složek budou, stejně jako v minulém případě, vodíkové ionty, označované indexem p a absorbující ionty, označované indexem i. K těmto složkám přibudou volné elektrony, označované indexem e. Budeme předpokládat, že náboj všech složek je konstantní, v případě vodíku a elektronů je roven elementárnímu náboji. Dále se omezíme pouze na stacionární, sféricky symetrický hvězdný vítr.

4.4.1 Rovnice

Rovnice kontinuity, pohybové rovnice

Rovnice kontinuity (1.48a) má v uvažovaném případě tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_a v_{ra}\right)=0, \quad \text{kde } a=\mathrm{i},\mathrm{p},\mathrm{e}. \tag{4.81}$$

Podobně pohybová rovnice (1.48b), rovnice kontinuity hybnosti,

$$v_{ra}\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r}=g_a^{\mathrm{rad}}-g-\frac{1}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a_a^2\rho_a\right)+\frac{q_a}{m_a}E+\frac{1}{\rho_a}\sum_{b\neq a}R_{ab}, \quad \text{kde } a,b=\mathrm{i},\mathrm{p},\mathrm{e}. \tag{4.82}$$

V rovnicích v_{ra} a ρ_a značí radiální rychlost a hustotu jednotlivých složek, izotermická rychlost zvuku je dána výrazem $a_a^2=kT/m_a$, g je gravitační síla, zářivá síla g_a^{rad} působí pouze na absorbující ionty a elektrony a E je polarizační elektrické pole.

Síla tření (na jednotku objemu) je určena ve vzorci (1.48b)

$$R_{ab}=N_aN_b\frac{4\pi\ln\Lambda q_a^2q_b^2}{kT}G\left(\frac{u_{ab}}{\alpha_{ab}}\right)\frac{u_{ab}}{|u_{ab}|}, \tag{4.83}$$

ve kterém jsou veličiny u_{ab} a α_{ab} dány vztahy (1.42a,1.42b)

$$u_{ab}=v_{rb}-v_{ra}, \tag{4.84a}$$

$$\alpha_{ab}^2=2kT\frac{m_a+m_b}{m_am_b}. \tag{4.84b}$$

Zářivá síla v rovnici (4.82) má stejné vyjádření jako ve dvojsložkovém případě (4.38). Poněkud se však liší význam jednotlivých členů. Hustotu elektronů, vystupující ve vzorci, je již možné získat přímo ze spočteného modelu. Velice podstatným rozdílem je také závislost tepelné rychlosti v_{th} na teplotě. Zářivá síla působící na elektrony $g_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}}$ je dána rozptylem záření na volných elektronech, tj.

$$g_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}}=\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\frac{G\Gamma\mathfrak{M}}{r^2}. \tag{4.85}$$

Protože ve vztahu (3.58) byla tato síla počítána na jednotku hmotnosti protonů, objevuje se ve vzorci nově podíl $m_{\mathrm{p}}/m_{\mathrm{e}}$. Rychlost a hustotu elektronů není nutné počítat pomocí rovnice kontinuity (4.81) a pohybové rovnice (4.82), ale je možné využít předpokladu kvazineutrality plazmatu

$$N_{\mathrm{e}}=N_{\mathrm{p}}+z_{\mathrm{i}}N_{\mathrm{i}} \tag{4.86}$$

a předpokladu, že větrem neprotékají žádné makroskopické elektrické proudy,

$$N_{\mathrm{e}}v_{r\mathrm{e}}=N_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}+z_{\mathrm{i}}N_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}, \tag{4.87}$$

kde $z_{\mathrm{i}}=q_{\mathrm{i}}/e$ je náboj kovů v jednotkách elementárního náboje e. Zatímco předpoklad kvazineutrality plazmatu je oprávněný, předpoklad neexistence elektrických proudů ve větru je do jisté míry omezující (viz. kap. 5.7).

Člen $v_{r\mathrm{e}}\mathrm{d}v_{r\mathrm{e}}/\mathrm{d}r$ v pohybové rovnici elektronů může být vzhledem k tlaku elektronů zanedbán a následně lze tuto rovnici využít pro výpočet polarizačního elektrického pole

$$\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}E=g_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}}-g+\frac{1}{\rho_{\mathrm{e}}}\left(R_{\mathrm{ep}}+R_{\mathrm{ei}}\right)-\frac{1}{\rho_{\mathrm{e}}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a_{\mathrm{e}}^2\rho_{\mathrm{e}}\right). \tag{4.88}$$

Zákon zachování energie

Poslední rovnicí popisující trojsložkový neizotermický vítr je rovnice zákona zachování energie. Vyjdeme z rovnic (1.48c), popisujících sféricky symetrický, vícesložkový neizotermický vítr. Rovnice pro jednotlivé složky sečteme, za předpokladu shodné teploty všech složek získáme

$$\frac{3}{2}k\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\sum_a v_{r\,a}\frac{\rho_a}{m_a}+\sum_a a_a^2\rho_a\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 v_{r\,a}\right)=Q^{\mathrm{rad}}-\frac{1}{2}\sum_a\sum_{b\neq a}R_{ab}\left(v_{r\,a}-v_{r\,b}\right). \tag{4.89}$$

První člen na levé straně popisuje přenos tepla spojený s pohybem větru, druhý člen adiabatické ochlazování větru, druhý člen na pravé straně popisuje ohřev větru třením jednotlivých složek. Díky tomu, že Chandrasekharova funkce pro malé hodnoty argumentu je přímo úměrná rozdílu rychlostí složek (viz. kap. 1.2.3), je teplo, získané třením, přímo úměrné kvadrátu rozdílů rychlostí složek. Pokud je tedy rozdíl rychlostí podstatně menší než příslušná střední tepelná rychlost, pak k ohřevu větru třením nedochází.

Způsob výpočtu zářivého ochlazování je stejný jako v případě jednosložkového neizotermického větru, pro výpočet členu Q^{rad} byly použity vztahy (4.25, 4.26). Pro výpočet Eddingtonovského toku $H(R_*,\nu)$ byly použity sféricky symetrické statické modely vodíkových atmosfér (Kubát 2001).

4.4.2 Singulární body

Při popisu singulárních bodů trojsložkového neizotermického větru bychom mohli, podobně jako v kapitole 4.3.2, vyjít z hydrodynamických rovnic (1.48). Protože tento postup by byl poněkud složitější, omezíme se na jednodušší postup hledání singulárních bodů.

Singulární body jsou body, ve kterých není možné vyjádřit derivace jednotlivých proměnných přímo z pohybových rovnic. Pohybové rovnice (4.82) s vypsanými členy obsahujícími derivace podle poloměru mají tvar (se započtením polarizačního elektrického pole (4.88))

$$v_{r\,a}\frac{\mathrm{d}v_{r\,a}}{\mathrm{d}r}=-\frac{a_a^2}{N_a}\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}r}-\frac{\mathrm{d}a_a^2}{\mathrm{d}r}-z_a\frac{a_a^2}{N_\mathrm{e}}\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{e}}{\mathrm{d}r}-z_a\frac{\mathrm{d}a_a^2}{\mathrm{d}r}+g_a^{\mathrm{rad}}+F_1(v_{r\,a},N_a,v_{r\,b},N_b,T), \tag{4.90}$$

kde funkce F_1 již nezávisí na žádných derivacích proměnných. Podobným způsobem je možné též zapsat rovnici přenosu energie (4.89) jako

$$-\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}=\frac{2}{3}\frac{\sum_b N_b\frac{\mathrm{d}v_{r\,b}}{\mathrm{d}r}}{\sum_b N_b v_{r\,b}}+F_2(v_{r\,a},N_a,v_{r\,b},N_b,T). \tag{4.91}$$

Bylo by možné hledat singulární body celkem pěti rovnic s pěti proměnnými (rovnic kontinuity hmotnosti a hybnosti pro neabsorbující složku a ionty, rovnice zachování energie s derivacemi rychlostí a koncentrací jednotlivých částic a s derivací teploty podle poloměru jako proměnnými), úspornější je však vyjádřit derivace teploty a koncentrací pomocí derivací rychlostí a dosadit do pohybové rovnice. Nejdříve tedy z rovnic kontinuity hmotnosti (4.81) vyjádříme derivace koncentrace podle poloměru pomocí derivace rychlosti podle poloměru

$$\frac{\mathrm{d}N_a}{\mathrm{d}r}=-\frac{N_a}{v_{r\,a}}\frac{\mathrm{d}v_{r\,a}}{\mathrm{d}r}+F_3(v_{r\,a},N_a,v_{r\,b},N_b,T). \tag{4.92}$$

Derivaci kvadrátu izotermické rychlosti zvuku ideálního plynu je možné vyjádřit jako

$$\frac{\mathrm{d}a_a^2}{\mathrm{d}r}=\frac{a_a^2}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}. \tag{4.93}$$

Z rovnice kvazineutrality (4.86) vyjádříme derivaci koncentrace elektronů podle poloměru, platí (náboj složek se podle předpokladu nemění)

$$\frac{\mathrm{d}N_\mathrm{e}}{\mathrm{d}r} = \sum_{b\neq \mathrm{e}} z_b \frac{\mathrm{d}N_b}{\mathrm{d}r} = -\sum_{b\neq \mathrm{e}} z_b \frac{N_b}{v_{rb}} \frac{\mathrm{d}v_{rb}}{\mathrm{d}r} + F_4(v_{ra}, N_a, v_{rb}, N_b, T). \tag{4.94}$$

Z rovnice kontinuity hmotnosti elektronů (4.81) získáme vztah pro derivaci rychlosti elektronů podle poloměru

$$\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{e}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{v_{r\mathrm{e}}}{N_\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}N_\mathrm{e}}{\mathrm{d}r} + F_5(v_{r\mathrm{e}}, N_\mathrm{e}, r). \tag{4.95}$$

Pro výpočet gradientu izotermické rychlosti zvuku a_a potřebujeme znát gradient teploty, který lze získat z upravené rovnice kontinuity energie (4.91). S využitím rovnic nulovosti celkového elektrického proudu (4.87) lze pro gradient teploty napsat

$$-\frac{1}{T}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{2}{3} \frac{\sum_{b\neq \mathrm{e}} \left(1 + z_b \frac{v_{r\mathrm{e}}}{v_{rb}}\right) N_b \frac{\mathrm{d}v_{rb}}{\mathrm{d}r}}{\sum_{b\neq \mathrm{e}} (1+z_b) N_b v_{rb}} + F_6(v_{ra}, N_a, v_{rb}, N_b, T). \tag{4.96}$$

S užitím uvedených vztahů je možné pohybovou rovnici (4.90) přepsat a vyjádřit pouze členy obsahující derivace rychlostí neabsorbující složky a iontů podle poloměru. Tyto rovnice je možné souhrnně zapsat v maticové formě

$$\mathsf{D}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}, \tag{4.97}$$

kde $\boldsymbol{y}$ je sloupcový vektor se členy

$$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{v_{r\mathrm{p}}} \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} \\ \frac{1}{v_{r\mathrm{i}}} \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} \end{pmatrix}, \tag{4.98}$$

vektor $\boldsymbol{b}$ nezávisí na derivacích proměnných podle r a matice D má členy

$$D_{aa} = v_{ra}^2 - \frac{\partial g_a^\mathrm{rad}}{\partial \left(\mathrm{d}v_{ra}/\mathrm{d}r\right)} - a_a^2 \left[1 + z_a \frac{N_a}{N_\mathrm{e}} \left(z_a + \frac{2}{3} \frac{1+z_a}{z_a} \frac{N_\mathrm{e}\left(v_{ra} + z_a v_{r\mathrm{e}}\right)}{\sum_{b\neq \mathrm{e}} (1+z_b) N_b v_{rb}}\right)\right], \tag{4.99a}$$

$$D_{ac} = -a_a^2 \frac{N_\mathrm{c}}{N_\mathrm{e}} \left[z_\mathrm{c} z_a + \frac{2}{3} (1+z_a) \frac{N_\mathrm{e}\left(v_{r\mathrm{c}} + z_\mathrm{c} v_{r\mathrm{e}}\right)}{\sum_{b\neq \mathrm{e}} (1+z_b) N_b v_{rb}}\right]. \tag{4.99b}$$

Systém pohybových rovnic má singulární body v případě, že determinant matice D je nulový. Protože jsou členy v hranatých závorkách (4.99a) a (4.99b) řádově shodné, je možné za předpokladu, že koncentrace iontů je zanedbatelná, $N_\mathrm{i} \ll N_\mathrm{e}$, zanedbat člen D_{pi}. Podmínky pro singulární body mají tvar

$$D_{\mathrm{pp}} = 0, \tag{4.100a}$$

$$D_{\mathrm{ii}} = 0. \tag{4.100b}$$

Podobně jako v případě dvojsložkového izotermického větru, pokud nedojde k oddělení jednotlivých částí větru, tedy pokud platí $v_{r\mathrm{i}} \approx v_{r\mathrm{p}}$, pak rovnost (4.100b) nebude splněna v žádné oblasti větru (neboť člen obsahující derivaci zářivé síly je řádově větší než zbylé členy) a pro určení rychlosti ztráty hmoty větru je nutné použít jinou podmínku. Tu je možné lehce získat sečtením pohybových rovnic neabsorbujících a absorbujících iontů (4.82). Získáme rovnici (znovu explicitně nevypisujeme členy ve kterých nevystupují derivace jednotlivých proměnných podle poloměru)

$$\rho_{\mathrm{p}}\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + \rho_{\mathrm{i}}\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} - \rho_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} + \frac{1}{T}\left(\rho_{\mathrm{p}} a_{\mathrm{p}}^2 + \rho_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}^2\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} + \\ + \frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{e}}}\frac{\mathrm{d}\left(a_{\mathrm{p}}^2\rho_{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}r} + z_{\mathrm{i}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{\rho_{\mathrm{e}}}\frac{\mathrm{d}\left(a_{\mathrm{i}}^2\rho_{\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}r} = F_6(r,\rho_{\mathrm{a}},v_{r\mathrm{a}}). \tag{4.101}$$

S užitím rovnice kvazineutrality (4.86) je možné předcházející rovnici přepsat jako

$$\rho_{\mathrm{p}}\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + \rho_{\mathrm{i}}\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} - \rho_{\mathrm{i}} g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} + \frac{1}{T}\left(2\rho_{\mathrm{p}} a_{\mathrm{p}}^2 + \left(1+z_{\mathrm{i}}\right)\rho_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}^2\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} - \\ - \left(a_{\mathrm{p}}^2\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{e}}} + a_{\mathrm{i}}^2 z_{\mathrm{i}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{\rho_{\mathrm{e}}}\right)\left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{v_{r\mathrm{p}}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + z_{\mathrm{i}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{v_{r\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right) = F_7(r,\rho_{\mathrm{a}},v_{r\mathrm{a}}). \tag{4.102}$$

Vyjádříme-li derivaci teploty podle poloměru podle vztahu (4.96), pak je patrné, že pokud bude platit

$$\rho_{\mathrm{p}}\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{a_{\mathrm{p}}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + \rho_{\mathrm{i}}\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{a_{\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}} - \frac{\partial g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\right)\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{T}\left(2\rho_{\mathrm{p}} a_{\mathrm{p}}^2 + \left(1+z_{\mathrm{i}}\right)\rho_{\mathrm{i}} a_{\mathrm{i}}^2\right)\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} - \\ - \left(a_{\mathrm{p}}^2\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{e}}} + a_{\mathrm{i}}^2 z_{\mathrm{i}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{\rho_{\mathrm{e}}}\right)\left(\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{\rho_{\mathrm{p}}}{v_{r\mathrm{p}}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} + z_{\mathrm{i}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}\frac{\rho_{\mathrm{i}}}{v_{r\mathrm{i}}}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right) = 0, \tag{4.103}$$

pak nezávisí získaná pohybová rovnice na derivaci žádné z proměnných. Tato podmínka (4.103) byla použita pro stanovení rychlosti ztráty hmoty. Podobně jako v případě dvojsložkového izotermického větru vyjadřuje podmínku pro místo, ve kterém je rychlost trojsložkových Abbottových vln rovna rychlosti větru.

4.4.3 Spodní okrajové podmínky

Protože musí být splněny dvě podmínky pro kritické body, byla zvolena spodní okrajová podmínka modelu v kritickém bodě vodíku. Z toho plyne podmínka pro rychlost neabsorbující složky (viz. 4.100a)

$$v_{r\mathrm{p}}^2(R_*) = a_{\mathrm{p}}^2\left[1 + z_{\mathrm{p}}\frac{N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{e}}}\left(z_{\mathrm{p}} + \frac{2}{3}\frac{1+z_{\mathrm{p}}}{z_{\mathrm{p}}}\frac{N_{\mathrm{e}}\left(v_{r\mathrm{p}} + z_{\mathrm{p}} v_{r\mathrm{e}}\right)}{\sum\limits_{b\neq\mathrm{e}}\left(1+z_b\right)N_b v_{rb}}\right)\right]. \tag{4.104}$$

Podmínku pro rychlost absorbujících iontů na hranici je možné získat z momentové rovnice pro neabsorbující složku (4.82) za předpokladu splnění podmínky (4.104) ve tvaru

$$\frac{R_{\mathrm{pi}}}{\rho_{\mathrm{p}}} + \left(1 - \frac{N_{\mathrm{p}}}{N_{\mathrm{e}}}\right)\frac{R_{\mathrm{pe}}}{\rho_{\mathrm{p}}} + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{R_{\mathrm{ei}}}{\rho_{\mathrm{e}}} = -\frac{4a_{\mathrm{p}}^2}{r} + \frac{G\mathfrak{M}}{r^2}\left(1 - \mathit{\Gamma} + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\right). \tag{4.105}$$

Pro horké hvězdy se slunečním chemickým složením je možné zanedbat koncentraci iontů vzhledem ke koncentraci elektronů, $N_\mathrm{e} \gg N_\mathrm{i}$ a předpokládat, že koncentrace elektronů a vodíkových iontů jsou téměř shodné, $N_\mathrm{p} \approx N_\mathrm{e}$. Za těchto zjednodušujících předpokladů lze rovnici (4.105) přepsat ve výsledném tvaru

$$\frac{R_\mathrm{pi}}{\rho_\mathrm{p}} + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\frac{R_\mathrm{ei}}{\rho_\mathrm{e}} = -\frac{4a_\mathrm{p}^2}{r} + \frac{G\mathfrak{M}}{r^2}\left(1-\varGamma\right). \tag{4.106}$$

Okrajovou podmínku pro hustotu neabsorbující složky je možné zvolit stejně jako ve dvojsložkovém případě (4.70),

$$\rho_\mathrm{p}(R_*) = \frac{1}{\mathfrak{Y}_\mathrm{i}}\rho_\mathrm{i}(R_*)\frac{v_{r\mathrm{i}}(R_*)}{v_{r\mathrm{p}}(R_*)}. \tag{4.107}$$

Hustota kovů na hranici je volena tak, aby byla splněna CAK kritická podmínka (4.103). Postup hledání této hustoty byl popsán v kap. 4.1.4. Okrajovou podmínku pro hustotu a rychlost elektronů lze získat přímo z podmínky kvazineutrality a podmínky pro bezproudové plazma, (4.86) a (4.87).

Za předpokladu, že se vítr na spodním okraji nachází v zářivé rovnováze, je možné zapsat okrajovou podmínkou pro teplotu jako

$$Q^\mathrm{rad}(R_*) = 0. \tag{4.108}$$

4.4.4 Numerické řešení rovnic

Pro výpočet trojsložkového neizotermického modelu větru byla použita Newton-Raphsonova metoda, popsaná v kapitole 4.1. Vektor proměnných, který popisuje hledaný model, byl zvolen ve tvaru

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\psi} = \big(&\rho_{\mathrm{i}1},v_{r\mathrm{i}1},\rho_{\mathrm{p}1},v_{r\mathrm{p}1},\rho_{\mathrm{e}1},v_{r\mathrm{e}1},T_1,\rho_{\mathrm{i}2},v_{r\mathrm{i}2},\rho_{\mathrm{p}2},v_{r\mathrm{p}2},\rho_{\mathrm{e}2},v_{r\mathrm{e}2},T_2,\dots\\ &\dots,\rho_{\mathrm{i}\,\mathrm{NR}},v_{r\mathrm{i}\,\mathrm{NR}},\rho_{\mathrm{p}\,\mathrm{NR}},v_{r\mathrm{p}\,\mathrm{NR}},\rho_{\mathrm{e}\,\mathrm{NR}},v_{r\mathrm{e}\,\mathrm{NR}},T_\mathrm{NR}\big)^\mathrm{T}.\end{aligned} \tag{4.109}$$

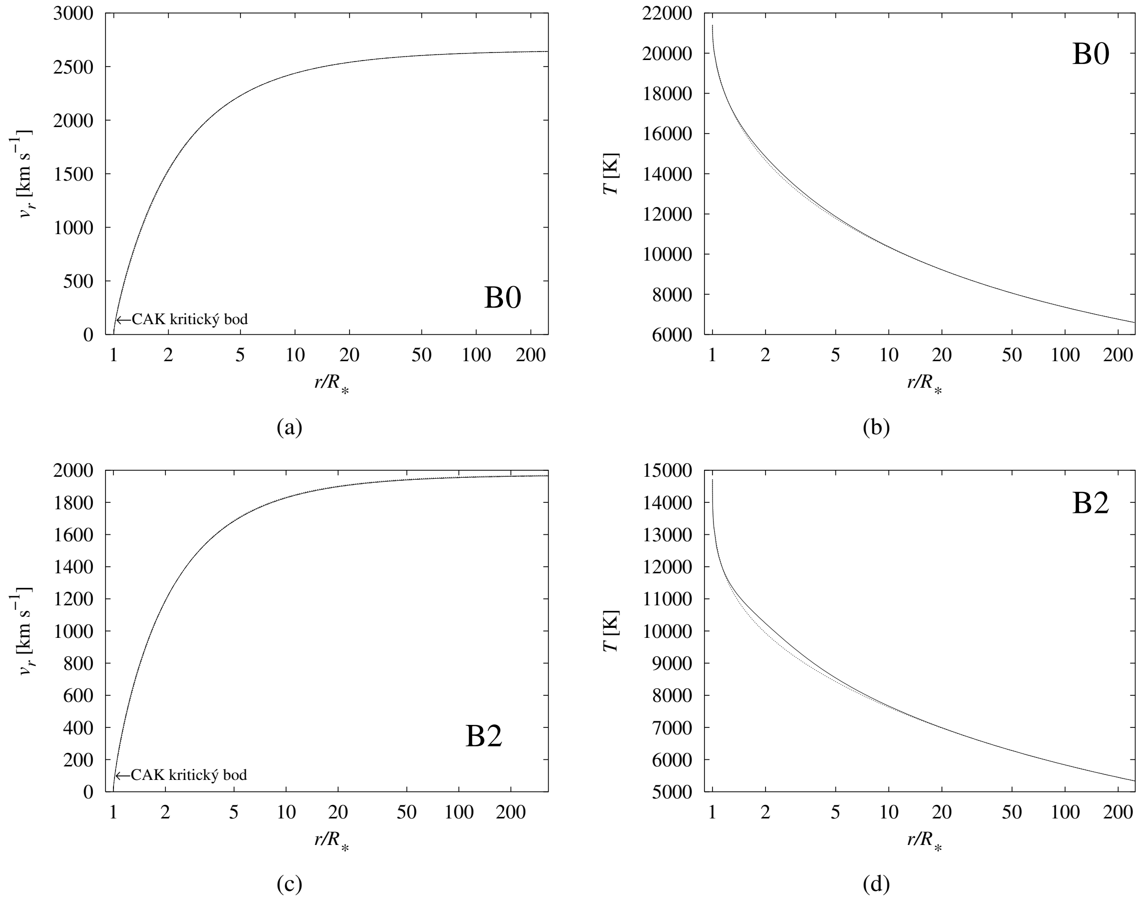
Oproti modelu dvojsložkového izotermického větru tedy přibývají složky popisující hustotu a rychlost elektronů a teplotu v jednotlivých uzlových bodech. Podrobný popis jednotlivých členů nelineárního operátoru P a příslušného Jacobiánu je uveden v dodatku B.2.

4.4.5 Spočtené modely

Parametry hvězd a jejich větrů, pro které byl spočten model trojsložkového neizotermického větru jsou uvedeny v tabulce 4.5. Podobně jako v předešlých případech jsou hmotnosti, poloměry a efektivní teploty hvězd hlavní posloupnosti převzaty z práce Harmance (1988), parametry k, α a δ spočetl Abbott (1982). Průměrný absorbující iont je reprezentován atomem uhlíku.

Tabulka 4.5: Parametry trojsložkových neizotermických modelů hvězdných větrů

Spektrální	Parametry hvězdy			Parametry větru			Průměrný iont	
typ (hvězda)	$\mathfrak{M}\,[\mathfrak{M}_\odot]$	$R_*\,[R_\odot]$	T_eff [K]	k	α	δ	$m_\mathrm{i}/m_\mathrm{p}$	z_i
B0	14,57	5,80	29 900	0,156	0,609	0,120	12,0	2,0
B2	8,62	4,28	23 100	0,377	0,537	0,091	12,0	2,0
B3	6,07	3,56	19 100	0,477	0,506	0,089	12,0	2,0
B4	5,12	3,26	17 200	0,365	0,509	0,105	12,0	2,0
B5	4,36	3,01	15 500	0,235	0,511	0,12	12,0	2,0



Obrázek 4.8: Porovnání průběhu rychlostí a teploty jednosložkových a trojsložkových hvězdných větrů s relativně vysokou hustotou. Plná čára značí ionty vodíku, čerchovaná absorbující ionty a tečkovaná jednosložkový model. Jednotlivé čáry splývají. Navíc, rychlost ztráty hmoty se v obou modelech ustavuje v témže bodě.

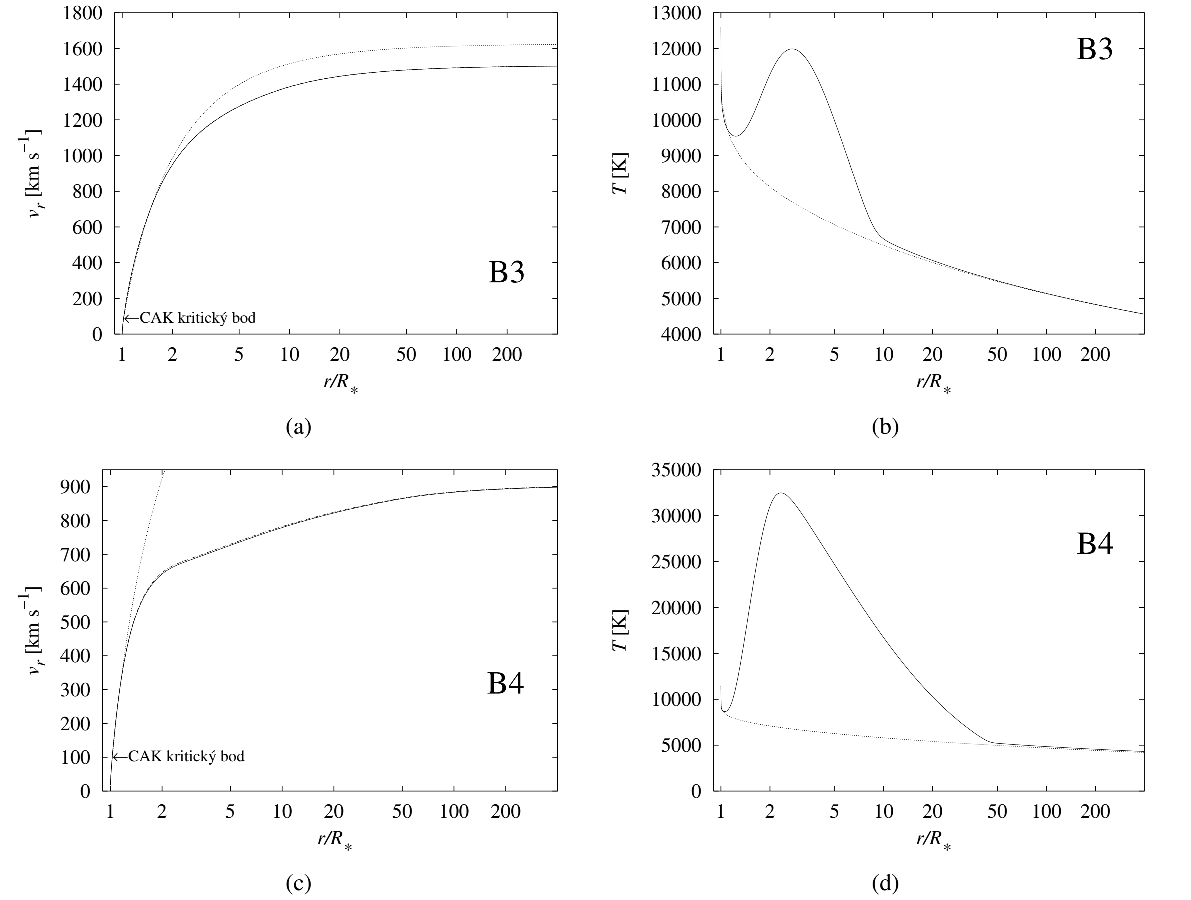
Větry s vysokou hustotou

Jak již bylo ukázáno v případě dvojsložkového větru, pokud je hustota větru vysoká (tedy u hvězd s velkou hodnotou rychlosti ztráty hmoty), pak se v modelech větru neprojeví žádný rozdíl mezi jednosložkovým a vícesložkovým přístupem. Jediným jevem, který je v našem případě schopen odlišit oba druhy modelů, je ohřev větru prostřednictvím tření. Protože je však rozdíl rychlostí složek při velké hustotě větru malý, je možné předpokládat, že ohřev bude zanedbatelný a ani tento jev nepovede k odlišení jednosložkových a vícesložkových modelů.

Tento závěr potvrzují modely větrů hvězd B0 a B2 na obrázku 4.8. Je patrné, že jak průběh rychlostí, tak průběh teploty v trojsložkovém a jednosložkovém větru jsou téměř shodné. Podobně jako v jednosložkových modelech je teplota určena především zářivou rovnováhou.

Ohřev větru třením

Jinak tomu ovšem je v případě hvězd s menší hustotou větru, kde tření začíná hrát důležitou roli, jak je vidět na obrázku 4.9 pro případ hvězd spektrálních typů B3 a B4. Podobně jako v izotermickém případě pro tyto větry platí, že pro udržení společného proudu složek je nutné, aby docházelo k předávání dostatečného množství hybnosti prostřednictvím tření. Na okraji větru v blízkosti hvězdy je vítr dostatečně hustý, stačí tedy poměrně malý rozdíl rychlostí pro předávání hybnosti mezi složkami. Z toho plyne, že v této oblasti je ohřev třením zanedbatelný a v blízkosti hvězdy je teplota trojsložkových modelů



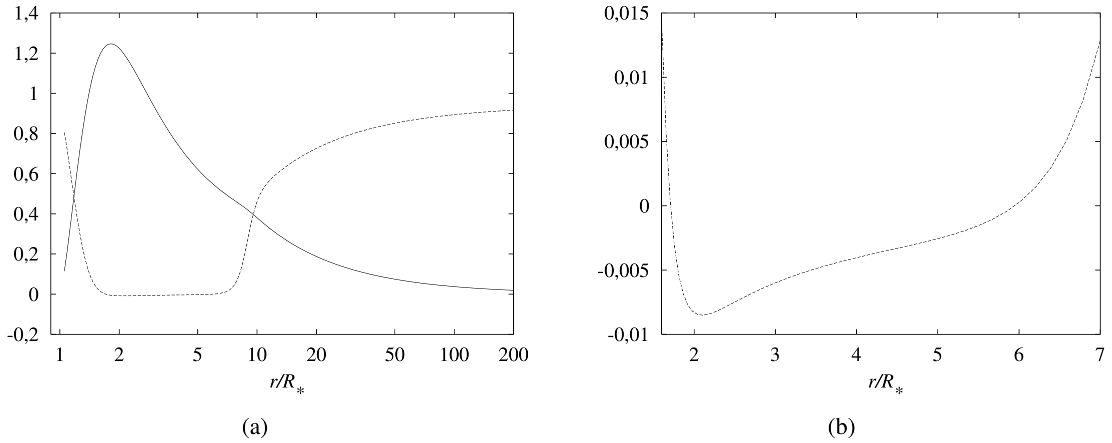
Obrázek 4.9: Porovnání průběhu rychlostí a teploty jednosložkových a trojsložkových hvězdných větrů s relativně nízkou hustotou. Plná čára značí ionty vodíku, čerchovaná absorbující ionty a tečkovaná jednosložkový model. Rychlosti vodíku a absorbujících iontů většinou splývají. Vítr je ohříván třením, klesá jeho konečná rychlost v_∞.

dána především zářivými procesy. V blízkosti hvězdy si tedy teploty trojsložkového a jednosložkového modelu plně odpovídají a není patrný žádný podstatný rozdíl mezi jednosložkovými a trojsložkovými modely.

Tento závěr ve větších vzdálenostech od hvězdy již neplatí. S rostoucí vzdáleností od hvězdy se vítr urychluje, jeho hustota klesá a tedy roste rozdíl rychlostí složek (viz. též obr. 4.2(b)). V důsledku toho se také více energie disipuje prostřednictvím tření, vítr se ohřívá (jak je patrné z obrázků 4.9(b), 4.9(d)). Jelikož však ohřev třením závisí také na součinu hustot složek, ve vnějších oblastech větru ohřev klesá a proto teplota trojsložkového modelu znovu odpovídá teplotě jednosložkové. Navíc vítr ve vnějších oblastech přestává být urychlován a tedy již není možné měnit získanou energii v teplo. Tyto závěry potvrzuje také chování jednotlivých členů v energiové rovnici, jak je nakresleno na obrázku 4.10 pro případ hvězdy spektrálního typu B3.

Ukazuje se, že vítr nejvíce ohřívají srážky mezi absorbující a neabsorbující složkou (protony). Přibližně o dva řády menší příspěvek pochází od srážek mezi elektrony a absorbujícími ionty, zatímco ohřev třením mezi protony a elektrony je díky malému rozdílu rychlostí těchto složek v podstatě zanedbatelný.

Velice zajímavá je též změna závislosti rychlosti na poloměru, způsobená třením. Se zvětšující se teplotou větru roste tepelná rychlost částic a díky závislosti síly záření na tepelné rychlosti klesá zářivá síla (viz. rovnice 4.38). Jak ukázali Vink, de Koter a Lamers (1999), snížení zářivé síly v nadzvukové



Obrázek 4.10: Zářivý ohřev a ochlazování (čárkovaná čára) a ohřev třením (plná čára) vzhledem k adiabatickému ochlazování v modelu hvězdy spektrálního typu B3. Přibližně v oblasti poloměrů $(2\,R_{*},6\,R_{*})$ je ohřev třením tak velký, že dochází k mírnému zářivému ochlazování, viz. také podrobný obrázek (b).

oblasti vede k snížení hodnoty v_{∞}, což je velice dobře patrné také z obrázků 4.9(a) a 4.9(c). Je ovšem nutné zdůraznit, že závislost síly tření na teplotě prostřednictvím tepelné rychlosti je pouze aproximativní a pro přesnější modely je nutné zářivou sílu vypočítat přímo pomocí atomárních dat.

Jednou z podstatných odlišností neizotermických a izotermických vícesložkových modelů je, že v případě neizotermických modelů Chandrasekharova funkce odpovídající tření mezi absorbující a neabsorbující složkou nikde nedosahuje svého maxima (jako funkce svého argumentu). To je způsobeno tím, že s rostoucím třením dochází k ohřevu větru a ke snižování síly záření. Díky tomu má ohřátý trojsložkový vítr větší hustotu než odpovídající izotermický dvojsložkový vítr. Proto je v případě těchto neizotermických modelů možnost oddělení jednotlivých složek větru vyloučena.

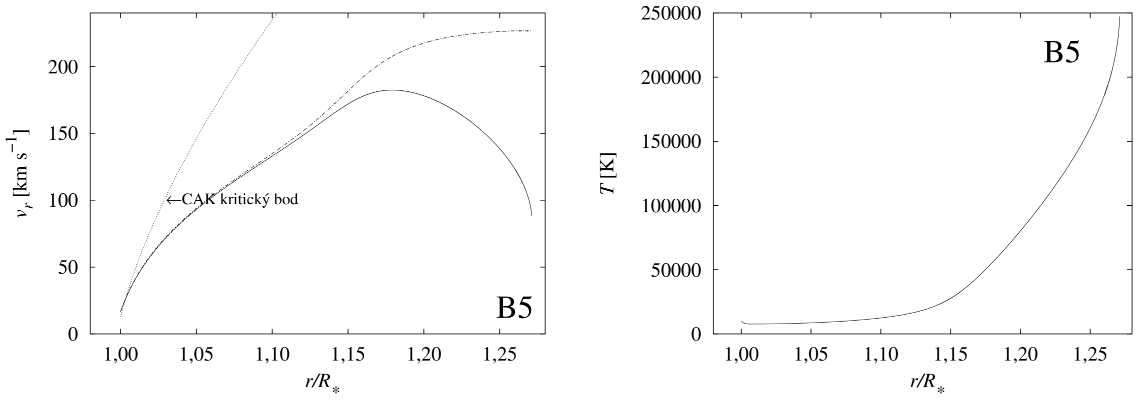
Díky tomu, že teplota v bodě ve kterém se ustavuje rychlost ztráty hmoty je stejná v trojsložkových i jednosložkových modelech, dávají tyto modely stejnou hodnotu rychlosti ztráty hmoty jako modely jednosložkové. Získaná rychlost ztráty hmoty odpovídá své maximální možné hodnotě, stejně tak, jako je tomu v jednosložkovém případě (Poe, Owocki a Castor 1990).

Pád vodíku zpět na hvězdu

Pro nejnižší hustoty není již schopna absorbující složka vynést neabsorbující složku do mezihvězdného prostoru, jak je patrné z obrázku 4.11. Obě složky se oddělují v místě, kde jejich rychlosti ještě nedosahují příslušnou únikovou rychlost a neabsorbující složka padá zpátky na hvězdu. Tento model je obdobou izotermického modelu, nakresleného na obr. 4.7(e). Obdobně jako ve zmiňovaném izotermickém případě není možné tyto stacionární modely prodloužit pro libovolně velké hodnoty poloměrů, protože neabsorbující složka dosahuje kritického bodu, ve kterém $\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}/\mathrm{d}r \to -\infty$. Oddělování složek je doprovázeno prudkým zvýšením teploty větru (viz. obr. 4.11(b)).

Díky velké třecí síle mezi elektrony a vodíkem a díky elektrickému polarizačnímu poli se tyto složky pohybují společně. Je ovšem otázkou, nakolik je tento závěr oprávněný. Je možné, že rozdělovací funkce elektronů již neodpovídá Maxwellovskému rozdělení rychlostí a malá část elektronů má stejnou rychlost jako absorbující ionty. Tyto podrobnosti není možné použitými modely studovat, protože při odvozování hydrodynamických rovnic (1.48) jsme předpokládali Maxwellovské rozložení rychlostí všech složek.

Pouze v případě pádu vodíku zpět na hvězdu ovlivňuje tření výslednou rychlost ztráty hmoty. V blízkosti CAK bodu je teplota trojsložkového větru přibližně třikrát vyšší než teplota jednosložkového větru, což vede ke snížení zářivé síly a tedy také ke snížení rychlosti ztráty hmoty. V našem případě je



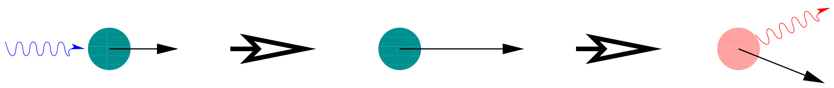
(a) (b)

Obrázek 4.11: Model trojsložkového neizotermického větru hvězdy spektrálního typu B5. Plná čára značí ionty vodíku, čerchovaná absorbující ionty a tečkovaná jednosložkový model. Rychlosti vodíku a elektronů splývají, průběh teploty jednosložkového modelu není zakreslen.

rychlost ztráty hmoty trojsložkového modelu $4{,}9.10^{-12}\,\mathfrak{M}_\odot/\mathrm{rok}$, zatímco jednosložkový model vede k hodnotě $7{,}0.10^{-12}\,\mathfrak{M}_\odot/\mathrm{rok}$. V izotermickém případě se tato změna samozřejmě nevyskytuje.

4.5 Gayleyho-Owockého ohřev

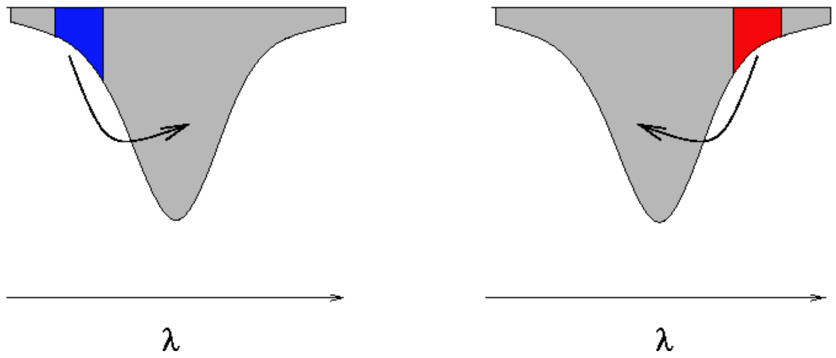
Podstata Gayleyho-Owockého (GO) ohřevu je ukryta v samotných procesech absorpce a emise záření. Tento ohřev, který je aplikací Dopplerovského ohřevu pro případ zářením urychlovaného větru, byl též pozorován v laboratoři při studiu laserového ochlazování plazmatu (např. Wineland, Dalibard a Cohen-Tannoudji 1992). Gayley a Owocki (1994) nazývali tento jev jako Dopplerovský ohřev (ochlazování), ale Gayleyho-Owockého ohřev (ochlazování) je v oblasti hvězdných větrů také vhodný pojem.



Obrázek 4.12: Změna vlnové délky fotonu během absorpce a emise

Proces absorpce a následné emise fotonu je nakreslen na obr. 4.12. Atom pohybující se tepelnou rychlostí absorbuje foton (v určité čáře). Po této absorpci se díky platnosti zákona zachování hybnosti změní jeho rychlost. Obecně se velikost rychlosti atomu může zvětšit nebo zmenšit podle velikosti úhlu mezi vektory rychlosti atomu a fotonu. V okamžiku, kdy je foton následně atomem vyzářen, pohybuje se atom již změněnou rychlostí. Díky Dopplerovu jevu však dojde k posunu frekvence, na které je foton vyzářen. Rozdíl energií mezi pohlceným a vyzářeným fotonem pak může být využit k ohřevu (nebo ochlazování) plazmatu.

K tomuto jevu však může dojít pouze za splnění určitých podmínek. Pokud jsou jednotlivé procesy ochlazování a oteplování v rovnováze, pak k žádné *přímé* změně teploty prostřednictvím čárové absorpce nedochází. Příklad procesu, ve kterém naopak k Dopplerovskému ohřevu (ochlazování) dochází, je uveden na obr. 4.13. Na obrázku je schematicky znázorněna absorpční čára. Pokud na plazma dopadá pouze světlo s vlnovými délkami v krátkovlnném křídle čáry (levá část obrázku), pak dojde (za předpokladu úplné redistribuce) k jeho přerozdělení přes celý emisní profil. Díky tomuto přerozdělení dochází k vyzáření fotonů s větší střední vlnovou délkou, plazma se ohřeje. Pokud naopak na plazma dopadá světlo s vlnovými délkami pouze v dlouhovlnném křídle čáry (pravá část obrázku),



Obrázek 4.13: Schematické znázornění absorpčního profilu a přerozdělení vlnových délek při Dopplerovském ohřevu (vlevo) a ochlazování (vpravo)

pak se po přerozdělení vyzáří fotony s kratší střední vlnovou délkou, plazma se ochladí. Tento jev je podstatou Dopplerovského ochlazování plazmatu.

4.5.1 Dopplerovský ohřev v prostředí hvězdných větrů

V kapitole 1.1.5 bylo ukázáno, že pokud síla působící na plyn závisí na rychlosti částic plynu, pak se v rovnici pro teplotu (1.33) objeví nový člen závislý na této síle. Pouze v tomto případě působení vnější síly vede k přímému ohřevu plynu.

Zářivá síla způsobená absorpcí záření ve spektrálních čarách je typickým příkladem síly závislé na rychlosti částic (v našem případě prostřednictvím Dopplerova jevu). V příslušné energiové rovnici, popisující hvězdný vítr, by se tedy měl objevit člen příslušející této síle.

Člen odpovídající ohřevu v soustavě spojené s pohybujícím se větrem má tvar (viz. rov. (1.33), Krtička a Kubát 2001b)

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \xi_{\mathrm{i},h} f_{\mathrm{i},h} F_{\mathrm{i}}. \tag{4.110}$$

Zde index i označuje absorbující ionty s rozdělovací funkcí F_{i} rychlostí $\xi_{\mathrm{i},h}$, $f_{\mathrm{i},h}$ je síla působící na tyto ionty. Je patrné, že tento člen se vyskytuje v energiové rovnici absorbujících iontů. Je sice zapsán v soustavě pohybující se s prostředím, ale jak již bylo řečeno v kap. 2.3.1, je možné tento výraz v nerelativistickém případě použít též v soustavě spojené s pozorovatelem. Pro výpočet zářivé síly $f_{\mathrm{i},h}$ budeme předpokládat kompletní redistribuci a nezávislost koeficientů absorpce a emise na úhlech v soustavě spojené s pohybujícím se atomem. Zářivá síla působící na atom v „comoving" soustavě má tvar (2.22)

$$f_{\mathrm{i},h} = \frac{m_{\mathrm{i}}}{c} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \oint \mathrm{d}\omega \left[\kappa(\boldsymbol{n},\nu) I(\boldsymbol{n},\nu) - \epsilon(\boldsymbol{n},\nu)\right] n_h. \tag{4.111}$$

Protože se atom vzhledem k soustavě spojené s pohybujícím se prostředím pohybuje, závisí v této soustavě absorpční a emisní koeficienty na úhlech

$$\kappa(\boldsymbol{n},\nu) = \kappa\, \phi_0\left(\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}\right), \tag{4.112a}$$

$$\epsilon(\boldsymbol{n},\nu) = \epsilon\, \phi_0\left(\nu - \frac{\nu_0}{c}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n}\right), \tag{4.112b}$$

kde $\phi_0(\nu)$ je absorpční profil v soustavě spojené s atomem. Tento absorpční profil je normován stejným způsobem, jako profil $\phi(\nu)$ ve vzorci (3.3), ale na rozdíl od $\phi(\nu)$ nezahrnuje tepelné rozšíření čáry. Po úpravách získáme vzorec popisující Gayleyho-Owockého ohřev jako

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{m_{\mathrm{i}}}{c} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \oint \mathrm{d}\omega \, [\kappa I(\boldsymbol{n},\nu) - \epsilon] \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \, \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n} F_{\mathrm{i}} \phi_0 \left(\nu - \frac{\nu_0}{c} \boldsymbol{\xi}_{\mathrm{i}} \cdot \boldsymbol{n} \right). \tag{4.113}$$

Jestliže pro výpočet posledního z integrálů zvolíme jednu z os rovnoběžně ke směru $\boldsymbol{n}$, pak se integrace přes ostatní dvě osy vyruší (integrujeme lichou funkci) a vzorec pro GO ohřev získává tvar

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{m_{\mathrm{i}}}{c} \int_0^\infty \mathrm{d}\nu \oint \mathrm{d}\omega \, [\kappa I(\boldsymbol{n},\nu) - \epsilon] \int \mathrm{d}\xi_{\mathrm{i}} \, \xi_{\mathrm{i}} F_{\mathrm{i}}(\xi_{\mathrm{i}}) \phi_0 \left(\nu - \frac{\nu_0}{c} \xi_{\mathrm{i}} \right), \tag{4.114}$$

kde ξ_{i} je složka rychlosti ve směru $\boldsymbol{n}$. Pokud přepíšeme tuto rychlost ve směru pohledu pomocí bezrozměrných veličin jako $\xi_{\mathrm{i}} = w v_{\mathrm{th,i}}$, použijeme frekvenční vzdálenost od středu čáry jako $x = (\nu - \nu_0) / \Delta\nu_{\mathrm{D}}$, pak vzorec pro GO ohřev je možné přepsat jako

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{m_{\mathrm{i}}}{c} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \oint \mathrm{d}\omega \left[\kappa \tilde{I}(\boldsymbol{n},x) - \Delta\nu_{\mathrm{D}} \epsilon \right] \int_{-\infty}^\infty v_{\mathrm{th,i}}^2 \, \mathrm{d}w \, w \, F_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{th,i}} w) \, \varphi_0(w - x), \tag{4.115}$$

ve kterém jsme zavedli příslušnou intenzitu $\tilde{I}(\boldsymbol{n},x)$ jako $\tilde{I}(\boldsymbol{n},x) \, \mathrm{d}x = I(\boldsymbol{n},\nu) \, \mathrm{d}\nu$ a kde je funkce

$$\varphi_0(x) = \phi_0(x \Delta\nu_{\mathrm{D}}) \tag{4.116}$$

normalizována jako

$$\int_{-\infty}^\infty \varphi_0(x) \mathrm{d}x = 1. \tag{4.117}$$

Na rozdíl od tepelné rychlosti v_{th} (zavedené při normalizaci parametrů zářivé síly) popisuje $v_{\mathrm{th,i}}$ skutečnou tepelnou rychlost absorbujících iontů. Hustota hvězdných větrů je (ve srovnání např. s hvězdnými atmosférami) relativně nízká, proto je možné předpokládat, že jednotlivé čáry jsou rozšířeny pouze tepelným pohybem částic. Profil čáry v soustavě spojené s pohybujícím se atomem má v tomto případě tvar δ-funkce. Zanedbáme-li tedy absorpci v rezonančních křídlech profilu $\varphi_0(w - x) \approx \delta(w - x)$ a budeme-li předpokládat Maxwellovské rozdělení rychlostí

$$F_{\mathrm{i}}(v_{\mathrm{th,i}} w) = \frac{N_{\mathrm{i}}}{v_{\mathrm{th,i}} \sqrt{\pi}} \, \mathrm{e}^{-w^2},$$

pak má vzorec pro GO ohřev tvar

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{m_{\mathrm{i}} N_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{th,i}}}{c} \oint \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, x \varphi(x) \left[\kappa \tilde{I}(\boldsymbol{n},x) - \Delta\nu_{\mathrm{D}} \epsilon \right], \tag{4.118}$$

ve kterém

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-x^2}. \tag{4.119}$$

Díky symetrii absorpčního profilu (4.119) je součin $x\varphi(x)$ lichou funkcí a tedy po integraci přes x vymizí. To tedy znamená, že za předpokladu úplné redistribuce nepřispívá proces emise *přímo* ke GO ohřevu. V tomto případě lze tedy vzorec (4.118) zjednodušit na

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{m_{\mathrm{i}} N_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{th,i}}}{c} \oint \mathrm{d}\omega \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, x \varphi(x) \kappa \tilde{I}(\boldsymbol{n},x). \tag{4.120}$$

V nepohybujícím se prostředí je součin $x\varphi(x)\tilde{I}(\boldsymbol{n},x)$ lichou funkcí proměnné x a tedy ve statických atmosférách se jev GO ohřevu nevyskytuje. V případě sféricky symetrických hvězdných větrů je pak možné obecný vzorec (4.120) zjednodušit na tvar

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \frac{2\pi \kappa \rho_{\mathrm{i}} v_{\mathrm{th,i}}}{c} \int_{-1}^1 \mathrm{d}\mu \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}x \, x \varphi(x) \tilde{I}(\mu,x), \tag{4.121}$$

který poprvé pro případ hvězdných větrů použili Gayley a Owocki (1994).

4.5.2 Gayleyho-Owockého ohřev za předpokladu platnosti Sobolevovy aproximace

V případě dvouhladinového atomu bez kontinua je řešení rovnice přenosu v Sobolevově aproximaci dáno vzorcem (3.36)

$$\tilde{I}(\mu,x) = \tilde{I}_c \left\{ \frac{\beta_c}{\beta} + \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \mathrm{e}^{-\tau_\mu \Phi(x)} \right\}. \tag{4.122}$$

V této rovnici však, na rozdíl od vzorce (3.36), vystupuje intenzita záření definovaná vzhledem k bezrozměrné frekvenci x. Sobolevova optická hloubka (3.18) za předpokladu sférické symetrie (3.33) vyjádřená pomocí hustoty absorbujících iontů má tvar

$$\tau_\mu = \frac{\rho_\mathrm{i} \kappa v_\mathrm{th} r}{\mathfrak{Y}_\mathrm{i} v_{r\mathrm{i}} \left(1 + \sigma\mu^2\right)}. \tag{4.123}$$

Pokud dosadíme řešení rovnice přenosu (4.122) do vztahu pro Gayleyho-Owockého ohřev (4.121), získáme vztah

$$Q_\mathrm{i}^\mathrm{GO} = \frac{2\pi\kappa\rho_\mathrm{i} v_\mathrm{th,i} \tilde{I}_c}{c} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\varphi(x) \mathrm{e}^{-\tau_\mu \Phi(x)}. \tag{4.124}$$

Tento vzorec udává velikost GO ohřevu pouze pro jedinou čáru. Vliv velkého počtu čar bývá obvykle zahrnut pomocí rozdělovací funkce čar (viz. kap. 3.2.2 a vzorec (3.95))

$$\mathrm{d}N(\kappa) = -N_0 \left(\frac{\rho_\mathrm{e} / \left(W m_\mathrm{e}\right)}{10^{11} \mathrm{cm}^{-3}} \right)^\delta \kappa^{\alpha-2} \mathrm{d}\kappa \frac{\mathrm{d}\nu}{\nu}, \tag{4.125}$$

kde normalizační konstanta N_0 je dána vzorcem (3.54)

$$N_0 = \frac{ck}{v_\mathrm{th}} \left(1 - \alpha\right) \alpha\, \sigma_\mathrm{e}^{1-\alpha}. \tag{4.126}$$

GO ohřev se započtením zmiňovaného rozdělení čar lze zapsat jako

$$Q_\mathrm{i}^\mathrm{GO} = \frac{\rho_\mathrm{i} v_\mathrm{th} v_\mathrm{th,i} L N_0}{2\pi c^2 \mathfrak{Y}_\mathrm{i} R_*^2} \left(\frac{\rho_\mathrm{e} / \left(W m_\mathrm{e}\right)}{10^{11} \mathrm{cm}^{-3}} \right)^\delta \int_0^\infty \mathrm{d}\kappa\, \kappa^{\alpha-1} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\varphi(x) \mathrm{e}^{-\tau_\mu \Phi(x)}, \tag{4.127}$$

kde byl pro záření hvězdy použit vzorec $\tilde{I}_c = \Delta\nu_\mathrm{D} L / 4\pi^2 R_*^2$. Po substituci $y = \kappa\rho_\mathrm{i} v_\mathrm{th} r / \mathfrak{Y}_\mathrm{i} v_{r\mathrm{i}}$ lze předchozí rovnici (4.127) zapsat jako

$$Q_\mathrm{i}^\mathrm{GO} = \frac{\rho_\mathrm{i} v_\mathrm{th,i} k \sigma_\mathrm{e} L \left(1 - \alpha\right) \alpha}{2\pi c \mathfrak{Y}_\mathrm{i} R_*^2} \left(\frac{\rho_\mathrm{e} / \left(W m_\mathrm{e}\right)}{10^{11} \mathrm{cm}^{-3}} \right)^\delta \left(\frac{\mathfrak{Y}_\mathrm{i} v_{r\mathrm{i}}}{\sigma_\mathrm{e} \rho_\mathrm{i} v_\mathrm{th} r} \right)^\alpha G(\sigma,\mu_*), \tag{4.128}$$

ve kterém je funkce $G(\sigma,\mu_*)$ dána trojnásobnou integrací

$$G(\sigma,\mu_*) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, y^{\alpha-1} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\varphi(x) \exp\left(-\frac{y\Phi(x)}{1 + \sigma\mu^2} \right) \tag{4.129}$$

a kde v integrálech pro výpočet β_c a β (3.34) je Sobolevova optická hloubka dána vztahem

$$\tau_\mu = \frac{y}{1 + \sigma\mu^2} \tag{4.130}$$

namísto (4.123). Ze vzorce je patrné, že na rozdíl od vzorce pro zářivou sílu v Sobolevově aproximaci (3.56) vzorec pro Gayleyho-Owockého ohřev závisí na zvoleném absorpčním profilu. Pro následující výpočty byl zvolen Gaussovský profil odpovídající Maxwellovskému rozdělení rychlostí. Pokud bychom při odvozování nepředpokládali, že profil spektrální čáry v soustavě spojené s atomem je δ-funkce, pak by se ve vzorci (4.129) objevila namísto součinu $x\varphi(x)$ konvoluce profilu čáry se součinem Maxwellovského rozdělení rychlostí a rychlosti částice.

Ze vzorce (4.124) pro GO ohřev za předpokladu platnosti Sobolevovy aproximace vyplývá, že záření přicházející od hvězdy vede k ohřevu větru, protože přichází ve směru pohybu větru. Naopak, záření přicházející z opačného směru, které vzniklo rozptylem, přispívá k ochlazování větru, protože přichází ze směru proti pohybu větru (viz. obr. 4.12). Jiný pohled na tento jev nabízí obrázek 4.13. Při urychlování čára svým modrým křídlem absorbuje záření hvězdy, dochází k ohřevu. Naopak, rozptýlené záření je posunuto do červené oblasti spektra, dochází k ochlazování.

4.6 Odlišné teploty jednotlivých složek a Gayleyho-Owockého ohřev

Přestože trojsložkové neizotermické modely, popisované v předchozí kapitole, již poměrně podrobně popisují jevy spojené s přenosem hybnosti mezi složkami hvězdného větru, stále ještě existují jevy, které se uvedeným postupem popsat nedají. Mezi ně například patří možnost, že jednotlivé složky hvězdného větru mohou mít odlišné teploty. Při popisu zářivého ohřevu a ochlazování jsme navíc zanedbali jev GO ohřevu, který může (především v případě větrů s nízkou hustotou) též podstatně ovlivnit tepelnou rovnováhu větru. Proto, abychom popis jevů vyskytujících se ve vícesložkových hvězdných větrech uspokojivě uzavřeli, musíme se možnosti odlišení teplot složek a GO ohřevu věnovat podrobněji (Krtička a Kubát 2001b).

Podobně jako v předcházející kapitole budeme uvažovat vítr složený ze tří složek, vodíkových iontů, absorbujících iontů a elektronů. Tyto složky budeme popisovat pomocí jejich hustot, rychlostí a teplot, které se budou moci odlišovat. Abychom navíc započetli závislost ionizace jednotlivých iontů na teplotě, budeme náboj iontů počítat pomocí rovnic, popisujících ionizační rovnováhu. Stále se však budeme omezovat pouze na stacionární, sféricky symetrický hvězdný vítr.

4.6.1 Rovnice

Rovnice kontinuity

Každá ze složek je popsána rovnicí kontinuity (1.48a) ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_a v_{r\,a}\right) = 0, \quad \text{kde } a, b = \mathrm{i}, \mathrm{p}. \tag{4.131a}$$

Protože předpokládáme, že stupeň ionizace se může měnit s poloměrem, proto rovnice kontinuity v uvedeném tvaru pro elektrony neplatí. Musíme ji nahradit pomocí zákona zachování náboje rovnicí kontinuity náboje

$$\sum_a \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 q_a \frac{\rho_a}{m_a} v_{r\,a}\right) = 0.$$

Využijeme-li nyní pro všechny složky kromě elektronů rovnice kontinuity (4.131a), získáváme rovnici kontinuity náboje, připomínající rovnici kontinuity elektronů,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\rho_\mathrm{e} v_{r\,\mathrm{e}}\right) = \sum_{a\neq\mathrm{e}} \frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\rho_a v_{r\,a}\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}. \tag{4.131b}$$

Ačkoliv tato oprava rovnice kontinuity elektronů není nijak podstatná pro výsledný model, numerické testy ukazují, že je důležitá pro dobrou konvergenci modelu.

Pohybové rovnice

V pohybových rovnicích (1.48b) již nebudeme zanedbávat člen obsahující derivaci rychlosti elektronů v jejich pohybové rovnici, pro všechny složky tedy využijeme pohybovou rovnici ve tvaru

$$v_{ra}\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} = g_a^{\mathrm{rad}} - g - \frac{1}{\rho_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(a_a^2\rho_a\right) + \frac{q_a}{m_a}E + \frac{1}{\rho_a}\sum_{b\neq a} K_{ab}G(x_{ab})\frac{v_{rb}-v_{ra}}{|v_{rb}-v_{ra}|}, \quad \text{kde } a,b=\mathrm{i},\mathrm{p},\mathrm{e}. \tag{4.132}$$

V těchto rovnicích v_{ra} a ρ_a značí radiální rychlost a hustotu jednotlivých složek, izotermická rychlost zvuku je dána výrazem $a_a^2 = kT_a/m_a$, g je gravitační síla, zářivá síla g_a^{rad} působí pouze na absorbující ionty a elektrony a E je polarizační elektrické pole.

Pro zářivou sílu působící na absorbující ionty použijeme stejný výraz jako ve dvojsložkovém případě, viz. (4.38). Musíme si pouze uvědomit, že příslušná tepelná rychlost závisí na teplotě iontů vztahem $v_{\mathrm{th}} = \sqrt{2kT_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{p}}}$. Zářivá síla působící na elektrony je dána vztahem (4.85).

Konstanta tření je dána vzorcem (1.47a)

$$K_{ab} = N_aN_b\frac{4\pi\ln\Lambda q_a^2q_b^2}{kT_{ab}}, \tag{4.133}$$

ve kterém jsou veličiny u_{ab}, α_{ab} a střední teplota T_{ab} dány vztahy (1.42a, 1.42b, 1.47b)

$$u_{ab} = v_{rb} - v_{ra}, \tag{4.134a}$$

$$\alpha_{ab}^2 = \frac{2k\left(m_aT_b + m_bT_a\right)}{m_am_b}, \tag{4.134b}$$

$$T_{ab} = \frac{m_aT_b + m_bT_a}{m_a+m_b}. \tag{4.134c}$$

Energiové rovnice

Energiová rovnice pro jednotlivé složky větru má tvar (1.48c)

$$\frac{3}{2}kv_{ra}\frac{\rho_a}{m_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r} + a_a^2\rho_a\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2v_{ra}\right) = Q_a^{\mathrm{rad}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{b\neq a}K_{ab}\frac{2k\left(T_b-T_a\right)}{m_a+m_b}\frac{\exp\left(-x_{ab}^2\right)}{\alpha_{ab}} + \\ + \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}K_{ab}G(x_{ab})|v_{rb}-v_{ra}|, \quad \text{kde } a,b=\mathrm{i},\mathrm{p},\mathrm{e}. \tag{4.135}$$

Oproti minulému případu se nově objevil druhý člen na pravé straně, který popisuje přenos energie mezi jednotlivými složkami větru.

Obecně existují dva zdroje zářivého ochlazování a oteplování. První zdroj, se kterým jsme se již setkali v předchozích modelech neizotermického větru, je způsoben volně-volnými a vázaně-volnými přechody. Tento člen je popsán vztahy (4.25,4.26). Jelikož záření ukládá (nebo odčerpává) energii elektronů, je nutné tento člen zahrnout pouze do rovnice pro teplotu elektronů (do energiové rovnice elektronů). Navíc teplota, která v tomto vzorci vystupuje, je elektronová teplota. Ostatní podrobnosti výpočtu členu $Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}}$ jsou stejné, jako v předcházejících modelech.

Druhým ze zdrojů zářivého ochlazování a ohřevu je GO ohřev (ochlazování). Jelikož se tento člen objevuje díky závislosti síly záření na rychlosti absorbujících iontů (prostřednictvím Dopplerova jevu), je nutné tento člen započíst v energiové rovnici absorbujících iontů. Gayleyho-Owockého ohřev je dán vzorcem (4.128)

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} \equiv Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{GO}} = \rho_{\mathrm{i}}q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} = \frac{\rho_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{th,i}}k\sigma_{\mathrm{e}}L\left(1-\alpha\right)\alpha}{2\pi c\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}R_*^2}\left(\frac{\rho_{\mathrm{e}}/\left(Wm_{\mathrm{e}}\right)}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{\delta}\left(\frac{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}v_r}{\sigma_{\mathrm{e}}\rho_{\mathrm{i}}v_{\mathrm{th}}r}\right)^{\alpha}G(\sigma,\mu_c), \tag{4.136}$$

kde $v_{\mathrm{th,i}}$ je tepelná rychlost iontů urychlovaných zářením, tedy $v_{\mathrm{th,i}} = \sqrt{2kT_{\mathrm{i}}/m_{\mathrm{i}}}$ a funkce $G(\sigma,\mu_c)$ je definována vztahem (4.129)

$$G(\sigma,\mu_c) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, y^{\alpha-1} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\varphi(x) \exp\left(-\frac{y\Phi(x)}{1+\sigma\mu^2}\right). \tag{4.137}$$

Pro přehlednost byl též zaveden ohřev na jednotku hmotnosti $q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}$. Z těchto vztahů je patrné, že vítr je prostřednictvím Dopplerova jevu ohříván přímým zářením hvězdy, zatímco rozptýlené záření vede ve spojení s Dopplerovým jevem k ochlazování hvězdy. Znaménko GO ohřevu závisí na znaménku proměnné σ (3.42). Pokud je expanze větru lokálně izotropní, $\sigma = 0$ a GO ohřev a ochlazování se vzájemně vyruší. Pokud je proměnná σ kladná, pak převažuje ochlazování nad ohřevem a vítr je prostřednictvím Dopplerova jevu ochlazován. Naopak, pokud je proměnná σ záporná, pak převažuje ohřev nad ochlazováním a vítr je Dopplerovým jevem oteplován.

Elektrické polarizační pole

Při výpočtu elektrického polarizačního pole vyjdeme přímo z třetí Maxwellovy rovnice, která má za předpokladu sférické symetrie tvar

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 E\right) = 4\pi\varrho = 4\pi \sum_a \frac{q_a \rho_a}{m_a}. \tag{4.138}$$

Výpočet náboje iontů

Obecně lze ionizační strukturu hvězdných větrů získat pomocí časově náročných NLTE výpočtů (Pauldrach a kol. 1994). Protože v našem případě potřebujeme získat pouze střední náboj jednotlivých složek větru, použili jsme jednodušší postup. Jak bylo popsáno Mihalasem (1978, rov. 5.46), ionizační rovnováha hvězdných větrů může být přibližně popsána pomocí vztahu

$$\frac{N_{a,j}}{N_{a,j+1}} \approx \frac{1}{2}\frac{N_{\mathrm{e}}}{W}\frac{U_{a,j}}{U_{a,j+1}} \left(\frac{h^2}{2\pi m k T_{\mathrm{R}}}\right)^{3/2} \left(\frac{T_{\mathrm{R}}}{T_{\mathrm{e}}}\right)^{1/2} \exp\left(\frac{\chi_{a,j}}{kT_{\mathrm{R}}}\right), \tag{4.139}$$

kde $\chi_{a,j}$ je ionizační potenciál, $U_{a,j}$ je partiční funkce a T_{R} je teplota záření, kterou lze aproximovat vztahem $T_{\mathrm{R}} = \frac{3}{4}T_{\mathrm{eff}}$. Pro výpočet partičních funkcí byly použity aproximativní vztahy (Traving, Baschek a Holweger 1966, Smith a Dworetsky 1988). Elektrický náboj jednotlivých iontů pak může být vypočítán jako

$$z_a = \frac{\sum_j j N_{a,j}}{\sum_j N_{a,j}} = \frac{1}{N_a}\sum_j j N_{a,j}. \tag{4.140}$$

Je samozřejmé, že elektrický náboj elektronů je konstantní, $z_{\mathrm{e}} = -1$.

4.6.2 Singulární body

Při výpočtu singulárních bodů tohoto modelu větru znovu vyjdeme z hydrodynamických rovnic (1.48), které přepíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_a}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \rho_a v_a\right) = 0, \tag{4.141a}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_a \frac{\partial}{\partial r}\right) v_a + \frac{1}{\rho_a}\frac{\partial}{\partial r}\left(a_a^2 \rho_a\right) - g_a^{\mathrm{rad}} = -g\frac{q_a}{m_a}E + \frac{1}{\rho_a}\sum_{b\neq a} K_{ab} G(x_{ab}) \frac{v_b - v_a}{|v_b - v_a|}, \tag{4.141b}$$

$$\frac{3}{2}\rho_a\left(\frac{\partial}{\partial t}+v_a\frac{\partial}{\partial r}\right)a_a^2+a_a^2\rho_a\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2v_a\right)=Q_a^{\mathrm{rad}}+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{b\neq a}K_{ab}\frac{2k\left(T_b-T_a\right)}{m_a+m_b}\frac{\exp\left(-x_{ab}^2\right)}{\alpha_{ab}}+$$
$$+\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}K_{ab}G(x_{ab})|v_b-v_a|, \tag{4.141c}$$

ve kterém jsme opustili index u radiální rychlosti. Obdobně jako v případě jednosložkového větru převedeme tento systém rovnic do kvazilineárního tvaru zderivováním podle poloměru,

$$\frac{\partial\rho_{ra}}{\partial t}+v_a\frac{\partial\rho_{ra}}{\partial r}+\rho_a\frac{\partial v_{ra}}{\partial r}=F_{1a}(r,\rho_a,v_a,\rho_{ra},v_{ra}), \tag{4.142a}$$
$$\frac{\partial v_{ra}}{\partial t}+v_a\frac{\partial v_{ra}}{\partial r}+\frac{a_a^2}{\rho_a}\frac{\partial\rho_{ra}}{\partial r}+\frac{a_a^2}{T_a}\frac{\partial T_{ra}}{\partial r}-\frac{\partial g_a^{\mathrm{rad}}}{\partial v_{ra}}\frac{\partial v_{ra}}{\partial r}=F_{2a}(r,\rho_b,v_b,T_b,\rho_{rb},v_{rb},T_{rb}), \tag{4.142b}$$
$$\frac{3}{2}\frac{a_a^2}{T_a}\frac{\partial T_{ra}}{\partial t}+\frac{3}{2}v_a\frac{a_a^2}{T_a}\frac{\partial T_{ra}}{\partial r}+a_a^2\frac{\partial v_{ra}}{\partial r}-\frac{\partial q_a^{\mathrm{rad}}}{\partial v_{ra}}\frac{\partial v_{ra}}{\partial r}=F_{3a}(r,\rho_b,v_b,T_b,\rho_{rb},v_{rb},T_{rb}). \tag{4.142c}$$

V rovnicích opět index r označuje derivaci podle poloměru. Tuto soustavu devíti rovnic je navíc nutné uzavřít vztahy pro derivace jednotlivých proměnných,

$$\frac{\partial\rho_a}{\partial r}\equiv F_{4a}(\rho_{ra})=\rho_{ra}, \tag{4.142d}$$
$$\frac{\partial v_a}{\partial r}\equiv F_{5a}(v_{ra})=v_{ra}, \tag{4.142e}$$
$$\frac{\partial T_a}{\partial r}\equiv F_{6a}(T_{ra})=T_{ra}. \tag{4.142f}$$

S využitím vektoru proměnných

$$\boldsymbol{u}=\left(\rho_{r\mathrm{i}},v_{r\mathrm{i}},T_{r\mathrm{i}},\rho_{r\mathrm{p}},v_{r\mathrm{p}},T_{r\mathrm{p}},\rho_{r\mathrm{e}},v_{r\mathrm{e}},T_{r\mathrm{e}},\rho_{\mathrm{i}},v_{\mathrm{i}},T_{\mathrm{i}},\rho_{\mathrm{p}},v_{\mathrm{p}},T_{\mathrm{p}},\rho_{\mathrm{e}},v_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}}\right)^{\mathrm{T}} \tag{4.143}$$

je možné uvedenou soustavu diferenciálních rovnic (4.142) zapsat v maticovém tvaru

$$\mathsf{A}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial r}+\mathsf{B}\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t}=\boldsymbol{F}, \tag{4.144}$$

ve kterém jednotlivé matice A, B a vektor $\boldsymbol{F}$ jsou dány vztahy

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}\mathsf{A}_{\mathrm{i}}&0&0&0&0&0\\0&\mathsf{A}_{\mathrm{p}}&0&0&0&0\\0&0&\mathsf{A}_{\mathrm{e}}&0&0&0\\0&0&0&\mathsf{I}&0&0\\0&0&0&0&\mathsf{I}&0\\0&0&0&0&0&\mathsf{I}\end{pmatrix},\qquad \mathsf{B}=\begin{pmatrix}\mathsf{B}_{\mathrm{i}}&0&0&0&0&0\\0&\mathsf{B}_{\mathrm{p}}&0&0&0&0\\0&0&\mathsf{B}_{\mathrm{e}}&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_{\mathrm{i}}\\\boldsymbol{F}_{\mathrm{p}}\\\boldsymbol{F}_{\mathrm{e}}\\\boldsymbol{F}'_{\mathrm{i}}\\\boldsymbol{F}'_{\mathrm{p}}\\\boldsymbol{F}'_{\mathrm{e}}\end{pmatrix}. \tag{4.145}$$

Přitom I a 0 značí jednotkovou matici 3×3, respektive matici se všemi členy nulovými. Jednotlivé submatice a subvektory jsou dány vztahy

$$\mathsf{A}_a=\begin{pmatrix}v_a&\rho_a&0\\\dfrac{a_a^2}{\rho_a}&v_a-\dfrac{\partial g_a^{\mathrm{rad}}}{\partial v_{ra}}&\frac{a_a^2}{T_a}\\0&a_a^2-\dfrac{\partial q_a^{\mathrm{rad}}}{\partial v_{ra}}&\dfrac{3}{2}v_a\dfrac{a_a^2}{T_a}\end{pmatrix},\quad \mathsf{B}_a=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{3}{2}\frac{a_a^2}{T_a}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}_a=\begin{pmatrix}F_{1a}\\F_{2a}\\F_{3a}\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{F}'_a=\begin{pmatrix}F_{4a}\\F_{5a}\\F_{6a}\end{pmatrix}. \tag{4.146}$$

Charakteristická rovnice

$$\|\mathsf{A}-\tau\mathsf{B}\| = 0, \tag{4.147}$$

ve které bylo použito označení $\tau = dr/dt$, se díky výhodnému tvaru matic A a B rozpadá na charakteristické rovnice příslušející jednotlivým složkám větru,

$$\|\mathsf{A}_a-\tau\mathsf{B}_a\| = 0. \tag{4.148}$$

Pro neabsorbující ionty a pro elektrony tak získáváme vždy tři sady charakteristik,

$$\tau = v_a \pm \sqrt{\frac{5}{3}}a_a, \tag{4.149a}$$

$$\tau = v_a. \tag{4.149b}$$

Obdobné rovnice byly získány pro případ neabsorbující složky dvojsložkového izotermického větru v kap. 4.3.2. Ve zmiňovaném případě rovnice odpovídaly izotermickým zvukovým vlnám. Protože však při popisu vln v této kapitole byla uvažována též energiová rovnice, odpovídají první dvě charakteristiky adiabatickým zvukovým vlnám v prostředí jednotlivých složek větru a proto se také rovnicích objevuje člen $\sqrt{5/3}$. Rovnice pro první dva singulární body rozpínajících se větrů mají tedy tvar

$$v_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{5}{3}}a_\mathrm{p}, \tag{4.150a}$$

$$v_\mathrm{e} = \sqrt{\frac{5}{3}}a_\mathrm{e}. \tag{4.150b}$$

Rovnice charakteristik pro absorbující ionty jsou poněkud složitější,

$$\tau = v_\mathrm{i} - \frac{1}{2}g^\mathrm{rad}_{v_{r\,\mathrm{i}}} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}g^\mathrm{rad}_{v_{r\,\mathrm{i}}}\right)^2 + \frac{5}{3}a_\mathrm{i}^2 - \frac{2}{3}q_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}, \tag{4.151a}$$

$$\tau = v_\mathrm{i}. \tag{4.151b}$$

První dvě charakteristiky odpovídají zobecněným Abbottovým vlnám (srov. 4.45b). Vidíme, že Dopplerovský ohřev vnáší do rovnic charakteristik nový člen. Rovnice pro třetí singulární bod, příslušející absorbujícím iontům, má tvar

$$v_\mathrm{i}^2 - v_\mathrm{i}g^\mathrm{rad}_{v_{r\,\mathrm{i}}} - \frac{5}{3}a_\mathrm{i}^2 + \frac{2}{3}q_\mathrm{i}^\mathrm{rad} = 0. \tag{4.152}$$

Tato rovnice, podobně jako v předcházejících případech, není ve hvězdném větru splněna a proto pro stanovení rychlosti ztráty hmoty musí být nalezena jiná podmínka.

4.6.3 Podmínky regularity

Rozepíšeme rovnice popisující model tak, abychom na jedné straně rovnic získali členy závisející na derivacích jednotlivých proměnných. Ostatní členy budou zahrnuty ve funkcích F_{ia}. Takto upravená rovnice kontinuity (4.131a,4.131b) má tvar

$$\rho_a\frac{\mathrm{d}v_{r\,a}}{\mathrm{d}r} + v_{r\,a}\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}r} = F_{1a}(r,\rho_a,v_{r\,a}). \tag{4.153a}$$

V rovnici kontinuity elektronů (4.131b) jsme zanedbali derivace nábojů iontů, protože jejich příspěvek k rovnici kontinuity je zanedbatelný. Navíc by případné zahrnutí tohoto příspěvku ovlivnilo pouze rovnice pro elektrony, které však ve výsledných modelech použity nebudou. Podobným způsobem lze přepsat momentové rovnice (4.132), které vynásobíme hustotami jednotlivých složek. V rovnici absorbujících iontů linearizujeme člen popisující zářivou sílu. Získáme vyjádření

$$\rho_a v_{ra}\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} - \rho_a\frac{\partial g_a^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{ra}/\mathrm{d}r\right)}\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} + a_a^2\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}r} + \rho_a\frac{a_a^2}{T_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r} = F_{2a}(r,E,\rho_b,v_{rb},T_b,z_b). \tag{4.153b}$$

Podobně, díky závislosti Dopplerovského ohřevu na gradientu rychlosti, rozepíšeme energiové rovnice (4.135)

$$\frac{3}{2}v_{ra}\rho_a\frac{a_a^2}{T_a}\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r} + a_a^2\rho_a\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} - \rho_a\frac{\partial q_a^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{ra}/\mathrm{d}r\right)}\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} = F_{3a}(r,\rho_b,v_{rb},T_b,z_b). \tag{4.153c}$$

Systém rovnic (4.153) může být zjednodušen dosazením derivací hustoty z rovnice (4.153a) a derivací teploty z rovnice (4.153c) do pohybové rovnice (4.153b). Tímto způsobem je možné získat linearizovanou pohybovou rovnici

$$\left[v_{ra} - \frac{\partial g_a^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{ra}/\mathrm{d}r\right)} - \frac{5}{3}\frac{a_a^2}{v_{ra}} + \frac{2}{3v_{ra}}\frac{\partial q_a^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{ra}/\mathrm{d}r\right)}\right]\frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r} = F_a(r,E,\rho_b,v_{rb},T_b,z_b), \tag{4.154}$$

ve které odpovídá F_a kombinaci F_{ia} z rovnic (4.153). Systém rovnic se skládá ze tří nezávislých podmínek pro kritické body, z nichž každá bude diskutována zvlášť.

Kritický bod neabsorbujících iontů

Pro případ neabsorbujících iontů má kritická podmínka (4.154) jednoduchý tvar (4.150a)

$$v_{r\mathrm{p}}^2 = \frac{5}{3}a_{\mathrm{p}}^2. \tag{4.155}$$

Aby získané řešení hladce procházelo kritickým bodem, musí být veličina $F_a(r,E,\rho_b,v_{rb},T_b,z_b)$ v tomto bodě nulová (podmínka regularity). Tato podmínka je splněna pokud platí

$$\begin{aligned}\frac{10a_{\mathrm{p}}^2}{3r} - g + \frac{q_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}}E + \frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}\sum_{b\neq\mathrm{p}}K_{\mathrm{p}b}G(x_{\mathrm{p}b})\frac{v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}}{|v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}|} - {}&\\ -\frac{2}{3}\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{b\neq\mathrm{p}}K_{\mathrm{p}b}\frac{2k\left(T_b-T_{\mathrm{p}}\right)}{m_{\mathrm{p}}+m_b}\frac{\exp\left(-x_{\mathrm{p}b}^2\right)}{\alpha_{\mathrm{p}b}} - {}&\\ -\frac{2}{3}\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}}\sum_{b\neq\mathrm{p}}\frac{m_b}{m_{\mathrm{p}}+m_b}K_{\mathrm{p}b}G(x_{\mathrm{p}b})|v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}| = 0.&\end{aligned} \tag{4.156}$$

Tato podmínka odpovídá podmínce (4.105) odvozené pro případ trojsložkového větru se shodnými teplotami jednotlivých složek.

Kritický bod absorbujících iontů

Kritická podmínka (4.154) absorbujících iontů má tvar (4.151a)

$$v_{r\mathrm{i}} - \frac{\partial g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)} - \frac{5}{3}\frac{a_{\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}} + \frac{2}{3v_{r\mathrm{i}}}\frac{\partial q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)} = 0. \tag{4.157}$$

Jak již bylo řečeno, tato podmínka není nikde ve větru splněna. Aby bylo možné získat řešení CAK typu pro hvězdný vítr, je nutné nalézt odlišnou podmínku.

Sečteme-li nyní jednotlivé pohybové rovnice (4.153b), ve kterých derivace hustoty a teploty vyjádříme pomocí rovnic kontinuity (4.153a) a energiových rovnic (4.153c), získáme rovnici

$$\sum_a \rho_a \frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r}\left[v_{ra} - \frac{5}{3}\frac{a_a^2}{v_{ra}}\right] + \rho_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{2}{3v_{r\mathrm{i}}}\frac{\partial q_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)} - \frac{\partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\right] = \sum_a F_a(r,E,\rho_b,v_{rb},T_b,z_b). \tag{4.158}$$

Tato společná momentová rovnice nezávisí na derivacích žádných proměnných, pokud platí

$$\sum_a \rho_a \frac{\mathrm{d}v_{ra}}{\mathrm{d}r}\left[v_{ra} - \frac{5}{3}\frac{a_a^2}{v_{ra}}\right] + \rho_\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{2}{3v_{r\mathrm{i}}}\frac{\partial q_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)} - \frac{\partial g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}}{\partial\left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\right] = 0. \tag{4.159}$$

Tato podmínka bude použita pro stanovení okrajové hustoty absorbujících iontů, a tedy pro určení rychlosti ztráty hmoty. Pokud bychom, podobně jako ve dvojsložkovém případě, studovali šíření vln v tomto modelu, pak bychom zřejmě zjistili, že tato podmínka určuje bod, ve kterém je rychlost vln rovna rychlosti příslušných trojsložkových Abbottových vln.

Kritický bod elektronů

Poslední z kritických podmínek, kritická podmínka pro elektrony, má znovu jednoduchý tvar (4.150b)

$$v_{r\mathrm{e}}^2 = \frac{5}{3}a_\mathrm{e}^2, \tag{4.160}$$

podobný kritické podmínce neabsorbující složky (4.155). Příslušná podmínka regularity také připomíná podmínku regularity neabsorbující složky (4.156),

$$\begin{aligned}\frac{10a_\mathrm{e}^2}{3r} + g_\mathrm{e}^\mathrm{rad} - g + \frac{q_\mathrm{e}}{m_\mathrm{e}}E + \frac{1}{\rho_\mathrm{e}}\sum_{b\neq\mathrm{e}} K_{\mathrm{e}b}G(x_{\mathrm{e}b})\frac{v_{rb}-v_{r\mathrm{e}}}{|v_{rb}-v_{r\mathrm{e}}|} - {}&\\ -\frac{2}{3}\frac{1}{\rho_\mathrm{e}v_{r\mathrm{e}}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{b\neq\mathrm{e}} K_{\mathrm{e}b}\frac{2k\left(T_b-T_\mathrm{e}\right)}{m_\mathrm{e}+m_b}\frac{\exp\left(-x_{\mathrm{e}b}^2\right)}{\alpha_{\mathrm{e}b}} - {}&\\ -\frac{2}{3}\frac{1}{\rho_\mathrm{e}v_{r\mathrm{e}}}\sum_{b\neq\mathrm{e}}\frac{m_b}{m_\mathrm{e}+m_b}K_{\mathrm{e}b}G(x_{\mathrm{e}b})|v_{rb}-v_{r\mathrm{e}}| - \frac{2}{3}\frac{1}{\rho_\mathrm{e}v_{r\mathrm{e}}}Q_\mathrm{e}^\mathrm{rad} = 0.&\end{aligned} \tag{4.161}$$

Numerické testy však ukázaly, že tato podmínka regularity je přibližně splněna v kritickém bodě elektronů pokud je použita rovnice nulovosti celkového proudu na okraji modelu. Proto podmínka regularity (4.161) nemusí být nutně zahrnuta do řešených rovnic.

4.6.4 Spodní okrajové podmínky

Okrajové podmínky pro teploty a náboje

Budeme předpokládat, že vítr je na povrchu hvězdy v zářivé rovnováze a že teploty jednotlivých složek na hranici jsou shodné. Za těchto předpokladů mají okrajové podmínky pro teploty následující tvar

$$T_a = T_\mathrm{e}, \quad a = \mathrm{i,p}, \tag{4.162a}$$

$$Q_\mathrm{e}^\mathrm{rad}(R_*) = 0. \tag{4.162b}$$

Okrajové podmínky pro náboje jednotlivých složek je pak možné získat přímo z podmínek ionizační rovnováhy (4.139).

Okrajové podmínky pro rychlosti

Podmínky (4.156,4.159) mohou být přímo použity pro výpočet okrajových hodnot příslušných veličin. Protože však zahrnutí dvou vnitřních podmínek může vést k numerickým problémům, byl použit, podobně jako v případě předchozích modelů větrů, jednodušší postup.

Okrajové podmínky hydrodynamických rovnic jsou přímo zadány v kritickém bodě neabsorbujícího plazmatu. Díky tomu má okrajová podmínka pro rychlost neabsorbujícího plazmatu jednoduchý tvar kritické podmínky (4.150a). Okrajovou podmínku pro rychlost absorbujících iontů je možné přímo odvodit z podmínky regularity (4.156). Tato podmínka má za předpokladu shodných teplot jednotlivých složek tvar

$$\frac{10a_{\mathrm{p}}^2}{3r} - g + \frac{q_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}}E + \frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}\sum_{b\neq\mathrm{p}} K_{\mathrm{p}b}G(x_{\mathrm{p}b})\frac{v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}}{|v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}|} - \\ - \frac{2}{3}\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}}\sum_{b\neq\mathrm{p}}\frac{m_b}{m_{\mathrm{p}}+m_b}K_{\mathrm{p}b}G(x_{\mathrm{p}b})|v_{rb}-v_{r\mathrm{p}}| = 0. \quad (4.163)$$

Proud elektronů by měl hladce procházet kritickým bodem elektronové složky (4.150b). Splnění tohoto požadavku zajišťuje platnost podmínky regularity (4.161) v kritickém bodě. Tuto podmínku je možné využít pro výpočet okrajové rychlosti elektronů. Podmínka regularity je však též přibližně splněna v případě, že na okraji větru netečou žádné elektrické proudy,

$$N_{\mathrm{e}}v_{r\mathrm{e}} = z_{\mathrm{p}}N_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}} + z_{\mathrm{i}}N_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}. \quad (4.164)$$

Tato jednodušší podmínka byla použita pro numerické výpočty.

Okrajové podmínky pro hustoty

Okrajová podmínka pro hustotu neabsorbující složky má stejný tvar jako v případě větru se shodnými teplotami složek (rovnice (4.107))

$$z_*\rho_{\mathrm{p}}(R_*) = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}}(R_*)\frac{v_{r\mathrm{i}}(R_*)}{v_{r\mathrm{p}}(R_*)}. \quad (4.165)$$

Ve vzorci byla pouze nově zavedena proměnná z_* jako relativní zastoupení kovů vzhledem ke Slunci.

Okrajová podmínka pro hustotu absorbujících iontů je zvolena tak, aby získané řešení bylo CAK-typu (podrobněji viz. kap. 4.1.4). Okrajová hustota elektronů je spočtena za předpokladu kvazineutrality

$$N_{\mathrm{e}} = \sum_{a\neq\mathrm{e}} z_a N_a, \quad (4.166)$$

s využitím vzorce pro ionizační rovnováhu (4.139).

Okrajová podmínka pro elektrické pole

Protože pro určení hodnoty elektrické intenzity na hranici není možné využít žádné kritické podmínky, byla použita podmínka kvazineutrality na povrchu hvězdy (4.138), podle které je okrajový gradient elektrického pole roven nule.

4.6.5 Numerické řešení rovnic

Podobně jako v předchozích případech byla pro výpočet trojsložkových neizotermického modelů větrů použita Newton-Raphsonova metoda, popsaná v kapitole 4.1. Vektor proměnných, který popisuje hledaný model, byl zvolen ve tvaru

$$\boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \ldots, \boldsymbol{\psi}_{\mathrm{NR}}), \tag{4.167}$$

kde vektor proměnných v daném bodě d sítě má tvar

$$\boldsymbol{\psi}_d = (\rho_{a,d}, v_{ra,d}, T_{a,d}, z_{a,d}, E_d, \Delta v_{r,d}), \quad a = \mathrm{e,i,p} \tag{4.168}$$

a rozdíl rychlostí

$$\Delta v_r = v_{r\mathrm{i}} - v_{r\mathrm{p}} \tag{4.169}$$

je možné přidat mezi hledané proměnné. Podrobný popis jednotlivých členů nelineárního operátoru P a příslušného Jacobiánu je uveden v dodatku B.3.

4.6.6 Spočtené modely

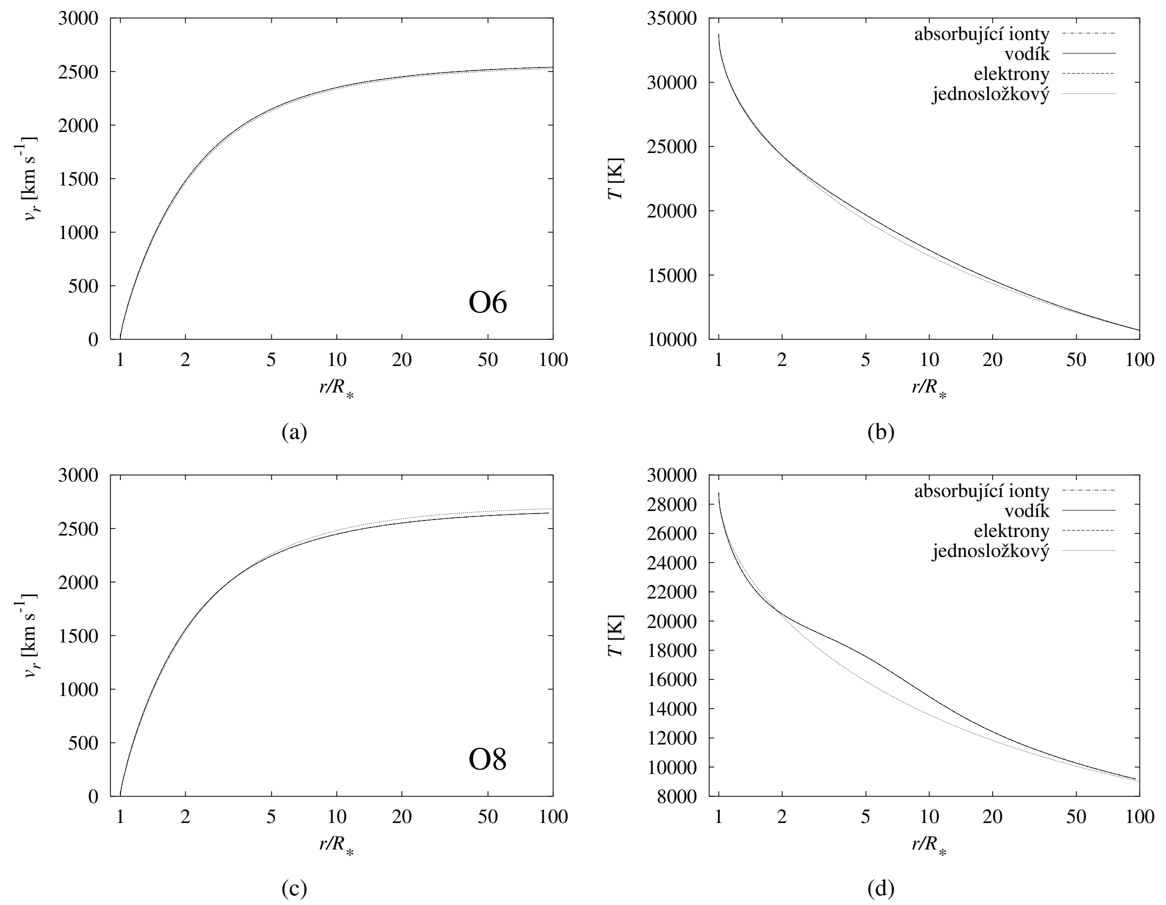
Parametry hvězd hlavní posloupnosti a jejich větrů, pro které byl spočten model trojsložkového větru s odlišnými teplotami jednotlivých složek, jsou uvedeny v tabulce 4.6. Podobně jako v předešlých případech jsou hmotnosti, poloměry a efektivní teploty hvězd hlavní posloupnosti převzaty z práce Harmance (1988), parametry k, α a δ spočetl Abbott (1982). Protože jsou tyto modely určeny pouze pro ukázku různých jevů, které se ve větrech vyskytují, byly další dva parametry zvoleny stejné pro všechny uvedené modely. Proto byl pro všechny modely jako průměrný absorbující iont zvolen atom uhlíku a chemické složení atmosfér hvězd z_* odpovídající slunečnímu.

Tabulka 4.6: Parametry neizotermických modelů hvězdných větrů

Hvězdný	Parametry hvězdy				Parametry větru			
typ	$\mathfrak{M}$	R_*	T_{eff}	z_*	k	α	δ	$\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{p}}$
(HP)	$[\mathfrak{M}_\odot]$	$[R_\odot]$	[K]					
O6	31,65	9,85	41 700	1,0	0,174	0,606	0,120	12,0
O8	21,66	7,51	35 600	1,0	0,166	0,607	0,120	12,0
B0	14,57	5,80	29 900	1,0	0,156	0,609	0,120	12,0
B1	11,03	4,91	26 200	1,0	0,278	0,570	0,100	12,0
B2	8,62	4,28	23 100	1,0	0,377	0,537	0,091	12,0
B3	6,07	3,56	19 100	1,0	0,477	0,506	0,089	12,0
B4	5,12	3,26	17 200	1,0	0,365	0,509	0,105	12,0
B5	4,36	3,01	15 500	1,0	0,235	0,511	0,12	12,0

Větry s Gayleyho-Owockého ohřevem

Jak již bylo ukázáno v předchozích kapitolách, větry s relativně vysokou hustotou mají malý rozdíl rychlostí jednotlivých složek ve srovnání s příslušnou tepelnou rychlostí. Proto je v těchto větrech jev ohřevu prostřednictvím tření zanedbatelný. Podobně je díky vysoké hustotě větru výměna tepla mezi jednotlivými složkami natolik efektivní, že je schopna vyrovnat teploty jednotlivých složek. Takovéto modely jsou ukázány na obrázcích 4.14 a 4.15 pro hvězdy spektrálních typů O6–B2.



Obrázek 4.14: Porovnání průběhu rychlostí a teplot jednosložkových a trojsložkových hvězdných větrů s relativně vysokou hustotou a mírným Gayleyho-Owockého ohřevem. Plná čára značí ionty vodíku, čerchovaná absorbující ionty, čárkovaná elektrony a tečkovaná jednosložkový model. Grafy rychlostí a teplot jednotlivých složek splývají. Je však patrné mírné GO ochlazování v blízkosti hvězdy a mírný GO ohřev ve vnějších oblastech.

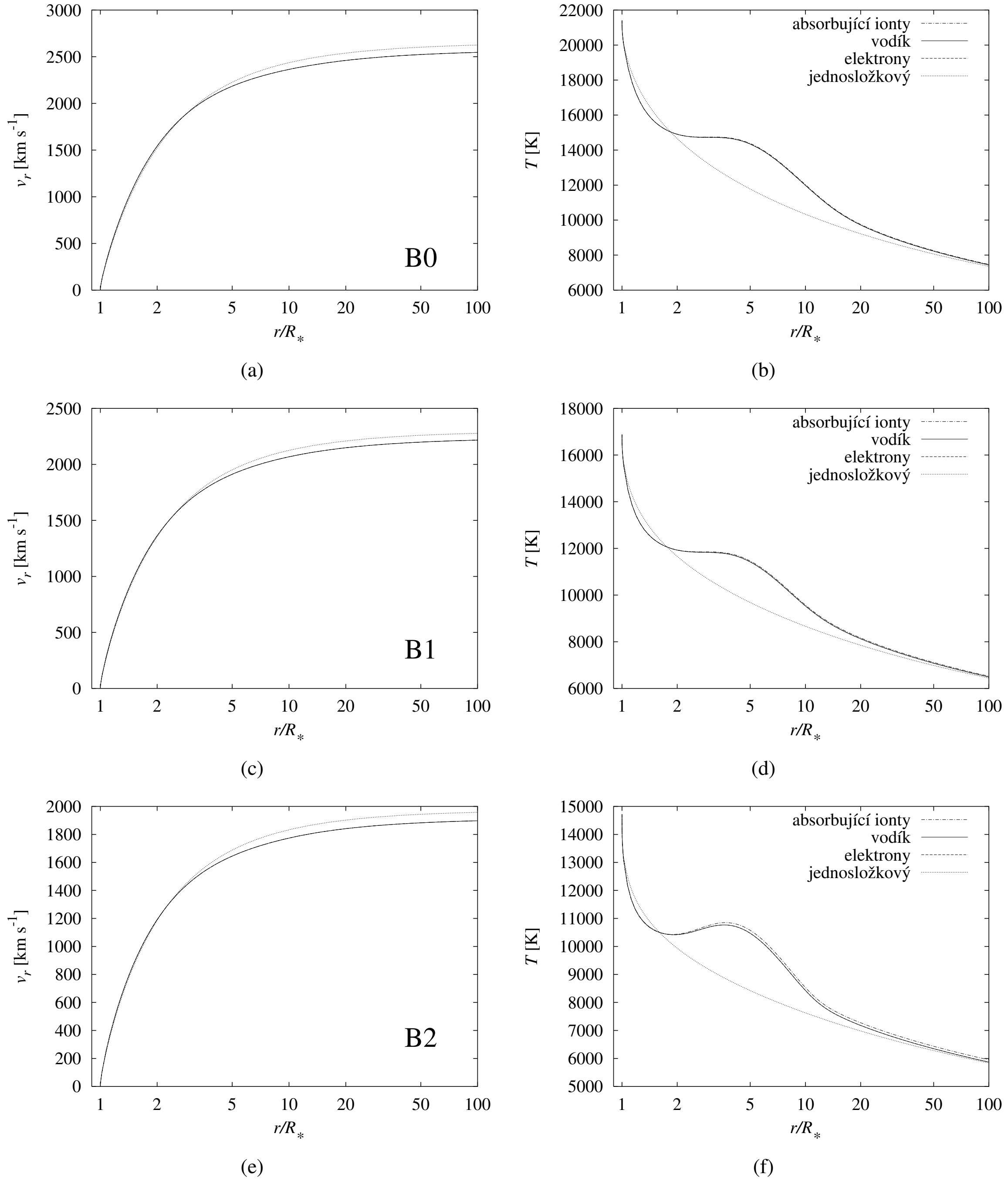
Počínaje spektrálním typem O6 je však již patrný nový jev, nezahrnutý v jednosložkových modelech, Gayleyho-Owockého ohřev. V blízkosti hvězdy je gradient rychlosti vysoký, proměnná σ (viz. (3.42)) je kladná a tedy vítr je mírně ochlazován GO ohřevem (ve srovnání s modely bez tohoto ohřevu). Naopak ve vnějších oblastech větru je gradient rychlosti nižší, proměnná σ je záporná a tedy v těchto oblastech je vítr GO ohřevem oteplen. Ve větších vzdálenostech od hvězdy je vliv GO ohřevu méně výrazný, především díky zmenšení úhlového rozměru hvězdy.

Jak již ukázali Gayley a Owocki (1994), pro hvězdy s nižší hustotou větru je GO ohřev výraznější. To je také patrné z modelů větrů hvězd spektrálního typu B0–B2 (viz. obr. 4.15). Jak již bylo uvedeno v předchozí kapitole 4.4.5, je pro tyto hvězdy ohřev třením v podstatě zanedbatelný a tedy jediným zdrojem zvýšené teploty vnějších částí větru je právě GO ohřev.

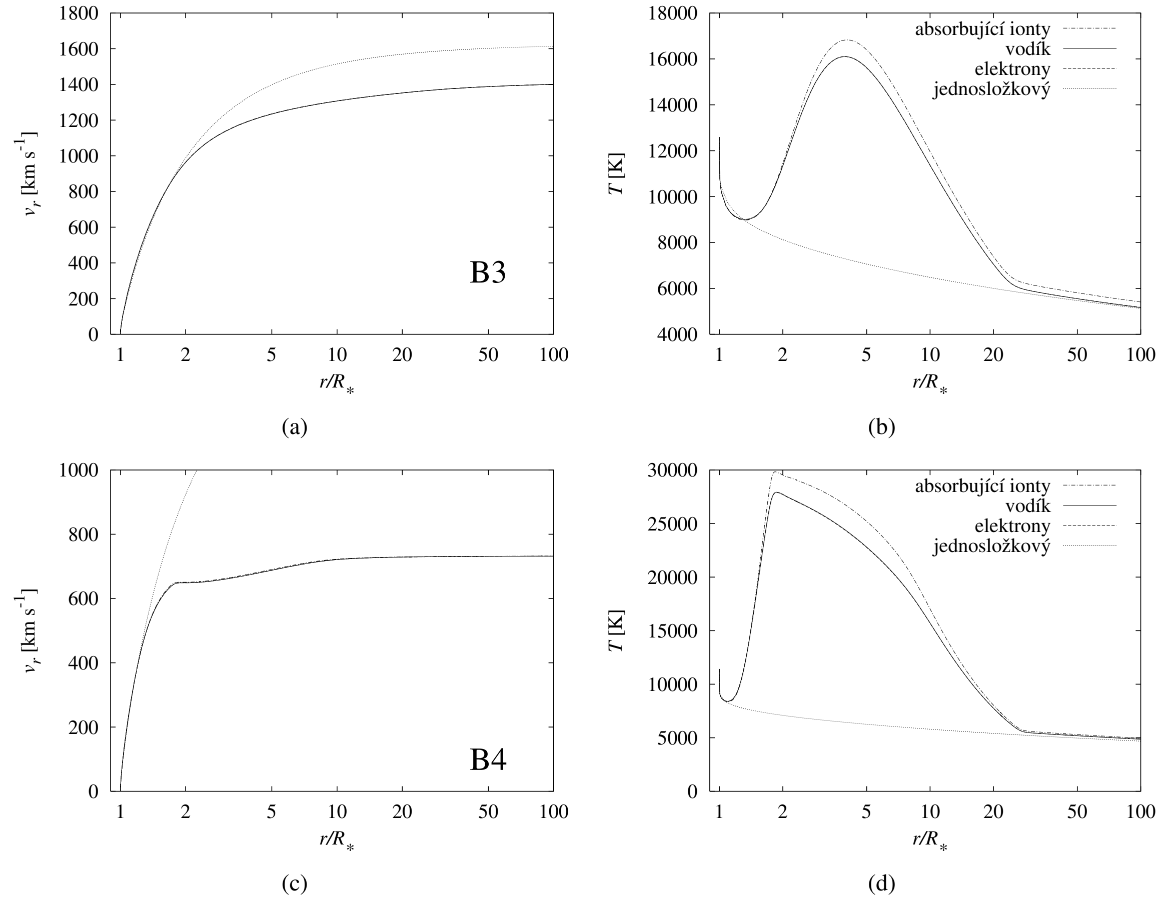
Odlišné teploty jednotlivých složek

V případě hvězd s nižší hustotou větru se již teploty jednotlivých složek podstatně liší, jak je patrné z obr. 4.16 pro modely větrů hvězd B3 a B4 hlavní posloupnosti.

V blízkosti hvězdy je vítr relativně hustý, výměna tepla mezi jednotlivými složkami větru je stále efektivní a tedy teplota složek je v podstatě shodná. Ve srovnání s modely bez Dopplerovského ohřevu dochází v této oblasti k mírnému ochlazení větru.



Obrázek 4.15: Porovnání průběhu rychlostí a teplot jednosložkových a trojsložkových hvězdných větrů s relativně vysokou hustotou a nápadným Gayleyho-Owockého ohřevem. Označení je stejné jako na obr. 4.14. Grafy rychlostí a teplot jednotlivých složek splývají, ale GO ochlazování a GO ohřev jsou podstatně vyšší než na obr. 4.14.

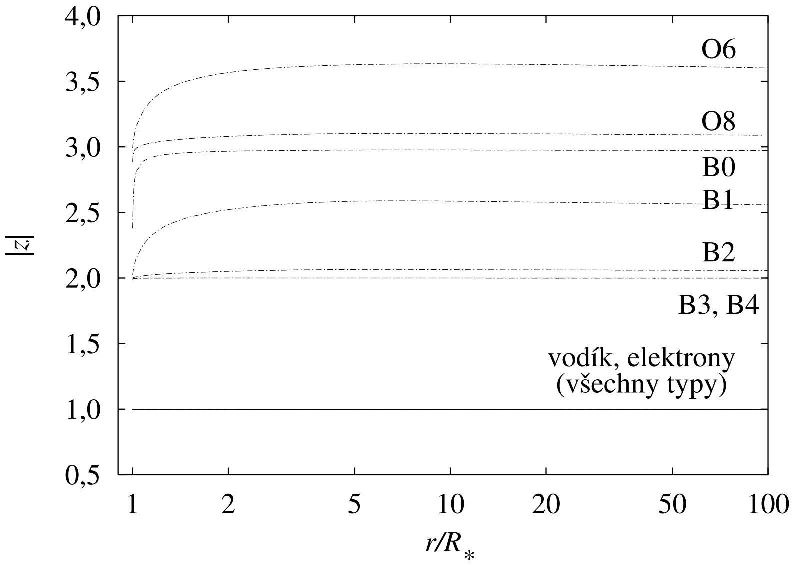


Obrázek 4.16: Porovnání průběhu rychlostí a teplot jednosložkových a trojsložkových hvězdných větrů s relativně nízkou hustotou. Označení je stejné jako na obr. 4.14. Vítr je ve vnějších oblastech ohříván jak třením, tak Gayleyho-Owockého ohřevem. Grafy rychlostí složek splývají, ale teplota absorbujících iontů je vyšší než teplota ostatních složek.

Ve vnějších oblastech větru již tyto závěry neplatí. Vítr má v této oblasti nižší hustotu a je tedy ohříván jak prostřednictvím tření, tak prostřednictvím GO ohřevu. Navíc díky nižší hustotě větru je výměna tepla mezi jednotlivými složkami méně efektivní a tedy teploty složek se mohou lišit. Teplota absorbujících iontů je nejvyšší, zatímco teploty neabsorbujících iontů a elektronů jsou téměř shodné.

V uvedených modelech se vyskytují tři způsoby, kterými je možné zvlášť ohřívat jednotlivé složky větru. Tyto tři mechanismy pak mohou vést k odlišení teplot mezi složkami. Zářivé ochlazování a ohřev (prostřednictvím volně-volných a vázaně-volných přechodů) ukládá (nebo vybírá) tepelnou energii elektronů. Díky tomuto jevu mají elektrony nejnižší teplotu ze všech složek v oblastech, kde jsou ohřev třením a GO ohřev podstatné. Druhý ze zmiňovaných jevů, GO ohřev, ochlazuje absorbující ionty pod bodem, kde $\sigma = 0$ a naopak je nad tímto bodem ohřívá. Poslední z jevů, který vede k selektivnímu ukládání tepla, je ohřev třením. Ze závislosti tepla vzniklého třením v energiové rovnici (4.135) je patrné, že teplo uložené do složky a způsobené třením se složkou b je úměrné $\rho_b / \left(m_a + m_b\right)$. Vidíme tedy, že tření ohřívá především složky s nízkou hustotou (absorbující ionty a elektrony) prostřednictvím srážek s vodíkovými ionty.

Pro možnost odlišení teplot jednotlivých složek větru je důležitá také tepelná výměna mezi složkami, popsaná druhým členem na pravé straně energiové rovnice (4.135). Výměna tepla je úměrná součinu hustot složek. Proto (podobně jako v případě rychlostí) odlišení teplot složek je možné jen ve



Obrázek 4.17: Střední náboj složek v jednotlivých modelech větru. Čerchovaná čára značí absorbující ionty, čáry popisující neabsorbující ionty a elektrony splývají.

větru s nízkou hustotou. Jak již bylo ukázáno, v takovém případě je teplota absorbujících iontů nejvyšší, zatímco teplota neabsorbujících iontů a elektronů je téměř shodná díky jejich vysoké koncentraci.

Jak již bylo zmíněno v kapitole 4.4.5, zvýšená teplota ve vnějších oblastech hvězdy způsobuje snížení zářivé síly a také snížení konečné rychlosti větru v_∞. Teplota v CAK bodě je přibližně stejná jako v jednosložkových modelech. Proto je rychlost ztráty hmoty v jednosložkových a v trojsložkových modelech stejná. Ani GO ohřev nemá žádný podstatný vliv na její hodnotu.

Průběh náboje složek v modelech větrů jednotlivých hvězd je ukázán na obr. 4.17. Protože ionizační rovnováha v našem přiblížení závisí především na teplotě záření, je náboj iontů v celém větru téměř neměnný. Zajímavý je však průběh velikosti náboje v závislosti na různých spektrálních typech. Pokles náboje mezi hvězdami B0 a B2 je jednou z příčin jevu tzv. bistability hvězdného větru (Pauldrach a Puls 1990).

Ačkoliv je polarizační elektrické pole určováno pomocí Maxwellovy rovnice (4.138), je v celém větru splněna podmínka kvazineutrality

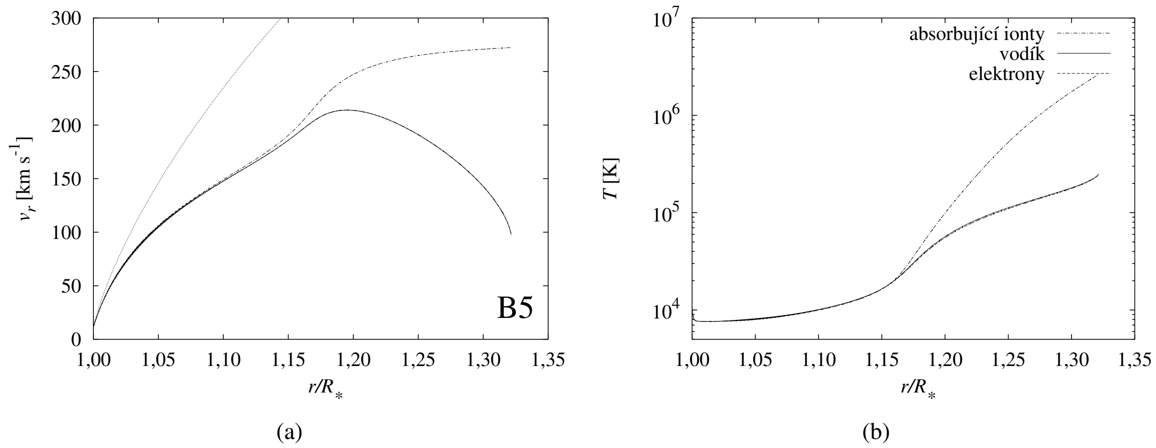
$$N_\mathrm{e} \approx N_\mathrm{p} + z_\mathrm{i} N_\mathrm{i}.$$

Aproximace ohřevu třením v jednosložkovém větru Člen odpovídající ohřevu třením v energiové rovnici jednosložkového větru může být aproximován bez užití vícesložkových modelů. V pohybové rovnici (4.132) absorbující složky jsou podstatné pouze členy popisující zářivou a třecí sílu (odpovídající srážkám mezi absorbujícími a neabsorbujícími ionty). Ostatní členy je možné pro získání přibližných vzorců pro ohřev třením zanedbat. Pro zářivé zrychlení působící na složku s pak platí (rovnice mají tentýž tvar také pro větší počet absorbujících složek)

$$g_s^\mathrm{rad} \approx \frac{1}{\rho_s} K_{s\mathrm{p}} G(x_{s\mathrm{p}}). \tag{4.170}$$

Člen popisující tření pak může být v energiové rovnici jednosložkového větru aproximován jako

$$Q^\text{tření} \approx \sum_{\substack{\text{absorbující}\\ \text{ionty}}} K_{s\mathrm{p}} G(x_{s\mathrm{p}}) |v_{r\mathrm{p}} - v_{r\,s}| \approx \sum_{\substack{\text{absorbující}\\ \text{ionty}}} \rho_s g_s^\mathrm{rad} \left(v_{r\,s} - v_{r\mathrm{p}}\right).$$



Obrázek 4.18: Oddělování se absorbující složky větru v modelu s nejnižší hustotou větru. Označení je stejné jako na obr. 4.14. Teploty a rychlosti neabsorbujících iontů a elektronů splývají. Teplota absorbujících iontů dosahuje hodnot, při kterých dochází k vyzařování rentgenovského záření.

Pro přibližné určení rozdílu rychlostí z pohybové rovnice(4.170) je možné použít přibližné vyjádření Chandrasekharovy funkce

$$G(x) \approx \frac{2}{3\sqrt{\pi}}x. \tag{4.171}$$

Spočtený jednosložkový model hvězdy spektrálního typu B3 s přibližným vyjádřením ohřevu prostřednictvím tření podle vzorce (4.6.6) sice vykazoval až o 10% vyšší teplotu (ve srovnání s přesným trojsložkovým modelem), ale rozdíly ve výsledné hodnotě konečné rychlosti v_∞ jsou nepodstatné. Je tedy zřejmé, že uvedené přiblížení je možné použít pro jednoduchý popis ohřevu třením ve hvězdných větrech. Navíc tato možnost umožnuje zahrnout více druhů absorbujících iontů.

Oddělování se absorbujících iontů

Podobně jako v případě větru se shodnými teplotami složek (viz. kap. 4.4.5) dochází v případě větru s nižšími hustotami k oddělování absorbujících iontů od ostatních složek větru. Absorbující ionty již nejsou schopny předávat hybnost neabsorbující složce a rozdíl rychlostí absorbující a neabsorbující složky roste. Protože však k tomuto jevu dochází v oblasti, kde je rychlost větru menší než rychlost úniková, nejsou schopny absorbující ionty vynést neabsorbující složku mimo dosah gravitačního pole hvězdy. Proto ve vnějších oblastech modelu klesá rychlost absorbující složky a pravděpodobně dochází k jejímu pádu zpět na hvězdu, nebo k vytváření obálek v okolí hvězdy. Odpovídající model je ukázán na obr. 4.18 pro případ hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu B5. Případný pád vodíku však již není možné studovat pomocí stacionárních modelů.

Vnější hranicí, do které lze tento druh modelu dopočítat, je místo, ve kterém rychlost neabsorbující složky je rovna rychlosti zvuku. Tento bod je singulárním bodem, ve kterém ovšem nejsou splněny příslušné podmínky regularity a tedy derivace rychlosti ve stacionárních modelech neomezeně klesá.

Díky relativně velké třecí síle mezi elektrony a neabsorbující složkou a díky elektrickému polarizačnímu poli je rychlost elektronů v celém modelu přibližně rovna rychlosti vodíku. Ke stejnému závěru jsme také dospěli v modelu větru se stejnou teplotou složek.

Podobně jako v případě větru se shodnou teplotou jednotlivých složek se zvýšená teplota větru projeví snížením rychlosti ztráty hmoty. Na rozdíl od předchozích modelů však dochází nejen k oddělení rychlostí jednotlivých složek, ale také k oddělení teploty absorbujících iontů (viz. obr. 4.18(b)). Absorbující složka je třením ohřívána až na teploty, při kterých vzniká rentgenovské záření.

Kapitola 5

Důsledky a ověření vícesložkových modelů

5.1 Možnost oddělení jednotlivých složek větru

Modely vícesložkového hvězdného větru urychlovaného zářením ukazují, že ve hvězdném větru k oddělování jeho jednotlivých složek ve většině případů nedochází. Bylo by ale jistě zajímavé obecně sledovat podmínky, za kterých může docházet k oddělení složek pro obecné tvary urychlující síly.

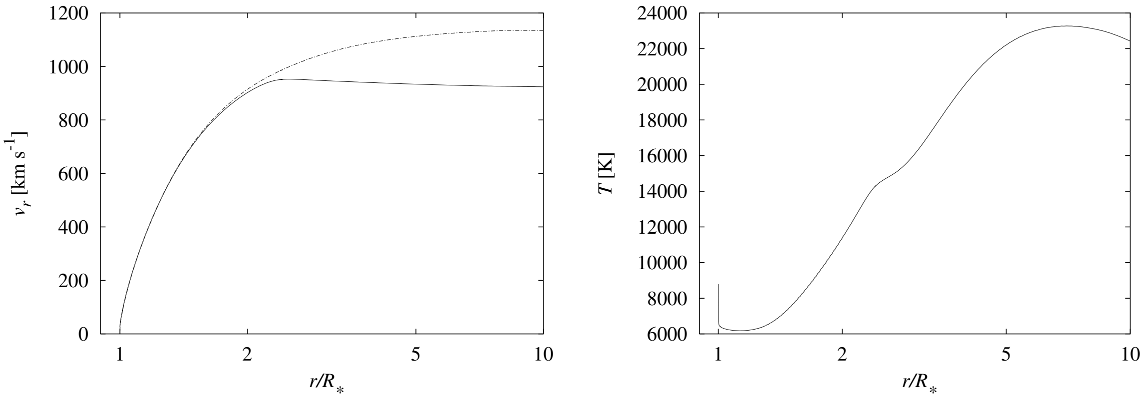
Pro jednoduchost budeme sledovat vítr složený pouze ze dvou odlišných složek. Jedna z nich bude *aktivní*, bude na ni působit urychlující síla, druhá z nich bude *pasivní*, urychlovaná pouze díky tření s předchozí složkou. Ve větru budeme měnit hustotu složek (například změnou okrajových podmínek). Jak již bylo ukázáno v předchozích kapitolách, pro relativně velké hustoty větru je třecí síla schopna předávat hybnost mezi jednotlivými složkami a díky tomu jsou složky schopny se pohybovat společně. Naopak, pro nízké hustoty tomu tak není. Protože je rychlost hvězdných větrů vždy řádově stejná, tak musí být zrychlení způsobované třením obdobné. Protože jsou však ve větru nižší hustoty složek, musí být rozdíl rychlostí větší. Pouze tak dochází k dostatečnému přenosu hybnosti mezi složkami.

Je však zřejmé, že tyto úvahy mají jedno zásadní omezení. Zrychlení způsobované třením nezávisí na rozdílu rychlostí lineárně, ale prostřednictvím tzv. Chandrasekharovy funkce. Tato funkce pro jistý rozdíl rychlostí dosahuje svého maxima a dále pak klesá. Proto když kdekoliv ve hvězdném větru dosáhne Chandrasekharova funkce svého maxima (jako funkce svého argumentu), aktivní složka již dále není schopna prostřednictvím tření předávat dostatek hybnosti pasivní složce a vícesložkové řešení se nutně musí začít podstatně odlišovat od řešení jednosložkového. V takovémto bodě pak může dojít k oddělení jednotlivých složek větru. Chování větru za tímto bodem bude obecně záviset jednak na hustotách obou složek a jednak na závislosti síly, urychlující aktivní složku, na jejich proměnných (Krtička a Kubát 2001a).

5.1.1 Převládající aktivní složka

Pokud složka přijímající hybnost (aktivní složka) má podstatně vyšší hustotu než složka pasivní, pak je oddělení obou složek teoreticky možné. To je patrné již z pohybových rovnic. V pohybové rovnici aktivního plazmatu je člen popisující třecí sílu zanedbatelný, protože hustota pasivní složky je podstatně menší než hustota aktivní složky. Pasivní složka nijak zásadně neovlivňuje aktivní složku, a tedy gradient rychlosti aktivní složky se v bodě oddělení podstatně nemění. Jinak tomu ovšem je v případě pasivní složky, neboť úbytek třecí síly v pohybové rovnici pasivní složky musí být vyvážen poklesem gradientu rychlosti této složky. Pokles gradientu rychlosti pak umožní oddělení obou složek. Pakliže je rychlost pasivní složky v tomto bodě větší než je rychlost úniková, pak tato složka samostatně opouští hvězdu. Pokud je ovšem její rychlost menší než je rychlost úniková, pak složka padá zpět na hvězdu.

Člen odpovídající tření v pohybové rovnici pasivní složky na její hustotě nezávisí. Z toho tedy plyne zajímavý závěr, že poloha bodu, ve kterém se pasivní složka odděluje, na její hustotě také



(a) (b)

Obrázek 5.1: Model větru s převládající aktivní složkou (čerchovaná čára), ve kterém se odděluje pasivní složka (plná čára).

nezávisí (pokud není vítr podstatně ohříván třením). Poloha tohoto bodu pak závisí pouze na nábojích a hmotnostech částic a navíc na hustotě aktivní složky.

Při podrobném popisu je nutné též započítat vliv teploty. Pokud by síla, urychlující aktivní složku, byla silně závislá na teplotě, nemuselo by k oddělení vůbec dojít.

Pro ověření těchto teoretických závěrů byly spočteny modely větru spektrálního typu B3 se shodnými teplotami jednotlivých složek (přitom byly použity parametry uvedené v tabulce 4.5) s uměle zvýšeným poměrem hustot kovů a vodíku v atmosféře na hodnotu $\mathfrak{Y}_\mathrm{i} = 100$. Numerický model neizotermického větru se společnou teplotou je uveden na obrázku 5.1. Vidíme, že jednotlivé složky větru se oddělují a vítr je navíc zahřátý třením, dosahuje maximální teploty okolo 23 000 K.

5.1.2 Převládající pasivní složka

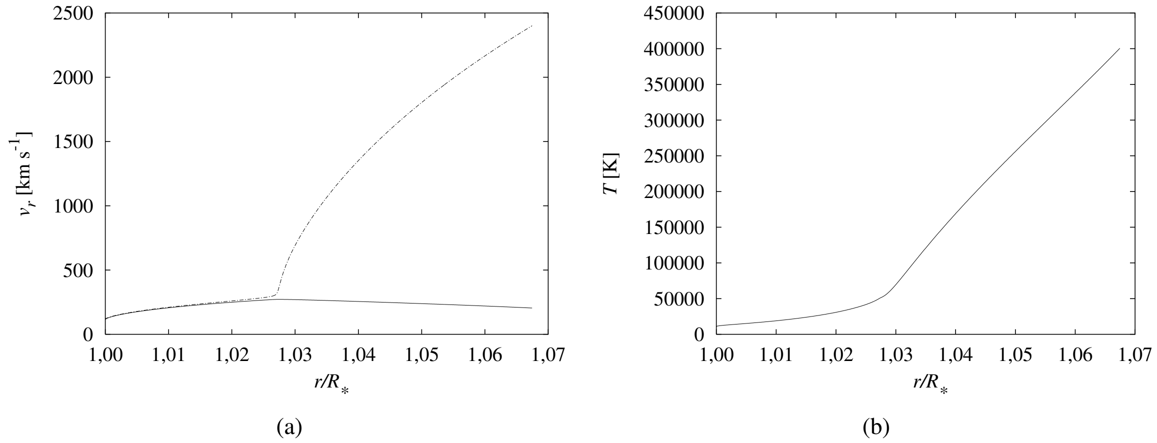
Situace je ovšem zcela odlišná pokud pasivní složka má podstatně vyšší hustotu než složka aktivní. To je běžné v případě zářením urychlovaných větrů horkých hvězd. Podobně jako v předchozím případě, v místě, kde Chandrasekharova funkce dosahuje svého maxima (jako explicitní funkce svého argumentu), není tření schopné zprostředkovat dostatečné předávání hybnosti mezi jednotlivými složkami větru. Vůči případu, kdy je tření schopné předávat dostatečné množství hybnosti, je třecí síla menší o hodnotu ΔR. Gradient rychlosti pasivní složky p se musí snížit o hodnotu $\Delta(\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}/\mathrm{d}r)$. Z pohybové rovnice pak, s využitím rovnice kontinuity, získáváme

$$\left(v_{r\mathrm{p}} - \frac{{a_\mathrm{p}}^2}{v_{r\mathrm{p}}}\right)\Delta\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r} = \frac{\Delta R}{\rho_\mathrm{p}}. \tag{5.1}$$

Pokles třecí síly ovlivní také aktivní složku. Pro změnu gradientu rychlosti aktivní složky $\Delta \mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r$ pak z pohybové rovnice aktivní složky získáváme

$$\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{{a_\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}}\right)\Delta\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = \Delta g_R - \frac{\Delta R}{\rho_\mathrm{i}}, \tag{5.2}$$

kde jsme jako Δg_R označili změnu síly, urychlující aktivní složku. Obecně pak existují dvě možnosti, jak se budou složky za tímto bodem chovat. Přitom je podstatné, zda urychlující síla závisí na gradientu rychlosti, nebo nikoliv.



Obrázek 5.2: Model větru hvězdy spektrálního typu B3 s konstantní silou urychlující aktivní složku a s nábojem kovů $q_\mathrm{i} = 0{,}6\, q_\mathrm{p}$. Aktivní složka (čerchovaná čára) se odděluje od pasivní složky (plná čára).

Síla nezávislá na gradientu rychlosti

Nejdříve budeme předpokládat, že urychlující síla g_R nezávisí na gradientu rychlosti aktivní složky $\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r$. Aby bylo možné v pohybové rovnici aktivní složky vyvážit snížení třecí síly, musí v tomto případě nutně vzrůst gradient rychlosti aktivní složky, vyloučením změny třecí síly z rovnic (5.1,5.2) získáváme (za předpokladu, že rychlosti větru jsou větší než izotermické rychlosti zvuku a_p, a_i, a že v bodě, ve kterém sledujeme oddělení stále ještě platí $v_{r\mathrm{i}} \approx v_{r\mathrm{p}}$)

$$\Delta \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\rho_\mathrm{i}}{\rho_\mathrm{p}} \Delta \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}. \tag{5.3}$$

Stejně tak je nutné vyvážit chybějící třecí sílu v pohybové rovnici pasivní složky. Jelikož však třecí síla do této rovnice vstupuje s opačným znaménkem, musí nutně dojít k opačnému jevu, tedy ke snížení gradientu rychlosti pasivní složky. Jinými slovy, oddělení jednotlivých složek větru je v tomto případě také možné.

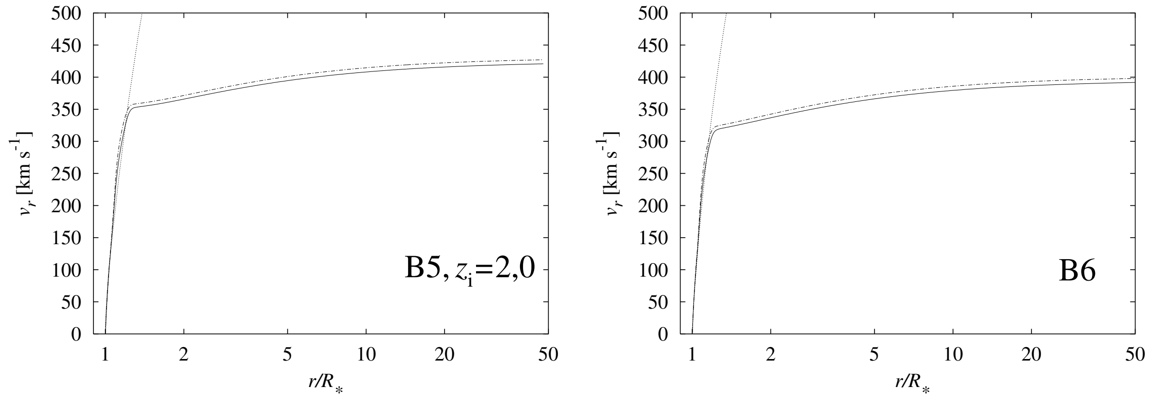
Aby bylo možné ověřit předchozí teoretické závěry, byly spočteny modely neizotermického hvězdného větru se silou, která nezávisí na gradientu rychlosti aktivní složky. Byl spočten model hvězdy spektrálního typu B3 se stejnými parametry jako v předchozí kapitole, ovšem se slunečním poměrem kovů a vodíku. Jako urychlující síla byla zvolena zářivá síla spočtená v CAK aproximaci s *konstantním* průběhem rychlosti daným „β-zákonem“

$$v_{r\mathrm{i}} = v_\infty \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta,$$

s parametry $\beta = 0{,}45$ a $v_\infty = 1\,100\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Pro velké hodnoty náboje kovů q_i nedosahuje Chandrasekharova funkce v žádném bodě větru svého maxima (jako explicitní funkce svého argumentu), a tedy k oddělení nedochází. Naopak, pro malé hodnoty náboje q_i k oddělení dochází, jak je patrné z obrázku 5.2. Navíc tření mezi složkami podstatně ohřívá vítr.

Síla rostoucí s gradientem rychlosti

Chování větru za bodem (ve směru toku), ve kterém Chandrasekharova funkce dosahuje svého maxima (jako funkce svého argumentu), se podstatně liší v případě, kdy je síla rostoucí funkcí gradientu rychlosti, jak je tomu v případě zářivé síly v Sobolevově aproximaci. Pokud by za tímto bodem došlo



(a) (b)

Obrázek 5.3: Modely izotermického větru hvězd hlavní posloupnosti spektrálních typů B5 a B6 se zářivou silou v Sobolevově aproximaci. K oddělení aktivní složky (čerchovaná čára) od pasivní (plná čára) nedochází.

k prudkému zvýšení gradientu rychlosti, podobně jako v minulém případě, pak by došlo ke zvýšení velikosti urychlující síly a ještě více by se prohloubila nerovnováha v pohybové rovnici aktivní složky a tato rovnice by splněna nebyla. Proto v tomto případě, aby byla splněna pohybová rovnice aktivní složky, musí dojít ke snížení síly, působící na aktivní složku. Toho může být docíleno snížením gradientu rychlosti aktivní složky podle vztahu (5.2)

$$\left(v_{r\mathrm{i}} - \frac{{a_\mathrm{i}}^2}{v_{r\mathrm{i}}} - \frac{\partial g_R}{\partial \left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)}\right) \Delta \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = -\frac{\Delta R}{\rho_\mathrm{i}}. \tag{5.4}$$

Pokud první dva členy na levé straně mohou být zanedbány (jak tomu je v případě zářivé síly v Sobolevově aproximaci), pak tato rovnice může být přepsána jako

$$\Delta g_R \equiv \frac{\partial g_R}{\partial \left(\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}/\mathrm{d}r\right)} \Delta \frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r} = \frac{\Delta R}{\rho_\mathrm{i}}. \tag{5.5}$$

Pokles gradientu rychlosti aktivní složky znamená, že k oddělení složek v tomto případě nedochází.

Tento závěr byl již ověřen v kap. 4.3.6 pro případ izotermického větru hvězd spektrálních typů B3–B8. Výsledné modely větrů hvězd B5 a B6 jsou nakresleny též na obr. 5.3. Bohužel, získaný závěr nemůže být ověřen v neizotermickém případě díky závislosti zářivé síly na teplotě. Pokud roste rozdíl rychlostí obou složek, vítr je ohříván třením a zářivá síla se snižuje. Následný pokles rychlosti větru a růst hustoty vede k tomu, že Chandrasekharova funkce svého maxima (jako funkce svého argumentu) vůbec nedosahuje a tedy možnost oddělení jednotlivých složek větru je vyloučena (viz. kap. 4.4.5). Případné ověření nemožnosti oddělení by však zřejmě nebylo příliš podstatné, protože získané modely by byly s největší pravděpodobností nestabilní, podobně jako izotermické modely (viz. kap. 4.3.3).

Pokud se však složky začínají oddělovat v místě, kde je jejich rychlost menší než rychlost úniková, pak k oddělení může dojít i v tomto případě díky tomu, že aktivní složka již není schopna vynést pasivní složku z blízkosti hvězdy a pasivní složka padá zpět na hvězdu. Je však patrné, že i v tomto případě dochází ke zmiňovanému poklesu gradientu rychlosti aktivní složky (viz. izotermický model na obr. 4.7(e) a neizotermický model na obr. 4.11).

Srovnatelné hustoty složek

Zřejmě nejsložitější situace nastává, pokud jsou hustoty obou složek srovnatelné. V tomto případě uvedené jednoduché vztahy nemohou být použity, protože možnost oddělení již nezávisí pouze na závislosti urychlující síly na gradientu rychlosti, ale také například na její závislosti na teplotě. Otázka, zda je v takovémto větru oddělení možné, musí být tedy zodpovězena pouze s užitím podrobných numerických modelů zvlášť pro každý jednotlivý případ. Naštěstí však tento případ z astrofyzikálního hlediska není příliš důležitý, protože vodík je ve většině hvězd prvkem s největším zastoupením. Na druhou stranu však existují hvězdy chudé na vodík, u kterých by se srovnatelné hustoty jednotlivých složek mohly vyskytnout.

5.2 Vliv chemického složení na modely větrů

Ačkoliv se vliv chemického složení na hvězdný vítr často zanedbává, je chemické složení větru nezbytné například pro přesnou předpověď rychlosti ztráty hmoty.

5.2.1 Závislost parametrů síly záření na chemickém složení

Ze závislosti zářivé síly ve vícesložkovém přiblížení (4.38) na hustotě absorbující složky je možné přímo odvodit závislost parametrů k a α na chemickém složení. Pokud se mění chemické složení, pak se hustota kovů mění podle vztahu

$$\rho_\mathrm{i} = z_* \rho_{\mathrm{i}\odot}, \tag{5.6}$$

kde $\rho_{\mathrm{i}\odot}$ je odpovídající sluneční hodnota hustoty a z_* je abundance vzhledem ke Slunci. Ze vzorce (4.38) je patrné, že zářivé zrychlení působící na absorbující složku (kovy) se mění podle vztahu

$$g_\mathrm{i}^\mathrm{rad} = z_*^{-\alpha} g_{\mathrm{i}\odot}^\mathrm{rad}. \tag{5.7}$$

Protože však zářivá síla působící na plyn v jednosložkovém přiblížení je dána součinem $\rho_\mathrm{i} g_\mathrm{i}^\mathrm{rad}$, může být vliv chemického složení na parametr k v jednosložkovém modelu zapsán jako

$$k = z_*^{1-\alpha} k_\odot, \tag{5.8}$$

přičemž hodnota parametrů α a δ se nemění. K tomuto závěru dospěli také Puls, Springmann a Lennon (2000), kteří použili přístup založený na rozdělovací funkci čar. Závislost těchto parametrů na chemickém složení byla též diskutována Abbottem (1982).

Chemické složení se následně projeví ve vnějších charakteristikách hvězdného větru, získávaných pozorováním. Zatímco konečná rychlost v_∞ závisí především na hodnotě parametru α, a tedy se s chemickým složením nijak podstatně nemění, pro rychlost ztráty hmoty tento závěr neplatí. Její hodnota naopak závisí především na parametru k, který se, jak bylo ukázáno, mění úměrně $z_*^{1-\alpha}$.

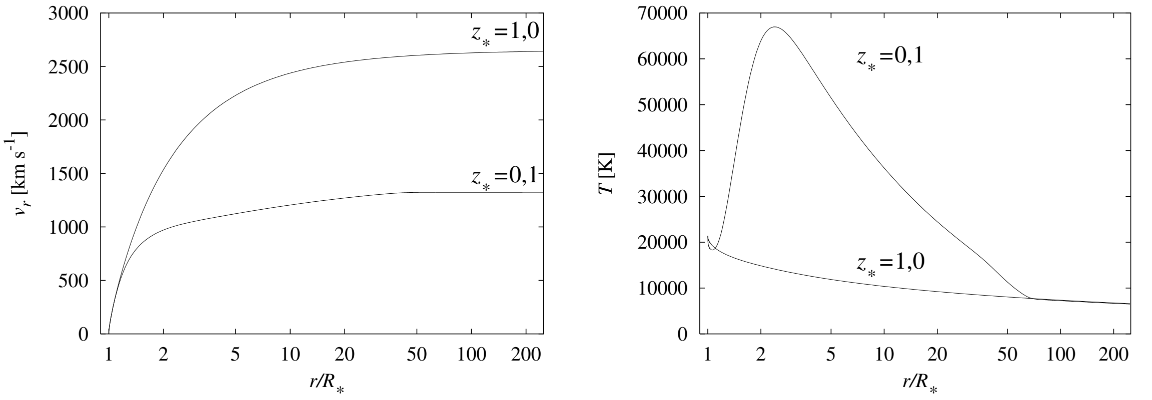
5.2.2 Vliv chemického složení na strukturu větru

Pro nižší hustoty větru ovlivňuje chemické složení hvězdný vítr ještě více. Díky tomu, že rozdíl rychlostí aktivní a pasivní složky závisí na jejich hustotách, vede změna chemického složení ke změně rozdílu rychlostí složek. To se pak může promítnout v odlišném ohřevu větru třením.

Změněné chemické složení lze do modelů jednoduše zahrnout odlišnou hraniční podmínkou absorbující složky (4.165)

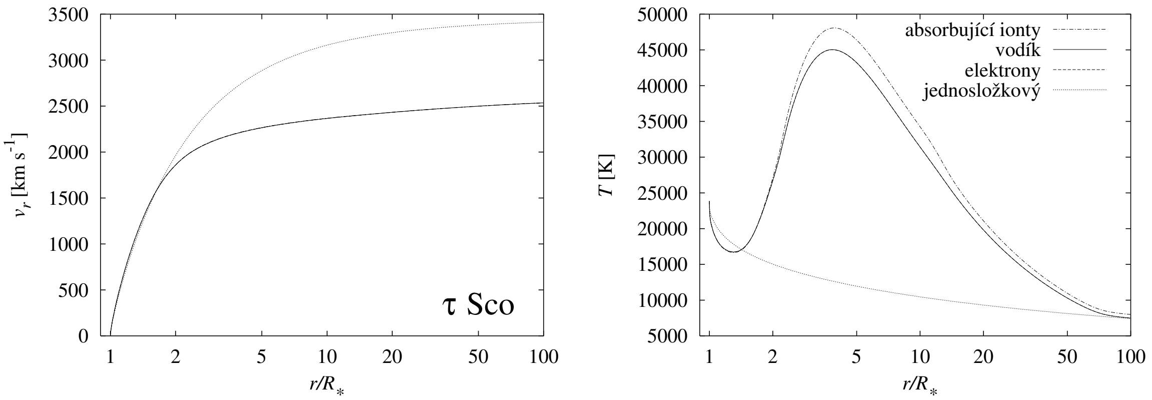
$$\rho_\mathrm{p}(R_*) = \frac{1}{z_* \mathfrak{Y}_\mathrm{i}} \rho_\mathrm{i}(R_*) \frac{v_{r\mathrm{i}}(R_*)}{v_{r\mathrm{p}}(R_*)}. \tag{5.9}$$

Modely větru hvězdy hlavní posloupnosti spektrálního typu B0, spočtené pro dvě různé hodnoty chemického složení $z_* = 1$ a $z_* = 0{,}1$, jsou uvedeny na obrázku 5.4. Pro porovnání byl zvolen trojsložkový model se společnou teplotou, popsaný v kap. 4.4. Dospěli jsme k velice zajímavému



(a) (b)

Obrázek 5.4: Porovnání průběhu velikosti rychlosti a teploty pasivní složky v modelu větru hvězdy B0 pro různé hodnoty chemického složení.



(a) (b)

Obrázek 5.5: Trojsložkový model větru hvězdy τ Sco. Plná čára značí ionty vodíku, čerchovaná absorbující ionty a tečkovaná jednosložkový model. Zahrnutí ohřevu větru třením a Gayleyho-Owockého ohřevu vede ke snížení hodnoty v_∞.

závěru, že dvě hvězdy se stejnými parametry (tedy hmotností, poloměrem a efektivní teplotou), ale s odlišným chemickým složením mají zcela odlišné větry. Konečná rychlost v_∞ jde dvojnásobná, rychlost ztráty hmoty se liší o řád a teplota větru s nižší hustotou je dvakrát větší než efektivní teplota hvězdy.

5.3 Pozorované a předpovězené konečné rychlosti větru v_∞

5.3.1 τ Sco

Poměrně velmi často studovaná hvězda τ Sco je do jisté míry oříškem pro teorii hvězdného větru. Pozorovaný, ale velmi nejistý odhad konečné rychlosti — okolo $2000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ (Abbott 1978, Lamers a Rogerson 1978) je v příkrém rozporu s teoretickou předpovědí, získanou Pauldrachem (1987) — $3850\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Springmann a Pauldrach (1992) vysvětlili pozorovanou nízkou hodnotu v_∞ na základě oddělování absorbující a neabsorbující složky dvojsložkového větru. Pro své úvahy však použili podstatně menší hodnotu rychlosti ztráty hmoty než je hodnota pozorovaná.

S užitím jednosložkových neizotermických modelů, popsaných v kapitole 4.2.2, vychází hodnota

Tabulka 5.1: Parametry spočtených modelů větru τ Sco

Parametry hvězdy				Parametry větru			
$\mathfrak{M}$	R_*	T_{eff}	z_*	k	α	δ	$\frac{m_{\text{i}}}{m_{\text{p}}}$
$[\mathfrak{M}_\odot]$	$[R_\odot]$	[K]					
19,60	5,50	33 000	0,3	0,113	0,604	0,095	12,0
19,60	5,50	33 000	0,6	0,113	0,604	0,095	12,0

$v_\infty = 3400\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, podstatně vyšší než je hodnota pozorovaná. Proto byly spočteny trojsložkové neizotermické modely s odlišnými teplotami jednotlivých složek, aby bylo možné zjistit, zda jsou tyto modely schopny vysvětlit pozorovanou nízkou hodnotu konečné rychlosti v_∞. Parametry modelu jsou uvedeny v tabulce 5.1. Hmotnost, poloměr a efektivní teplota byly zvoleny stejně jako v práci Springmanna a Pauldracha (1992). Jako představitel absorbujícího iontu byl zvolen atom uhlíku, který zřejmě nejlépe odpovídá danému spektrálnímu typu (Vink, de Koter a Lamers 2001). Obsah kovů byl snížen na hodnotu $z_* = 0{,}6$ podle údajů zjištěných pozorováním (Kilian 1994). Avšak ani tyto modely nebyly schopny vysvětlit pozorovanou nízkou hodnotu v_∞. Pokud však byl obsah kovů snížen na hodnotu $z_* = 0{,}3$, pak dojde v modelu ke zvýšení ohřevu třením, který se projeví přiblížením rychlosti v_∞ směrem k pozorovaným hodnotám (viz. obr. 5.5). Toto, do jisté míry umělé snížení chemického složení, však neznamená nedůvěru v pozorované hodnoty. Spíše však odráží domněnku, že použité modely nejsou ještě zcela schopny vystihnout podrobné rysy hvězdných větrů[1]. Přesto je výsledné snížení konečné rychlosti na hodnotu $v_\infty = 2500\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ poměrně uspokojivé, protože ani pozorovaná hodnota této veličiny rozhodně není přesná. Tak zatímco Abbott (1978), Lamers a Rogerson (1978) udávají již zmiňovanou hodnotu $2000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$, novější měření (Lamers, Snow a Lindholm 1995) udávají hodnotu ještě menší — $v_\infty = 1000\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Všichni jmenovaní autoři ale poznamenávají, že změřená hodnota je nejistá. Průběh rychlosti, nakreslený na obrázku 5.5(a), však navíc podporuje jeho dobrá shoda s průběhem získaným Hamannem (1981) na základě fitování čar v ultrafialové oblasti.

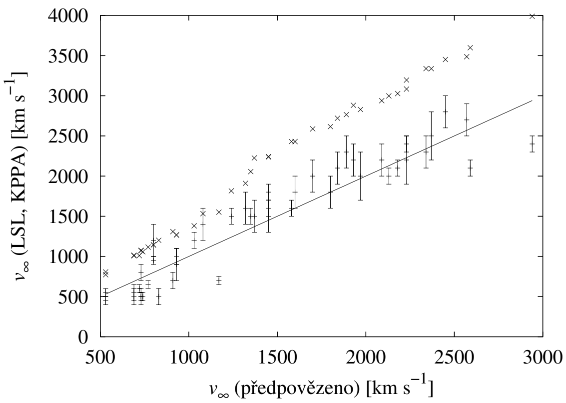
Je však nutné zdůraznit, že snížená hodnota v_∞ nebyla získána pouze díky snížení hodnoty obsahu kovů, protože jednosložkové modely se $z_* = 0{,}3$ bez ohřevu třením vedou k téměř stejné hodnotě v_∞ jako jednosložkové modely se $z_* = 1{,}0$. Nízká hodnota konečné rychlosti byla získána zahrnutím ohřevu větru třením. Ačkoliv Springmann a Pauldrach (1992) též vysvětlovali nízkou hodnotu v_∞ na základě vícesložkových modelů, jejich přístup je zcela odlišný, protože pro vysvětlení použili předpoklad oddělení jednotlivých složek větru. Podle výsledků diskutovaných v této disertační práci však k takovémuto oddělení složek nedochází.

Další problém týkající se větru hvězdy τ Sco (stejně tak jako mnoha dalších hvězd s řidším větrem), je problém nesouhlasu mezi předpovězenými a pozorovanými hodnotami rychlosti ztráty hmoty. Hodnota získaná pomocí trojsložkového modelu, $1{,}2.10^{-8}\,\mathfrak{M}_\odot\mathrm{rok}^{-1}$, je asi třikrát menší (Cohen, Cassinelli a Waldron 1997) než hodnota získaná pomocí zjednodušeného předpisu pomocí CAK teorie (Kudritzki a kol. 1989), a to díky sníženému obsahu kovů.[2] Tato hodnota je poněkud vyšší než nejnovější horní mez rychlosti ztráty hmoty $6.10^{-9}\,\mathfrak{M}_\odot\mathrm{rok}^{-1}$, získaná Zaalem a kol. (1999) na základě měření infračervené emise. Jejich výsledek je ovšem citlivý na efektivní teplotu hvězdy.

Waters a kol. (1993) na základě objevu infračervených emisních čar vodíku ve spektru τ Sco došli k závěru, že τ Sco je Be hvězda, namířená osou rotace směrem k nám. Tyto emisní čáry je však možné vysvětlit podstatně jednodušeji na základě NLTE efektů (Murdoch, Drew a Anderson 1994,

[1]Pro porovnání byly spočteny modely, ve kterých jsou absorbující ionty popsány pomocí iontů železa namísto iontů uhlíku. Tyto modely pro $z_* = 0{,}5$ vedly k téměř shodné hodnotě v_∞.

[2]V tomto případě opět vidíme, jak je důležité dobře započíst chemické složení při výpočtu modelů větru. Bohužel, mnoho autorů tuto skutečnost zcela opomíjí.



Obrázek 5.6: Porovnání spočtených a pozorovaných hodnot v_∞. Na obrázku jsou též uvedeny chyby pozorovaných hodnot. Navíc jsou zakresleny teoretické hodnoty získané na základě předpisu (Kudritzki a kol. 1989, KPPA, křížky).

Zaal a kol. 1999). Skutečně, NLTE sféricky symetrické modely (Kubát 2001) atmosféry τ Sco vykazují nejen emisi ve vodíkových, ale také v heliových čarách.

5.3.2 Porovnání většího počtu hvězd

Je zřejmé, že porovnání pozorovaných a předpovězených hodnot konečné rychlosti v_∞ by mohlo posloužit k ověření vícesložkových modelů hvězdných větrů. Obsažný soubor změřených hodnot této veličiny publikovali Lamers, Snow a Lindholm (1995, LSL), proto byla tato práce zvolena jako základ pro porovnávání. V tabulce 5.2 jsou uvedeny kromě parametrů popisujících jednotlivé hvězdy (převzatých z LSL) a parametrů popisujících zářivou sílu (Abbott 1982) také hodnoty v_∞ změřené LSL a jejich teoretické předpovědi, získané v téže práci na základě předpisu (Kudritzki a kol. 1989, KPPA). Nakonec jsou uvedeny předpovězené hodnoty, spočtené pomocí vícesložkových neizotermických modelů se započtením Dopplerovského ohřevu (popsané v kapitole 4.6). Hodnoty získané LSL, které tito autoři nepovažovali za přesné, nebyly do srovnání zahrnuty.

Porovnání spočtených a pozorovaných hodnot rychlosti v_∞ je uvedeno na obrázku 5.6. Je patrné, že hodnoty získané přímo pomocí neizotermických modelů lépe odpovídají pozorování, než hodnoty získané na základě předpisu KPPA. Bohužel se však ve větrech těchto hvězd neprojevuje ani ohřev třením, ani Dopplerovský ohřev a tedy poměrně dobrý soulad mezi pozorovanými a spočtenými hodnotami není způsoben použitím vícesložkových modelů.

Přetrvávající rozdíly mezi pozorovanými a spočtenými hodnotami v_∞ jsou způsobeny třemi důvody. Jednak nejistoty určení parametrů hvězd mohou ovlivnit předpovězené hodnoty. V této souvislosti stojí za povšimnutí, že například hvězdy HD 106343, HD 148379 a HD 190603 mají v tabulce přesně stejné parametry, přesto se jejich pozorovaná rychlost v_∞ liší. Podobně také rotace hvězdy může ovlivnit konečnou rychlost větru v_∞ (Friend a Abbott 1986). V neposlední řadě také zjednodušené výpočty zářivé síly a tepelné rovnováhy mohou zapříčinit rozdíly mezi pozorováním a teorií.

Není však zcela zřejmé, proč přibližný předpis (KPPA) nevede k dobré shodě mezi pozorovanými a předpovězenými hodnotami v_∞, přestože by tento předpis měl odpovídat podrobným výpočtům Pauldracha, Pulse a Kudritzkého (1986).

5.4 Problém rychlosti ztráty hmoty

Protože podmínky pro určení rychlosti ztráty hmoty vícesložkových modelů jsou obdobné jako CAK podmínka jednosložkového větru, je také hodnota rychlosti ztráty hmoty vícesložkových a jednosložko-

Tabulka 5.2: Parametry hvězd spektrálních typů O6–B5, vybrané z LSL pro porovnání hodnot v_∞

HD	Parametry hvězdy				Parametry větru			Limitní rychlosti		
číslo	$\mathfrak{M}$	R_*	T_{eff}	z_*	k	α	δ	v_∞ (LSL)	v_∞ (KPPA)	v_∞ (teorie)
	$[\mathfrak{M}_\odot]$	$[R_\odot]$	[K]					$[\mathrm{km\,s^{-1}}]$	$[\mathrm{km\,s^{-1}}]$	$[\mathrm{km\,s^{-1}}]$
30614	43,0	27,6	30900	1,0	0,158	0,609	0,120	1500 ± 200	2241	1450
34656	30,0	9,9	38100	1,0	0,171	0,607	0,120	2100 ± 100	3598	2590
36861	30,0	12,3	36000	1,0	0,167	0,607	0,120	2200 ± 300	3084	2230
41117	25,0	43,4	18500	1,0	0,410	0,507	0,098	500 ± 50	1058	740
43384	19,0	39,8	16300	1,0	0,311	0,510	0,112	500 ± 100	1015	690
47240	17,0	23,4	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	1000 ± 100	1267	930
51309	11,0	16,3	16700	1,0	0,329	0,509	0,109	700 ± 100	1309	910
52382	17,0	20,4	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	1200 ± 100	1381	1030
69464	49,0	20,1	37200	1,0	0,169	0,607	0,120	2100 ± 200	2721	1840
74194	28,0	14,5	33000	1,0	0,161	0,608	0,120	2000 ± 300	2829	1970
79186	18,0	62,4	13600	1,0	0,284	0,519	0,100	450 ± 50	772	530
91572	38,0	9,6	42200	1,0	0,175	0,606	0,114	2400 ± 100	3989	2940
91969	25,0	22,9	26000	1,0	0,284	0,568	0,108	1500 ± 100	1816	1240
92964	29,0	68,4	17400	1,0	0,361	0,509	0,105	550 ± 50	807	530
93130	43,0	13,8	40200	1,0	0,174	0,606	0,119	2500 ± 300	3337	2370
96248	25,0	38,9	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	650 ± 50	1116	770
96917	46,0	25,2	33000	1,0	0,161	0,608	0,120	1800 ± 200	2430	1600
101190	48,0	13,9	42200	1,0	0,175	0,606	0,114	2800 ± 200	3452	2450
101436	42,0	12,4	41200	1,0	0,174	0,606	0,117	2700 ± 200	3487	2570
106343	24,0	40,7	19700	1,0	0,464	0,506	0,091	800 ± 100	1074	730
109867	26,0	38,9	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	1200 ± 200	1144	800
112244	46,0	25,2	33000	1,0	0,161	0,608	0,120	1600 ± 100	2430	1580
116084	15,0	24,8	17400	1,0	0,361	0,509	0,105	500 ± 100	1201	830
148379	24,0	40,7	19700	1,0	0,464	0,506	0,091	500 ± 100	1074	730
151515	41,0	14,9	38100	1,0	0,171	0,607	0,120	2400 ± 100	3196	2230
151804	70,0	34,0	34000	1,0	0,163	0,608	0,120	1500 ± 200	2226	1370
152405	25,0	15,3	30500	1,0	0,157	0,609	0,120	1800 ± 200	2616	1800
152424	52,0	33,4	30500	1,0	0,157	0,609	0,120	1500 ± 100	2056	1350
154090	26,0	38,9	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	950 ± 50	1144	800
157246	17,0	23,4	20800	1,0	0,451	0,514	0,091	900 ± 200	1267	930
162978	40,0	16,0	37100	1,0	0,169	0,607	0,120	2200 ± 200	2939	2090
163758	50,0	20,1	37200	1,0	0,169	0,607	0,120	2300 ± 200	2765	1890
166596	9,7	9,8	18700	1,0	0,419	0,507	0,097	700 ± 50	1551	1170
175754	34,0	14,2	36000	1,0	0,167	0,607	0,120	2000 ± 100	2998	2130
186980	35,0	13,9	37100	1,0	0,169	0,607	0,120	2100 ± 100	3028	2180
188209	43,0	27,6	30900	1,0	0,158	0,609	0,120	1600 ± 100	2241	1450
190603	24,0	40,7	19700	1,0	0,464	0,506	0,091	500 ± 50	1074	730
190864	42,0	14,0	39200	1,0	0,173	0,606	0,120	2300 ± 200	3338	2340
198478	17,0	36,3	16300	1,0	0,311	0,510	0,112	550 ± 100	1009	690
204172	23,0	20,0	26000	1,0	0,284	0,568	0,108	1600 ± 200	1911	1320
206165	19,0	35,8	18500	1,0	0,410	0,507	0,098	600 ± 50	1011	720
210809	38,0	21,4	32000	1,0	0,160	0,608	0,120	2000 ± 200	2588	1700
210839	51,0	19,6	38200	1,0	0,171	0,607	0,120	2200 ± 200	2882	1930
213087	21,0	23,4	23400	1,0	0,368	0,541	0,100	1400 ± 200	1533	1080
218915	43,0	27,6	30900	1,0	0,158	0,609	0,120	1800 ± 100	2241	1450

vých větrů obdobná. Navíc tyto podmínky vedou k největší možné rychlosti ztráty hmoty, podobně jako v jednosložkovém případě (Poe, Owocki a Castor 1990).

Tento závěr neplatí pouze v případě, kdy je změněna teplota větru v blízkosti CAK bodu. Vyšší teplota způsobená třením snižuje zářivou sílu a menší zářivá síla v oblasti pod CAK bodem vede k snížení rychlosti ztráty hmoty (Vink, de Koter a Lamers 1999). Snížení je však podstatné pouze v případě modelů s pádem absorbující složky zpět na hvězdu (viz. obr. 4.11, 4.18).

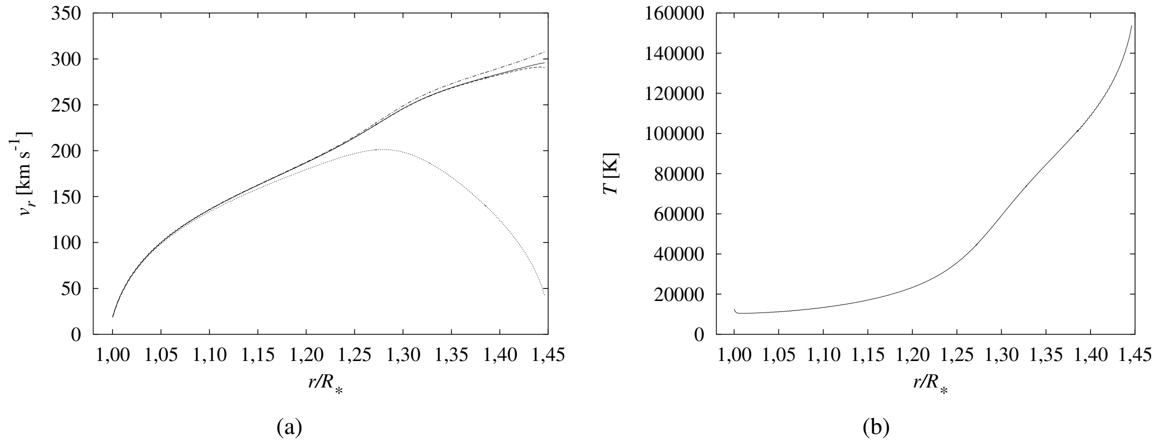
Je však zajímavé, že ohřev třením může ovlivnit *pozorovanou* rychlost ztráty hmoty hvězdného větru. Nedávná podrobná teoretická studie rychlosti ztráty hmoty (Vink, de Koter a Lamers 2000) ukazuje, že pro hvězdy spektrálního typu O existuje poměrně dobrý soulad mezi rychlostí ztráty hmoty, získanou z pozorování rádiové emise a H_α profilů a její hodnotou odvozenou z teorie. V případě B hvězd to však již neplatí. Teoretické rychlosti ztráty hmoty jsou v dobrém souladu s hodnotami získanými pomocí rádiové emise (viz. např. Scuderi a kol. 1998), ale již ne s hodnotami, spočtenými pomocí profilů čáry H_α (Kudritzki a kol. 1999). Jedno z možných vysvětlení by mohl přinést ohřev větru třením a případně Dopplerovým jevem. Zatímco rádiová emise, vznikající ve vzdálenosti stovek hvězdných poloměrů (Lamers a Leitherer 1993), kde se znovu uplatňuje zářivá rovnováha (viz. např. obr. 4.9(b), 4.9(d)), není ovlivněna ohřevem, H_α emise vzniká v oblastech bližších hvězdě a může být ohřevem ovlivněna prostřednictvím změny ionizační rovnováhy větru. Na ionizační rovnováze závisí výpočet rychlosti ztráty hmoty (viz. např. diskuze v přehledovém článku Kudritzki a Puls 2000). Vidíme tedy, že Dopplerovský ohřev a ohřev třením mohou pomoci v pochopení rozdílů mezi rychlostmi ztráty hmoty B hvězd, získanými odlišnými metodami.

5.5 Chemicky pekuliární hvězdy a oddělování se hélia

Předpokládá se, že chemická pekuliarita mnohých hvězd je způsobena difuzí prvků pod vlivem zářivé síly v atmosférách hvězd (Michaud 1970). Je tedy patrné, že hvězdný vítr horkých hvězd a chemická pekuliarita mají stejnou fyzikální příčinu. Tyto dvě skupiny hvězd se liší velikostí zářivé síly. V případě hvězd spektrálního typu O a raných hvězd typu B je zářivá síla dostatečně vysoká, aby způsobila výtok hmoty (vodíku a helia společně s kovy) od hvězdy. V případě chemicky pekuliárních hvězd je zářivá síla menší a způsobuje jen zářivou difuzi, případně vítr složený pouze z kovů (Babel 1995). Existuje však skupina hvězd, které mají pekuliární obsah helia a přitom se u nich může vyskytovat hvězdný vítr (tedy vítr obsahující také neabsorbující složku — vodík a helium). V okolí těchto hvězd se mohou vyskytovat oblaka látky, která rotují společně s hvězdou (Groote a Hunger 1997, Smith a Groote 2001). Hunger a Groote (1999) navrhli, že zvýšený (případně snížený) obsah helia může být u těchto hvězd způsoben oddělováním se helia ve hvězdném větru (díky rekombinaci) a jeho následným pádem zpět na hvězdu (viz. např. Porter a Skouza 1999).

Pokud by byl tento model reálný, pak by se mělo ve čtyřsložkových modelech hvězdných větrů (zahrnujících kromě vodíku, absorbujících kovů a elektronů také helium) oddělovat helium od ostatních složek. Proto byly spočteny čtyřsložkové modely hvězdných větrů se stejnou teplotou jednotlivých složek a s neměnným nábojem iontů (viz. kap. 4.4 popisující obdobné trojsložkové modely). Pro popis heliových atomů byly zavedeny dvě nové proměnné, jejich rychlost $v_{r\mathrm{He}}$ a hustota ρ_{He}. Hmotnost heliových atomů byla stanovena jako $m_{\mathrm{He}} = 4\,m_{\mathrm{p}}$. Rychlost a hustota heliových atomů byla spočtena pomocí příslušné rovnice kontinuity (4.81) a pohybové rovnice (4.82). Odpovídající členy byly také přidány do energiové rovnice (4.89) a do rovnice kritického bodu (4.103). Okrajová hustota helia byla stanovena tak, aby odpovídala slunečnímu zastoupení helia. Pro jeho okrajovou rychlost však nebyly použity podmínky popisující heliový kritický bod, ale okrajová rychlost helia byla položena rovna rychlosti atomů vodíku.

Zmiňovaný model čtyřsložkového hvězdného větru pro hvězdu B3 hlavní posloupnosti, ve kterém se předpokládá náboj heliových iontů $q_{\mathrm{He}} = 0{,}03\,q_{\mathrm{p}}$, je uveden na obr. 5.7. Je patrné, že v bodě ve kterém absorbující ionty a vodík již nejsou schopny dále urychlovat heliovou složku dochází k oddělení



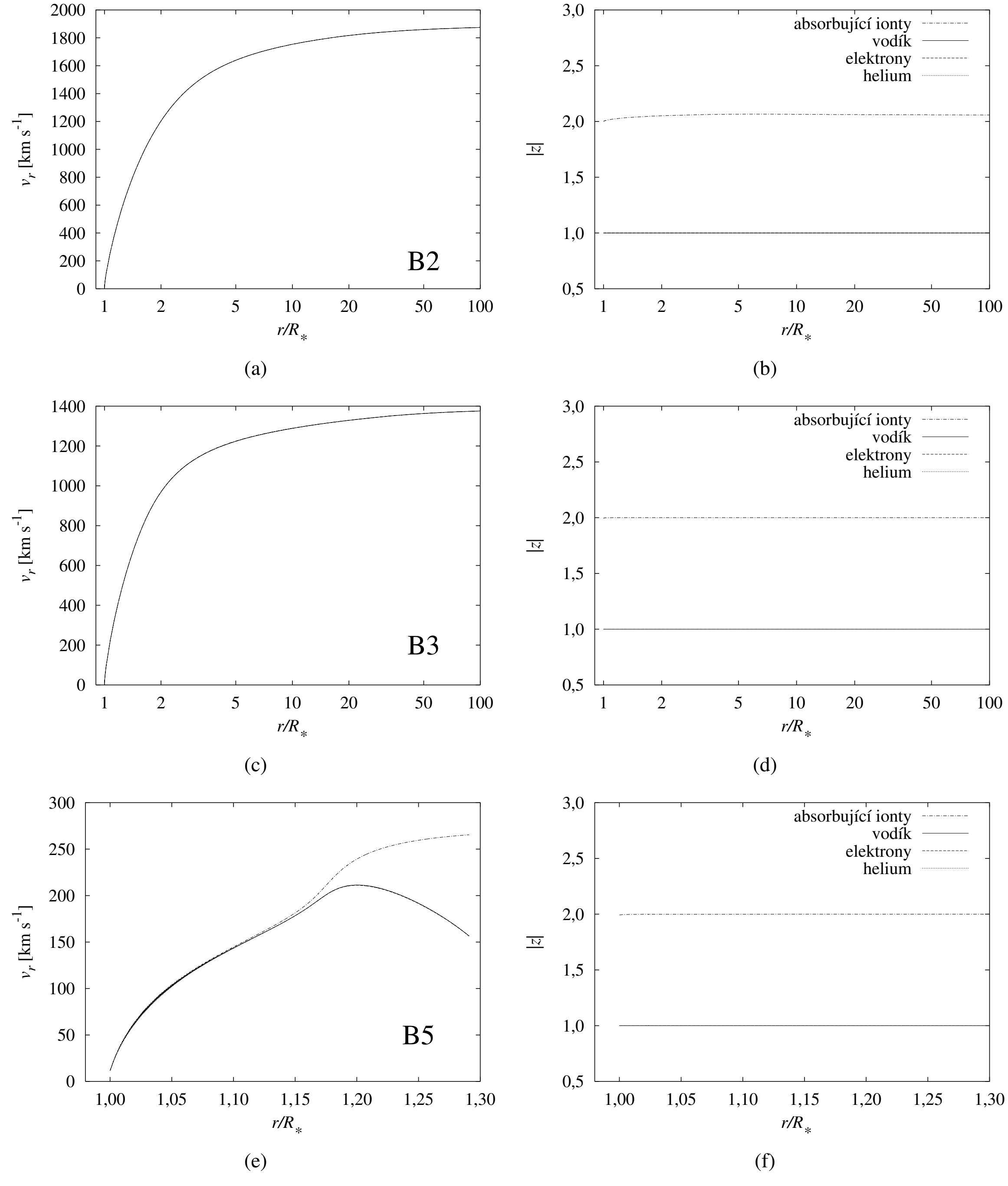
Obrázek 5.7: Čtyřsložkový model hvězdného větru se shodnými teplotami a neměnnými náboji složek. (a) Průběh rychlostí jednotlivých složek. Helium (označeno tečkovanou čárou) se odděluje od ostatních složek – vodíku (plná čára), absorbujících iontů (čerchovaná čára) a elektronů (přerušovaná čára). Protože však helium nedosahuje únikové rychlosti, vytváří heliovou obálku, případně padá zpět na hvězdu. (b) Teplota větru. Oddělování je doprovázeno silným ohřevem větru.

helia od společného větru. Protože se společný vítr absorbujících iontů a vodíku chová jako složka s vyšší hustotou, je možné oddělení atomů helia od zbytku větru (viz. kap. 5.1.1). Protože je rychlost helia v bodě oddělení menší než úniková rychlost, helium padá zpět na hvězdu, v jejíž atmosféře může vytvářet zvýšený obsah helia (Hunger a Groote 1999) nebo nad povrchem hvězdy vytváří heliovou obálku (obdobu vodíkové obálky, kterou modelovali Porter a Skouza 1999). Stacionární modely však není možné rozšířit pro libovolné hodnoty poloměrů, protože helium dosahuje svého kritického bodu a derivace jeho rychlosti neomezeně klesá (viz. kap. 4.3.6, 4.4.5).

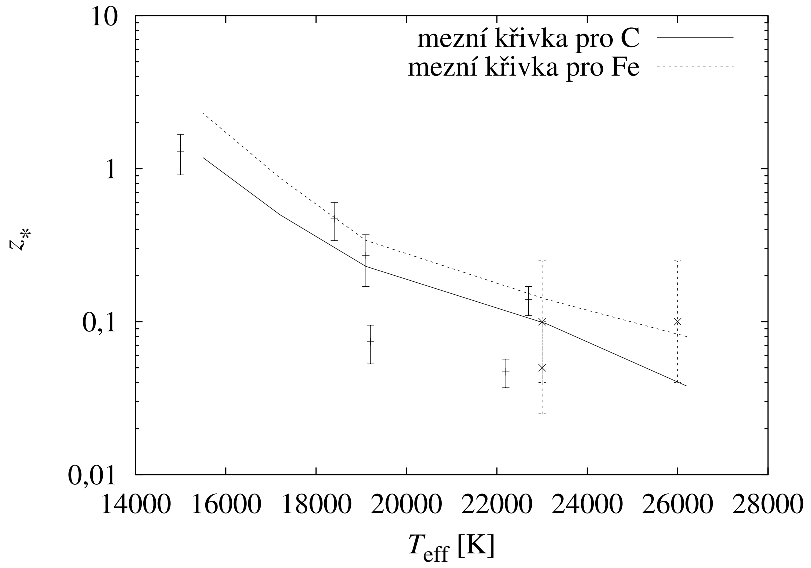
Je patrné, že možnost oddělování se helia závisí především na jeho náboji. Proto byly spočteny čtyřsložkové modely s různými teplotami jednotlivých složek, ve kterých byly náboje iontů získány z podmínky ionizační rovnováhy (4.139). Obdobné trojsložkové modely byly popsány v kap. 4.6. Tyto modely byly spočteny pro hvězdy spektrálních typů B2, B3 a B5 hlavní posloupnosti (obr. 5.8). Jak je patrné z jednotlivých obrázků, helium je ve vnějších oblastech větru ionizováno a tedy nedochází k jeho oddělování od zbylých složek větru. Pouze v případě hvězdy spektrálního typu B5 je možný pád helia zpět na hvězdu, ovšem společně s vodíkem. Tyto výsledky jsou tedy v rozporu s předpoklady, na kterých je založeno vysvětlení pekuliárního chemického složení helia (Hunger a Groote 1999), protože nedochází k samostatnému oddělování helia ve větru. Je však nutné zdůraznit, že modely jsou založeny na poněkud zjednodušeném popisu ionizační rovnováhy a že zpřesnění výpočtu ionizační rovnováhy může tyto modely pozměnit.

Přes tyto negativní výsledky je možné, že pekuliární chemické složení helia a oddělování se vodíku a helia ve hvězdném větru spolu souvisí. Na obr. 5.9 jsou nakresleny křivky s nejvyšším obsahem kovů, při kterém ještě dochází k oddělování se vodíku. Tyto křivky byly nakresleny pro dva odlišné typy absorbujících iontů, pro uhlík a železo. Pod těmito křivkami (pro hvězdy s menším obsahem kovů) se tedy nacházejí hvězdy, v jejichž větrech k oddělování dochází. Hvězdy nad těmito křivkami (hvězdy s vyšším obsahem kovů) mají společný vítr všech složek. Do tohoto grafu byly zaneseny hvězdy se zvýšeným obsahem helia z tab. 5.3, pro které byl určen obsah uhlíku (Zboril a North 1999) nebo železa (Smith a Groote 2001). Je patrné, že se všechny tyto hvězdy nacházejí pod křivkami mezního chemického složení[3] (v rámci příslušných intervalů chyb). V jejich větrech by tedy mělo docházet

[3]Tento výsledek však neplatí, pokud se pro tytéž hvězdy použije starší určení chemického složení a teploty (Osmer a Peterson 1974).



Obrázek 5.8: Průběh rychlosti (a) a absolutní hodnoty náboje (b) ve čtyřsložkových modelech hvězdného větru. Grafy rychlostí jednotlivých složek splývají, pouze v případě hvězdy spektrálního typu B5 dochází k oddělení vodíku a helia. Grafy popisující náboje helia, vodíku a elektronů také splývají. Náboj helia je dostatečně vysoký, k jeho samostatnému oddělování nedochází.



Obrázek 5.9: Oddělování se vodíku v závislosti na chemickém složení pro hvězdy hlavní posloupnosti. Plná čára značí mezní chemické složení, při kterém dochází k oddělování vodíku ve trojsložkovém větru, složeném z atomů uhlíku, vodíku a elektronů. Čárkovaná čára je tatáž mezní křivka, ale pro absorbující ionty popisované atomem železa. Pod těmito křivkami se nacházejí hvězdy u nichž dochází k oddělování vodíku. Naopak, u hvězd, které se nacházejí nad těmito křivkami, k oddělování nedochází. V obrázku jsou též zaneseny jednotlivé hvězdy s nadměrným obsahem helia z tab. 5.3. Hvězdy, u nichž byl určen obsah uhlíku jsou zakresleny plnou čarou, hvězdy se známým obsahem železa přerušovanou čarou. Svislé čáry značí chyby určení obsahu jednotlivých kovů.

Tabulka 5.3: Parametry hvězd hlavní posloupnosti s nadměrným obsahem helia, zakreslené v obr. 5.9

Hvězda	T_{eff} [K]	$z_{*,\mathrm{C}}$	$z_{*,\mathrm{Fe}}$	Zdroj
HD 36485	18400	$0{,}47 \pm 0{,}13$		Zboril a North (1999)
HD 37017	19200	$0{,}074 \pm 0{,}021$		Zboril a North (1999)
HD 37479	22200	$0{,}047 \pm 0{,}01$		Zboril a North (1999)
HD 64740	22700	$0{,}14 \pm 0{,}03$		Zboril a North (1999)
HD 92938	15000	$1{,}29 \pm 0{,}38$		Zboril a North (1999)
HD 108483	19100	$0{,}27 \pm 0{,}1$		Zboril a North (1999)
σ Ori	23000		$0{,}1^{+0{,}15}_{-0{,}06}$	Smith a Groote (2001)
HD 163472	26000		$0{,}1^{+0{,}15}_{-0{,}06}$	Smith a Groote (2001)
HD 184927	23000		$0{,}05^{+0{,}05}_{-0{,}025}$	Smith a Groote (2001)

k vytváření obálek nebo ke zpětnému pádu vodíku (a helia, které se pohybuje společně s ním). Obálky u některých těchto hvězd se pravděpodobně pozorují (Smith a Groote 2001), ale vysvětlení chemické pekuliarity by mělo být otázkou dalšího studia. Navíc, při oddělování složek se vítr zahřívá na vysoké teploty, při kterých dochází k vyzařování rentgenovského záření. Mnohé chemicky pekuliární hvězdy jsou skutečně zdrojem rentgenovského záření (viz. kap. 5.6).

5.6 Rentgenovská emise hvězdných větrů

Družicová pozorování OB hvězd ukázala, že tyto hvězdy jsou zdroji rentgenovského záření. Obvykle se předpokládá, že rentgenovská emise zmiňovaných hvězd je spojena s hvězdným větrem, přesněji s rázovými vlnami vznikajícími díky nestabilitám způsobovaným silou záření (viz. např. Lucy a White 1980, Owocki, Castor a Rybicki 1988). Cohen, Cassinelli a Waldron (1997) ukázali, že rentgenovská emise pozdějších B hvězd (na rozdíl od O hvězd) nemůže být vysvětlena pomocí rázových vln ve větru. Navrhli, že u těchto hvězd může docházet k přechodu ke koronálnímu mechanismu emise rentgenovského záření. Na základě výsledků modelování vícesložkového hvězdného hvězdného větru je však možné usuzovat, že rentgenovská emise hvězd může být spojena s vícesložkovou strukturou jejich větrů. Ukazuje se, že při oddělování jednotlivých složek větru dochází k ohřevu plazmatu až na teploty řádu 10^6 K (viz. např. obr. 4.11(b), 4.18(b) a 5.2(b)). Při srovnatelných teplotách dochází k emisi rentgenovského záření. Model rentgenovské emise, založený na oddělování jednotlivých složek větru, navrhli též Porter a Drew (1995).

Mnohé chemicky pekuliární hvězdy spektrálního typu B jsou též zdrojem rentgenovského záření (Berghöfer a Schmitt 1993, Drake a kol. 1994, Dachs a Hummel 1996). Pokud by chemická pekuliarita těchto hvězd souvisela s oddělováním se složek větru, pak by bylo možné rentgenovskou emisi uvažovaných hvězd vysvětlit na základě ohřevu větru prostřednictvím tření.

Protože zahrnutí zářivého ochlazování v této práci je podstatně zjednodušené, bylo vyzkoušeno, zda získaných vysokých teplot je také možné dosáhnout s použitím extrapolace přesnějších vztahů pro zářivé ochlazování (Rosner, Tucker a Vaiana 1978). Ukazuje se, že i s užitím zmiňovaných přesnějších vztahů je možné dosáhnout teplot řádu 10^6 K díky tomu, že zářivé ochlazování je při vysokých teplotách relativně malé. S použitím přesnějších vztahů pro zářivé ochlazování se tedy sice mění rozložení teploty v modelech, ale možnost vzniku rentgenovského záření prostřednictvím tření zůstává.

5.7 Nabíjení se hvězd

Problému úniku elektronů z atmosfér hvězd se věnoval Milne (1923). Ukázal, že elektrony mohou unikat z atmosfér hvězd díky působení zářivé síly. Výsledný kladný náboj hvězdy však rychle zabrání jejich dalším ztrátám. Podobně, použití podmínky regularity (4.161) pro výpočet okrajové rychlosti elektronů ve trojsložkovém modelu hvězdného větru vede k nabíjení hvězdy. Je to způsobeno tím, že při splnění podmínky regularity (4.161) mohou téci hvězdným větrem elektrické proudy. Je však možné usuzovat, že (podobně jako v Milneho případě) výsledný kladný náboj hvězdy zabrání nepoměrným ztrátám elektronů (které by vedly k dalšímu nabíjení se hvězdy). Pak bude na povrchu hvězdy znovu platit podmínka nulovosti celkového náboje.

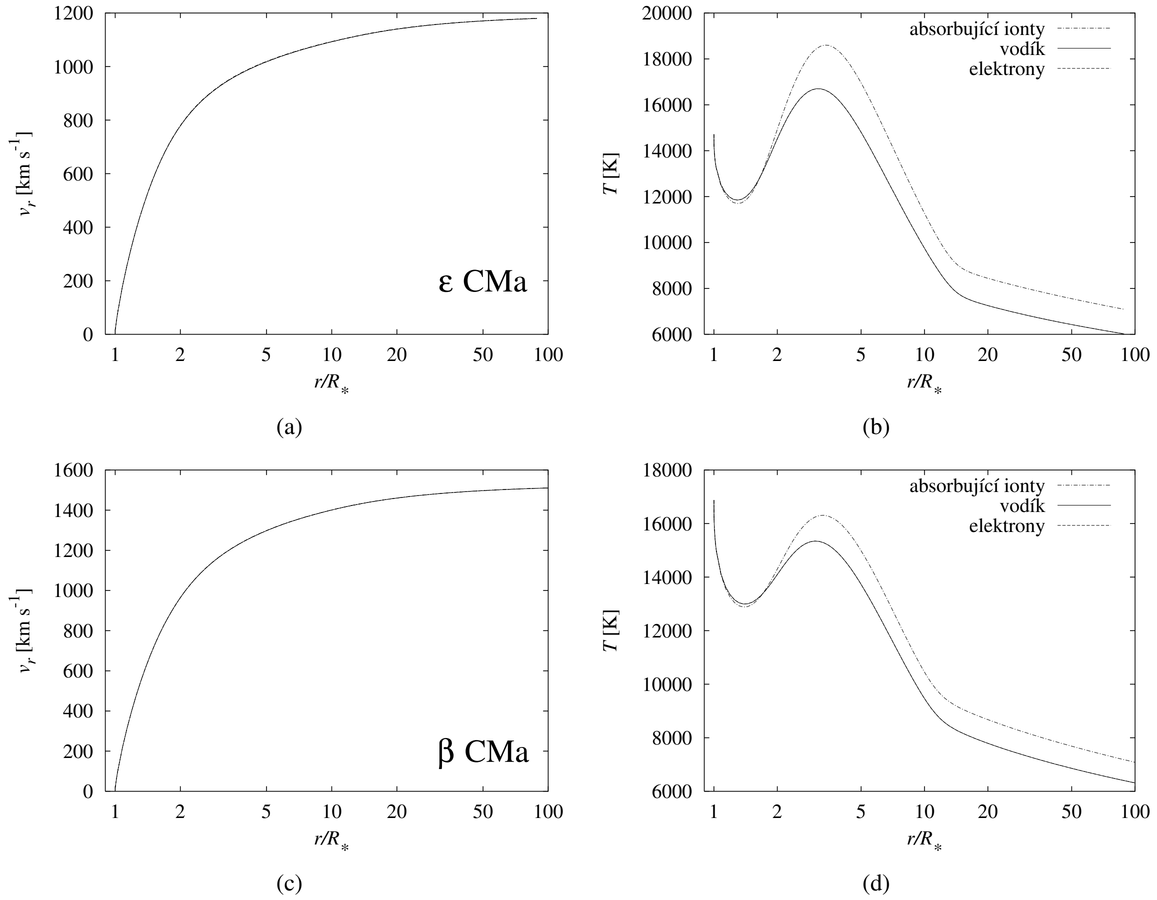
Z teoretického hlediska však není jasné, zda je možné použít podmínky regularity (4.150b,4.161) pro stanovení okrajové rychlosti elektronů. Z hlediska hydrodynamiky jsou tyto podmínky spojeny se šířením zvukových vln. Ve vícesložkovém plynu však již příslušné charakteristické rovnice nemusejí popisovat šíření vln (viz. např. kap. 4.3.3). Aby tedy bylo jasné, zda elektronová podmínka regularity (a tedy také nabíjení se hvězdy prostřednictvím hvězdného větru) má fyzikální smysl, je nutné použít hydrodynamické simulace, nebo alespoň lineární analýzu příslušných hydrodynamických rovnic.

Bylo by jistě velice zajímavé, pokud by se ukázalo, že nabíjení se hvězdy prostřednictvím hvězdného větru je možné. Náboj hvězdy by pak mohl souviset s magnetickým polem horkých hvězd (nemluvě o obecně relativistických důsledcích tohoto jevu pro černé díry).

V ukazovaných modelech hvězdného větru však jev nabíjení se hvězdy prostřednictvím větru možný není, protože se předpokládá platnost podmínky nulovosti celkového proudu na povrchu hvězdy (4.164).

5.8 Ultrafialový exces

Jak ukazují teoretické výpočty toku záření v kontinuu hvězd s horkou obálkou (Vázquez 2000), zvýšená teplota hvězdného větru může ovlivnit jak ultrafialový, tak infračervený exces.



Obrázek 5.10: Trojsložkové modely větrů hvězd ε CMa a β CMa. Průběhy rychlostí jednotlivých složek splývají, zatímco teplota absorbujících iontů je vyšší než teplota vodíku a elektronů. Větry těchto hvězd jsou ohřívané jak prostřednictvím Gayleyho-Owockého ohřevu, tak prostřednictvím tření.

Tabulka 5.4: Parametry spočtených modelů větrů jednotlivých hvězd

Hvězda	Parametry hvězdy				Parametry větru			
	$\mathfrak{M}$	R_*	T_{eff}	z_*	k	α	δ	$\frac{m_\mathrm{i}}{m_\mathrm{p}}$
	$[\mathfrak{M}_\odot]$	$[R_\odot]$	[K]					
ε CMa	15,2	16,2	21 000	0,18	0,135	0,561	0,092	55,8
β CMa	15,5	11,6	23 250	0,39	0,125	0,564	0,099	55,8

Díky šťastné shodě náhod jsou hvězdy ε CMa a β CMa jedny z mála horkých hvězd, u kterých je možné pozorovat spektrum ve vzdálené ultrafialové oblasti. Příčinou je, že obě tyto hvězdy se nacházejí ve směru se sníženou hustotou mezihvězdné látky. U obou těchto hvězd je možné pozorovat nadbytek ultrafialového záření ve srovnání s teoretickými modely (Cassinelli a kol. 1995, 1996). Protože zvýšená teplota větru může také zapříčinit ultrafialový exces, byly spočteny trojsložkové modely větrů těchto hvězd se započtením různých teplot jednotlivých složek (kap. 4.6).

Parametry zmiňovaných hvězd, převzaté z prací Cassinelliho a kol. (1995, 1996) jsou uvedeny v tabulce 5.4. Absorbující ionty byly v tomto případě modelovány atomem železa, který zřejmě nejlépe odpovídá danému spektrálnímu typu (Vink, de Koter a Lamers 2001). Hodnotu chemického složení z_* (bohužel odpovídající atomu uhlíku, protože obsah železa stanoven nebyl) určili Gies & Lambert (1992).

V případě hvězdy ε CMa dochází v modelu větru k ohřevu na teploty dosahující efektivní teploty hvězdy (viz. obr. 5.10(b)). Ohřev nabízí vysvětlení ultrafialového excesu této hvězdy. Alternativní vysvětlení tohoto excesu předložili Aufdenberg a kol. (1998) na základě efektů NLTE a sférické symetrie. Těmto autorům se však nepodařilo získat úplný soulad mezi pozorováním a teoretickými modely. Dostupná určení v_∞ neodpovídají získané teoretické hodnotě (obr. 5.10(a)). Abbott (1978) získal hodnotu $v_\infty = 700\,\mathrm{km\,s^{-1}}$ a LSL změřili $v_\infty = 600\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. Není však zřejmé, zda je tento rozdíl způsoben nedostatky modelů, nebo chybným měřením, protože obě pozorované hodnoty jsou (podle mínění autorů) nejisté.

Podobně také v případě modelu větru hvězdy ε CMa dochází ke zvýšení teploty prostřednictvím ohřevu třením a Gayleyho-Owockého ohřevu (viz. obr. 5.10(d)). Také v případě této hvězdy se nabízí možnost vysvětlení ultrafialového excesu prostřednictvím zvýšené teploty větru. Aufdenberg, Hauschildt a Baron (1999) spočetli pozorovaný exces na základě sféricky symetrických NLTE modelů. Porovnání pozorovaných a teoretických hodnot v_∞ však pro tuto hvězdu není možné, protože v literatuře nejsou žádná měření této veličiny dostupná.

Zajímavé by bylo také přímé srovnání teoretického spektra těchto hvězd s pozorovaným spektrem. Toto porovnání bude možné provézt v okamžiku, kdy bude vyvinut program pro řešení rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí.

Závěr

Hvězdný vítr horkých hvězd je urychlován především absorpcí záření v rezonančních čarách uhlíku, dusíku, železa a dalších prvků. Tyto složky větru však mají podstatně menší hustotu než samotný hvězdný vítr, který je tvořen především atomy vodíku a helia. Mezi jednotlivými složkami proto dochází k přenosu získané hybnosti prostřednictvím Coulombovských srážek mezi nabitými částicemi. Podrobné studium tohoto procesu bylo jedním z cílů této práce.

V první části práce byly shrnuty vztahy vhodné pro modelování vícesložkových hvězdných větrů. Podle knihy Burgerse (1969) byly odvozeny vícesložkové hydrodynamické rovnice. Z Mihalasovy monografie (1978) byly převzaty vztahy pro popis záření. Odvození Sobolevovy aproximace vycházelo z práce Rybicki a Hummer (1978), základy teorie hvězdných větrů byly převzaty především z prací Castora (1970, 1974), Castora, Abbotta a Kleina (1975, CAK) a Abbotta (1980).

V druhé části disertační práce jsou shrnuty původní výsledky, získané ve spolupráci se školitelem. Především jsou popsány modely, které byly použity pro popis zmiňovaného vícesložkového hvězdného větru. V souladu s předchozími teoretickými úvahami (Castor, Abbott a Klein 1976, Springmann a Pauldrach 1992) bylo ukázáno, že relativně hustý hvězdný vítr (typicky hvězdný vítr obrů a veleobrů spektrálního typu O) je možné popsat doposud užívanými jednosložkovými modely. Tyto modely je pak možné využít pro teoretické určení jedné z pozorovaných charakteristik hvězdného větru, konečné rychlosti v_∞. Tento závěr byl potvrzen pro velké množství hvězd spektrálních typů O a B. Byla vyjasněna nesrovnalost mezi teoretickými a pozorovanými hodnotami této veličiny (Lamers, Snow a Lindholm 1995), která je pravděpodobně způsobena nevhodnou aproximací, kterou tito autoři použili.

V disertační práci byl načrtnut nový pohled na zářením urychlované větry s relativně menšími hustotami. Počínaje spektrálním typem O6 hlavní posloupnosti se objevují nové jevy, které nebyly doposud podrobněji studovány. Pro tyto hvězdy se nejprve objevuje nezanedbatelný vliv Gayleyho-Owockého ohřevu a ochlazování na teplotní strukturu větru. Bylo ukázáno, že tento jev má své hluboké kořeny v závislosti zářivé síly na rychlosti prostřednictvím Dopplerova jevu a že člen popisující Gayleyho-Owockého ohřev je možné odvodit přímo z Boltzmannovy kinetické rovnice.

Pro hvězdy s ještě menší hustotou větru (typicky pro hvězdy spektrálního typu B3 hlavní posloupnosti) se vedle Gayleyho-Owockého ohřevu uplatňuje též ohřev větru třením. Aby bylo možné v případě těchto větrů přenášet efektivně hybnost mezi absorbující a neabsorbující složkou větru, je nutné zvýšit rozdíl rychlostí mezi těmito složkami. Tento zvýšený rozdíl mezi rychlostmi složek vyvolává nezanedbatelný ohřev větru třením, v mezních případech až na teploty větší než efektivní teplota hvězdy. Zvýšená teplota větru vede ke snížení zářivé síly a tedy ke snížení jedné z veličin popisujících hvězdný vítr, konečné rychlosti v_∞. Ohřev větru třením je proto možné využít pro vysvětlení pozorované nízké hodnoty konečné rychlosti v_∞ hvězdy τ Sco a zvýšeného ultrafialového excesu hvězd ε CMa a β CMa (Cassinelli a kol. 1995, 1996). Jedním z vhodných kandidátů pro tento model je také hvězda NGC 346–12, u které se pozoruje zvýšená teplota větru (Lanz a kol. 2000). Modelovaný vítr těchto hvězd se navíc vyznačuje rozdílnou teplotou jednotlivých složek. Nejvyšší teplotu mají absorbující ionty, chladnější typicky o 10^3 K jsou neabsorbující ionty a elektrony.

Pokud jsou rozdíly rychlostí složek srovnatelné s tepelnou rychlostí částic, pak již neplatí přímá úměrnost mezi rozdílem rychlostí složek a velikostí třecí síly mezi nimi. Naopak, od jisté velikosti rozdílu rychlostí třecí síla klesá s rostoucím rozdílem rychlostí. To naznačuje možnost dynamického oddělení jednotlivých složek větru. Oproti původním předpokladům (Springmann a Pauldrach 1992) však u mnohých hvězd ke zmiňovanému oddělování nedochází. Ve zjednodušených izotermických modelech je to způsobeno závislostí zářivé síly na gradientu rychlosti. Ve složitějších neizotermických modelech je možnost oddělení vyloučena díky poklesu zářivé síly (způsobeném zvýšeným ohřevem větru) a následným zvýšením hustoty v nadzvukové oblasti větru.

Oddělení absorbující a neabsorbující složky je tak možné pouze v případě, kdy je třecí síla tak malá, že již není schopna vynést neabsorbující složku z blízkosti hvězdy. Rychlost neabsorbující složky je pak menší než rychlost úniková. Tato složka následně buď padá zpět na hvězdu, nebo vytváří oblaka v blízkosti hvězdy. Tato oblaka ve zjednodušeném případě modelovali Porter a Skouza (1999). U některých hvězd, u nichž podle teoretických modelů dochází k popisovanému oddělování, se obálky zřejmě pozorují (Groote a Hunger 1997, Smith a Groote 2001). V každém případě však dochází k prudkému nárůstu teploty větru, až na hodnoty řádově 10^6 K. Při těchto teplotách dochází k nezanedbatelné emisi rentgenovského záření. Tento model je schopen vysvětlit pozorovanou zvýšenou rentgenovskou aktivitu mnohých B hvězd (Berghöfer a Schmitt 1993, Cohen, Cassinelli a Waldron 1997).

Spočtené čtyřsložkové modely, ve kterých bylo navíc započteno helium, však bohužel nedovolují oddělování tohoto prvku ve větrech B hvězd. V žádném z těchto modelů nedochází k rekombinaci heliových atomů tak, jak to ve svých úvahách předpokládali Hunger a Groote (1999). Proto se ve všech spočtených modelech helium pohybuje společně s vodíkem a tedy tyto modely vylučují vysvětlení heliových chemicky pekuliárních hvězd, které Hunger a Groote předložili. Modely jsou však založeny na zjednodušeném popisu ionizační rovnováhy a není vyloučeno, že se zahrnutím přesnějšího výpočtu ionizace helia se tento výsledek změní.

Některé horké hvězdy však zřejmě nemají ani tento hvězdný vítr s oddělením jednotlivých složek (Dworetsky a Budaj 2000). Je proto možné, že u mnohých hvězd spektrálního typu A se vyskytuje čistě kovový hvězdný vítr (Babel 1995, 1996). Tato možnost již nebyla v předkládané práci studována.

Z teoretického hlediska byly studovány možnosti oddělení jednotlivých složek větru, jak z pohledu jejich rozdílných hustot, tak z pohledu odlišných funkcionálních závislostí urychlující síly. Bylo ukázáno, že pokud je hustota absorbující složky podstatně větší než hustota neabsorbující složky, pak je možné dynamické oddělení složek v místě, kde již není tření schopné zprostředkovat dostatečně efektivní přenos hybnosti mezi složkami. Podobně je oddělení možné v případě, kdy je hustota absorbující složky podstatně menší než hustota neabsorbující složky a kdy zářivá síla nezávisí na gradientu rychlosti. Naopak, pokud je zářivá síla rostoucí funkcí gradientu rychlosti (jak je tomu v případě Sobolevovy aproximace ve hvězdných větrech), pak oddělení možné není. Lineární analýza nestabilit však ukázala, že vítr v tomto případě není stabilní.

Mezi hlavní pozorovatelné důsledky vícesložkových modelů patří především zvýšení teploty hvězdného větru a s tím související pokles konečné rychlosti větru. Zvýšená teplota hvězdného větru navíc poskytuje vysvětlení ultrafialového excesu mnohých B hvězd. Oddělování se vodíkové složky v případě větrů s nízkou hustotou je jedním z možných vysvětlení zvýšené rentgenovské emise pozorované u pozdějších B hvězd. Při oddělování pak navíc mohou vznikat obálky v okolí hvězd.

Přestože jsou předkládané modely vícesložkového hvězdného větru již poměrně propracované a jsou schopny popsat základní charakteristiky větrů s relativně malou hustotou, stále v sobě skrývají velké množství zjednodušujících předpokladů. Mnohé z nich bude možné v další práci odstranit. Především zářivá síla je spočtena pouze extrapolací parametrů z literatury, zatímco pro její podrobnější výpočet by bylo vhodné využít přímo atomárních dat. V důsledku toho je popis závislosti zářivé síly na teplotě pouze přibližný. Proto dalším krokem ve vývoji modelů bude výpočet zářivé síly přímo pomocí atomárních dat. Podobně také zahrnutí zářivého ochlazování a ohřevu, ve kterém jsou dosud započteny pouze volně-volné a volně-vázané přechody atomu vodíku by bylo možné zlepšit a zahrnout větší množství přechodů, ovlivňujících tepelnou rovnováhu větrů. Navíc parametry typického absorbujícího iontu nemusí plně odpovídat skutečnosti, bylo by vhodné uvažovat každý prvek jednotlivě. Zajímavá by byla též podrobnější studie třecí síly. Navíc mnohé jevy pozorované ve spektrech B hvězd jsou spojeny s jejich nesymetrickou obálkou, proto by se v dalších modelech neměla vícerozměrná struktura vícesložkových hvězdných větrů opomíjet. Přes všechny tyto nedostatky jsou popisované modely schopny alespoň kvantitativně popsat jevy vyskytující se ve hvězdných větrech s nízkou hustotou a poskytují lákavé možnosti pro další studium.

Dodatky

Dodatek A

Srážkové členy pro případ Coulombovských srážek

A.1 Vztahy pro integraci pravé strany Boltzmannovy rovnice

Při odvozování srážkových členů budu vycházet z knihy Burgerse (1969).

A.1.1 Těžišťová a vzájemná rychlost

Efekt elastické srážky je možné vyjádřit jako změnu směru vektoru relativní rychlosti $\boldsymbol{g}$ bez změny jeho velikosti. Označíme-li celkovou hmotnost srážejících se částic, jejich redukovanou hmotnost a podíl hmotnosti částice typu t a celkové hmotnosti jako

$$m_0 = m_s + m_t, \tag{A.1}$$

$$\mu = \frac{m_s m_t}{m_s + m_t}, \tag{A.2}$$

$$x = \frac{m_t}{m_s + m_t}, \tag{A.3}$$

pak rychlost těžiště obou částic je

$$\boldsymbol{C} = \frac{m_s \boldsymbol{\xi}_s + m_t \boldsymbol{\xi}_t}{m_0}. \tag{A.4}$$

Rychlosti obou částic je možné s pomocí vzájemné rychlosti zapsat jako

$$\boldsymbol{\xi}_s = \boldsymbol{C} - x\boldsymbol{g}, \tag{A.5a}$$

$$\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{C} + (1 - x)\,\boldsymbol{g}. \tag{A.5b}$$

Jak již bylo zmiňováno, během srážky se mění $\boldsymbol{g}$ na $\boldsymbol{g}'$, přičemž platí $g' = g$. Protože se $\boldsymbol{C}$ nemění, je možné obdobně vyjádřit rychlosti obou části po srážce jako

$$\boldsymbol{\xi}'_s = \boldsymbol{C} - x\boldsymbol{g}', \tag{A.6a}$$

$$\boldsymbol{\xi}'_t = \boldsymbol{C} + (1 - x)\,\boldsymbol{g}'. \tag{A.6b}$$

Podobně lze vyjádřit také $\boldsymbol{c}'_s$ a $\boldsymbol{c}'_t$ pomocí $\boldsymbol{C}$ a $\boldsymbol{g}'$.

A.1.2 Výpočet středních hodnot

Při výpočtu srážkových integrálů je nutné integrovat rozdíly $g_h - g'_h$ a $g'_h g'_k - g_h g_k$ přes úhel ϵ_1. Z geometrického hlediska to znamená, že otáčíme vektorem $\boldsymbol{g}'$ kolem vektoru $\boldsymbol{g}$ s tím, že zachováváme neměnný úhel χ mezi oběma vektory. Hledáme tedy střední hodnoty $< g_h - g'_h >$, $< g'_h g'_k - g_h g_k >$ při středování přes úhel ϵ_1.

Tyto hodnoty nejdříve spočteme v souřadné soustavě, ve které osa z má směr vektoru $\boldsymbol{g}$ a poté je převedeme do obecné souřadné soustavy. Pro transformace vektorů a tenzorů druhého řádu platí:

$$x_i = A_{ik}\tilde{x}_k, \tag{A.7a}$$

$$x_{ik} = A_{il}A_{km}\tilde{x}_{lm}, \tag{A.7b}$$

kde veličiny s vlnovkou označují soustavu spojenou s vektorem $\boldsymbol{g}$. Matici přechodu A vyhovující stanoveným podmínkám lze zvolit v obecném tvaru jako

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \frac{g_1}{g} \\ A_{21} & A_{22} & \frac{g_2}{g} \\ A_{31} & A_{32} & \frac{g_3}{g} \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

V této soustavě pro hledané střední hodnoty platí

$$< \tilde{g}_h - \tilde{g}'_h > = g(1 - \cos\chi)\delta_{h3}, \tag{A.9a}$$

$$< \tilde{g}'_h \tilde{g}'_k - \tilde{g}_h \tilde{g}_k > = \begin{cases} -g^2(1-\cos^2\chi), & h = k = 3, \\ \frac{1}{2}g^2(1-\cos^2\chi), & h = k \neq 3, \\ 0, & h \neq k. \end{cases} \tag{A.9b}$$

S využitím transformace souřadnic a vlastností matice přechodu dostáváme hledané střední hodnoty

$$< g_h - g'_h > = g_h\left(1 - \cos\chi\right), \tag{A.10a}$$

$$< g'_h g'_k - g_h g_k > = \frac{1}{2}\left(\delta_{hk}g^2 - 3g_h g_k\right)\left(1 - \cos^2\chi\right). \tag{A.10b}$$

Srážkové členy v rovnici (1.35) budeme vyjadřovat s pomocí účinného průřezu pro konstantní vzájemnou rychlost, který je pro zvolenou hodnotu exponentu l dán výrazem

$$S_{st}^{(l)} = 2\pi \int_0^\infty \left(1 - \cos^l\chi\right) b\,\mathrm{d}b. \tag{A.11}$$

V našem případě využijeme toto označení pouze pro hodnoty $l = 1$ a $l = 2$.

A.1.3 Rozdělovací funkce částic

Integraci přes prostor rychlostí lze výhodně provést se zavedením proměnných

$$\boldsymbol{C}_* = \boldsymbol{C} - \boldsymbol{p} + \beta\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{g}, \tag{A.12a}$$

$$\boldsymbol{g}_* = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{u}, \tag{A.12b}$$

kde $\boldsymbol{p}$ je střední a $\boldsymbol{u}$ vzájemná rychlost dvou složek plynu,

$$\boldsymbol{p} = \frac{m_s\boldsymbol{v}_s + m_t\boldsymbol{v}_t}{m_0}, \tag{A.13a}$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_t - \boldsymbol{v}_s, \tag{A.13b}$$

$$\beta = \frac{m_s m_t}{m_0} \frac{T_t - T_s}{m_t T_s + m_s T_t}. \tag{A.13c}$$

S užitím předchozích vztahů lze tepelné rychlosti obou částic vyjádřit jako

$$c_{sh} = C_{*h} - \psi g_{*h} = C_{*h} + \psi u_h - \psi g_h, \tag{A.14a}$$
$$c_{th} = C_{*h} + (1-\psi)\, g_{*h} = C_{*h} - (1-\psi)\,(u_h - g_h)\,, \tag{A.14b}$$

kde

$$\psi = x - \beta = \frac{m_t T_s}{m_t T_s + m_s T_t}, \tag{A.15a}$$
$$1 - \psi = \frac{m_s T_t}{m_t T_s + m_s T_t}. \tag{A.15b}$$

Vztahy pro c'_{sh} a c'_{th} lze získat z (A.14a,A.14b) záměnou g_h za g'_h.

Pro výpočet srážkových integrálů (1.35) je bohužel nutné znát tvar rozdělovací funkce částic. Bez její znalosti není možné dále pokračovat ve výpočtech. Pro její získání by bylo nutné řešit Boltzmannovu kinetickou rovnici, čímž bychom ale ztratili možnost získat obecnější hydrodynamické rovnice popisující vícesložkový plyn. Je tedy nutné hledat vhodnou aproximaci pro rozdělovací funkci. Za předpokladu, že srážky mezi částicemi stejného druhu jsou natolik efektivní, že dochází k dostatečnému přerozdělování hybnosti a energie mezi jednotlivými částicemi, pak se rozdělovací funkce částic řídí Maxwellovým rozdělením

$$F_s = \frac{N_s}{\pi^{3/2} v_{\mathrm{th},s}^3} \exp\left(-\frac{c_s^2}{v_{\mathrm{th},s}^2}\right). \tag{A.16}$$

Pro součin rozdělovacích funkcí obou srážejících se částic platí

$$F_s F_t = \frac{N_s N_t}{\pi^3 a^3 \alpha^3} \exp\left(-\frac{C_*^2}{a^2} - \frac{g_*^2}{\alpha^2}\right), \tag{A.17}$$

kde pro zjednodušení je použito označení

$$a^2 = \frac{2kT_s T_t}{m_t T_s + m_s T_t}, \tag{A.18a}$$
$$\alpha^2 = \frac{2k\,(m_t T_s + m_s T_t)}{m_s m_t}. \tag{A.18b}$$

Během výpočtu integrálů bude navíc nutné změnit integrační proměnné, jednotlivé součiny diferenciálů je možné s použitím vztahů z této kapitoly transformovat

$$\mathrm{d}\boldsymbol{c}_s \mathrm{d}\boldsymbol{c}_t = \mathrm{d}\boldsymbol{C}\mathrm{d}\boldsymbol{g} = \mathrm{d}\boldsymbol{C}_*\mathrm{d}\boldsymbol{g} = \mathrm{d}\boldsymbol{C}_*\mathrm{d}\boldsymbol{g}_*. \tag{A.19}$$

Pro velikost vektoru $\boldsymbol{g}_*$ pak také platí

$$g_*^2 = g^2 - 2guz + u^2, \tag{A.20}$$

kde z je kosinus úhlu mezi vektory $\boldsymbol{g}$ a $\boldsymbol{u}$.

Při výpočtu využijeme střední hodnoty následujících veličin přes celý prostor $\boldsymbol{C}_*$, vážené faktorem $\exp\left(-\boldsymbol{C}_*^2/a^2\right)$:

$$\int \exp\left(-\frac{\boldsymbol{C}_*^2}{a^2}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{C}_* = \pi^{3/2} a^3, \tag{A.21a}$$
$$\int \boldsymbol{C}_*^2 \exp\left(-\frac{\boldsymbol{C}_*^2}{a^2}\right) \mathrm{d}\boldsymbol{C}_* = \frac{3}{2}\pi^{3/2} a^5. \tag{A.21b}$$

A.2 Debyeovo stínění

Hlavním problémem při výpočtu srážkového členu pro ionizovaný plyn je sama povaha interakce mezi srážejícími se částicemi. Srážky mezi nabitými částicemi jsou určovány Coulombovskou interakcí, která má poměrně daleký dosah. Proto samo zavedení dvojných srážek je poněkud rozporuplné. Zatímco síly, kterými na sebe částice působí, klesají úměrně vzdálenosti částic jako r^{-2}, počet částic v tenké slupce o poloměru r je úměrný r^2. Na první pohled se tedy zdá, že do každé srážky vstupuje nekonečné množství částic. V ionizovaných plynech se vyskytují jak přitažlivé tak odpudivé síly. Pokud je plyn jako celek elektricky neutrální, pak tento jev vede k jakési formě rovnováhy, která s sebou přináší jistou polarizaci látky a která ve své konečné podobě vede k rychlejšímu poklesu sil mezi vzdálenými částicemi. Proto je zahrnutí tohoto jevu velice důležité pro popis srážek mezi nabitými částicemi.

Hlavním problémem při výpočtu srážkového členu je tedy nalezení maximální vzdálenosti na kterou v ionizovaném plynu působí Coulombova síla. Jak ukázal Debye, v okolí každé nabité částice existuje oblast, ve které je větší pravděpodobnost nalezení částice s opačným nábojem, než částice se stejným nábojem. Tento jev je označován jako *jev stínění*, který ve svých důsledcích vede k tomu, že skutečná síla, kterou na sebe částice na velké vzdálenosti působí, je menší než příslušná síla spočtená na základě Coulombova zákona. Výsledné pole je pak popsáno Debyeovou potenciální funkcí

$$\Psi_{st} = \frac{e_s e_t}{r} \exp\left(-\frac{r}{R_D}\right), \tag{A.22}$$

kde R_D je tzv. *Debyeův stínící poloměr*,

$$R_D = \left(4\pi \sum_s \frac{N_s e_s^2}{kT_s}\right)^{-1/2}. \tag{A.23}$$

Zavedení Debyeovy potenciální funkce vyžaduje, aby v okolí nabité částice o poloměru R_D (Debyeova koule) bylo velké množství částic. To tedy znamená, že pro každou částici platí

$$R_D \gg N_s^{-1/3}. \tag{A.24}$$

S využitím definice Debyeova poloměru (A.23) může být tato podmínka přepsána jako

$$4\pi \sum_s \frac{N_s e_s^2}{kT_s} \ll N_S^{2/3}, \tag{A.25}$$

nebo také

$$4\pi \frac{e_s^2}{kT_s} \ll N_s^{-1/3}. \tag{A.26}$$

Zavedeme-li s pomocí efektivní teploty

$$T_{st} = \frac{m_t T_s + m_s T_t}{m_s + m_t} \tag{A.27}$$

střední délku

$$\frac{|e_s e_t|}{3kT_{st}},$$

pak tato délka určuje vzdálenost, na kterou Coulombovské srážky mezi nabitými částicemi vedou k velkému vychýlení trajektorií částic. Z podmínky (A.26) získáváme

$$\frac{|e_s e_t|}{3kT_{st}} \ll N_s^{-1/3}, \qquad \frac{|e_s e_t|}{3kT_{st}} \ll N_t^{-1/3}.$$

Nebo, s využitím podmínky (A.24)

$$\frac{|e_s e_t|}{3kT_{st}} \ll R_D.$$

Tuto podmínku lze zapsat jako

$$\Lambda_{st} = \frac{3kT_{st}}{|e_s e_t|} R_D \gg 1. \tag{A.28}$$

Tato veličina (nebo spíše její logaritmus, tzv. *Coulombův logaritmus*) se bude v dalších výpočtech často objevovat v místech, kde budeme uvažovat jev Debyeovského stínění.

A.3 Srážky v Coulombovském poli

Nejdříve popíšeme srážku nabité částice s jinou nabitou částicí, která není ovlivněna přítomností ostatních částic. S využitím výsledků teoretické mechaniky pro popis pohybu dvou částic pod vlivem centrální síly mezi těmito částicemi získáme následující rovnice pro popis trajektorie jedné částice relativně ke druhé jako

$$\frac{1}{2}\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right) = \text{konst} - E = \frac{1}{2}\mu g^2 - E, \tag{A.29a}$$

$$r^2\dot{\phi} = \text{konst} = bg. \tag{A.29b}$$

V rovnicích značí r vzájemnou vzdálenost částic a ϕ úhel který svírá vektor relativní polohy s pevně zvoleným vektorem v těžišťové souřadné soustavě. Derivace podle času je označena tečkou. První rovnice (A.29a) představuje zákon zachování energie, kde E označuje potenciální energii, relativní rychlost g a redukovaná hmotnost μ byly definovány vztahy (1.36,A.2). Druhá rovnice (A.29b) vyjadřuje zákon zachování momentu hybnosti. Z těchto rovnic je možné získat diferenciální rovnici popisující dráhu

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{b}{r^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2} - \frac{2E}{\mu g^2}\right)^{-1/2}. \tag{A.30}$$

Záporné znaménko bylo vybráno z toho důvodu, že zatímco na počátku ϕ roste s časem, r se zmenšuje. Substitucí

$$v = \frac{b}{r} \tag{A.31}$$

zavedeme v jako novou proměnnou. Pro Coulombovu sílu mezi dvěma nabitými částicemi s náboji e_s, e_t platí

$$E = \frac{e_s e_t}{r} = \frac{e_s e_t v}{b}. \tag{A.32}$$

Pro případ odpudivých sil mezi srážejícími se částicemi je konstanta

$$\beta = \frac{e_s e_t}{\mu g^2 b} \tag{A.33}$$

kladná. Diferenciální rovnici pro dráhu (A.30)

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}v} = \left(1 - 2\beta v - v^2\right)^{-1/2} \tag{A.34}$$

lze jednoduše integrovat jako

$$\phi = \arcsin \frac{v+\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{A.35}$$

Konstanta integrace byla vybrána tak, že pro maximální hodnotu v (která odpovídá bodu nejbližšího přiblížení, ve kterém $v = -\beta + \left(1+\beta^2\right)^{1/2}$) je $\phi = \pi/2$. Protože r se mění od nekonečna přes tuto minimální hodnotu znovu do nekonečna, úhel ϕ se mění v intervalu

$$\left(\arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \pi - \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right).$$

Z toho vyplývá, že celková odchylka je rovna

$$\chi = 2 \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad \cos\chi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}. \tag{A.36}$$

Obdobně pro případ přitažlivých sil mezi částicemi definujeme β jako

$$\beta = \frac{|e_s e_t|}{\mu g^2 b}, \tag{A.37}$$

znovu jako kladnou konstantu. Diferenciální rovnici pro dráhu (A.30) zapíšeme jako

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}v} = \left(1 + 2\beta v - v^2\right)^{-1/2}, \tag{A.38}$$

po integraci

$$\phi = \arcsin \frac{v-\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}. \tag{A.39}$$

Integrační konstanta byla opět zvolena tak, aby v bodě maximálního přiblížení částic ($v = \beta + \left(1+\beta^2\right)^{1/2}$) bylo $\phi = \pi/2$. V tomto případě úhel ϕ prochází interval

$$\left(-\arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \quad \pi + \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}\right).$$

Vidíme, že celková odchylka v případě přitažlivých sil je shodná jako v případě odpudivých sil,

$$\chi = 2 \arcsin \frac{\beta}{\sqrt{1+\beta^2}}, \qquad \cos\chi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}. \tag{A.40}$$

Pokud použijeme tyto výsledky pro výpočet účinných průřezů $S_{st}^{(l)}$, dostaneme podle (A.11) vzorec

$$S_{st}^{(l)} = \frac{2\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4} \int^{\infty} \frac{\mathrm{d}\beta}{\beta^3} \left[1 - \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^l\right]. \tag{A.41}$$

A právě na tomto místě se objevuje již zmiňovaný problém se započtením dalekých srážek. Je zřejmé, že v dolní limitě (pro $\beta \to 0$, neboli $b \to \infty$) integrál diverguje. Jak již ale bylo řečeno, v plazmatu jsou efektivní pouze srážky probíhající uvnitř Debyeovy koule. Zřejmě nejjednodušší způsob odstranění této divergence spočívá v dosazení Debyeovy délky za horní limitu integrálu přes b. Za tohoto předpokladu získáváme

$$S_{st}^{(1)} = \frac{2\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4} \ln \frac{1+\beta_{\min}^2}{\beta_{\min}^2}, \tag{A.42a}$$

$$S_{st}^{(2)} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4} \left(\ln \frac{1+\beta_{\min}^2}{\beta_{\min}^2} - \frac{1}{1+\beta_{\min}^2} \right), \tag{A.42b}$$

kde

$$\beta_{\min} = \frac{|e_s e_t|}{\mu g^2 R_D}. \tag{A.43}$$

Aby bylo možné jednoduše provést případnou další integraci, je vhodné při výpočtu $\beta_{\min}$ použít střední hodnotu $\langle g^2 \rangle = 3kT_{st}/\mu$. Díky tomuto zjednodušení získáváme

$$\beta_{\min} = \frac{|e_s e_t|}{3kT_{st}} \frac{1}{R_D} = \frac{1}{\Lambda_{st}}. \tag{A.44}$$

Protože je $\Lambda_{st} \gg 1$, je $\beta_{\min} \ll 1$ a můžeme zanedbat $\beta_{\min}^2$ vzhledem k 1. Rovnice (A.42a,A.42b) je pak možné upravit na

$$S_{st}^{(1)} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4} \ln \Lambda_{st}, \tag{A.45a}$$

$$S_{st}^{(2)} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4} \left(2 \ln \Lambda_{st} - 1 \right). \tag{A.45b}$$

A.4 Srážky v Debyeově poli

Je zřejmé, že takovýto postup výpočtu, především jistá libovůle při výběru integračních mezí, není dostatečně uspokojivý. Mnohem přesnější by bylo použít přímo Debyeův potenciál (A.22) a na tomto základě spočítat rovnici dráhy. Tento způsob výpočtu je však naopak příliš složitý a nedává výraz vhodný pro další výpočty. Proto je nutné zavést poněkud jednodušší aproximaci Debyeova potenciálu. Budeme předpokládat, že uvnitř Debyeovy koule je elektrický potenciál dán Coulombovským potenciálem, zatímco vně Debyeovy koule má potenciál konstantní hodnotu a tedy mimo tuto kouli žádné síly nepůsobí.

Trajektorie všech částic, pro něž $b \geq R_D$, neprojdou Debyeovou koulí a díky tomu je úhel $\chi = 0$ a také $1 - \cos\chi = 0$. Naopak, částice s $b < R_D$ procházejí Debyeovou koulí a proto dochází k jejich odchýlení z původní dráhy. Pokud mají částice opačný náboj, pak mají pohybové rovnice (A.29a,A.29b) tvar

$$\frac{1}{2}\mu \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) = \frac{1}{2}\mu g^2 + \frac{|e_s e_t|}{r} - \frac{|e_s e_t|}{R_D}, \tag{A.46a}$$

$$r^2 \dot{\phi} = bg = R_D g \sin\theta. \tag{A.46b}$$

V rovnici zachování momentu hybnosti bylo použito $b = R_D \sin\theta$, kde úhel θ se při pohybu nemění. Příslušná diferenciální rovnice, popisující dráhu pak má tvar

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}r} = -\frac{R_D \sin\theta}{r^2} \left[1 - \frac{2|e_s e_t|}{\mu g^2 R_D} + \frac{2|e_s e_t|}{\mu g^2 r} - \frac{R_D^2 \sin^2\theta}{r^2} \right]^{-1/2}. \tag{A.47}$$

Označíme-li

$$v = \frac{R_D}{r}, \tag{A.48a}$$

$$\beta = \frac{|e_s e_t|}{\mu g^2 R_D}, \tag{A.48b}$$

pak rovnici pro dráhu (A.47) lze přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}v} = \sin\theta \left(1 - 2\beta + 2\beta v - v^2 \sin^2\theta\right)^{-1/2}, \tag{A.49}$$

která má integrál

$$\phi = \arcsin \frac{v \sin^2\theta - \beta}{\left[\beta^2 + (1 - 2\beta)\sin^2\theta\right]^{1/2}}. \tag{A.50}$$

Podobně jako v předešlých případech byla integrační konstanta vybrána tak, že v nabývá svou maximální hodnotu $v = \sin^{-2}\theta \left\{\beta + \left[\beta^2 + \sin^2\theta\,(1 - 2\beta)\right]\right\}$ (tedy r nabývá svou minimální hodnotu) pro $\phi = \pi/2$. Úhel ϕ se mění od hodnoty ϕ_1 odpovídající bodu $r = R_D$, $v = 1$, přes $\pi/2$ do $\pi - \phi_1$, kde

$$\sin\phi_1 = \frac{\sin^2\theta - \beta}{\left[\beta^2 + (1 - 2\beta)\sin^2\theta\right]^{1/2}}. \tag{A.51}$$

Z geometrických úvah pro Debyeovu sféru a trajektorii pohybu plyne vztah pro úhel vychýlení χ

$$\chi = 2\,(\theta - \phi_1) \tag{A.52}$$

a po jistých úpravách podle vzorců pro počítání s goniometrickými funkcemi (přitom je vhodné si uvědomit, že úhel θ se mění mezi 0 a $\pi/2$) získáme

$$\cos\chi = \frac{(1 - \beta)^2 \sin^2\theta - \beta^2\cos^2\theta}{(1 - \beta)^2 \sin^2\theta + \beta^2\cos^2\theta}. \tag{A.53}$$

Pro výpočty je nutné spočítat $1 - \cos\chi$, který má hodnotu

$$1 - \cos\chi = \frac{2\left(R_D^2 - b^2\right)\beta^2}{\beta^2 R_D^2 + (1 - 2\beta)\,\beta^2}. \tag{A.54}$$

I v tomto případě platí, že pro částice se stejným nábojem bychom získali tutéž hodnotu. Dosazením do vztahu (A.11) pro první dva účinné průřezy

$$S_{st}^{(1)} = \frac{2\pi\beta^2 R_D^2}{1 - 2\beta}\left\{\frac{(1 - \beta)^2}{1 - 2\beta}\ln\frac{(1 - \beta)^2}{\beta^2} - 1\right\}, \tag{A.55a}$$

$$S_{st}^{(2)} = \frac{4\pi\beta^2 (1 - \beta)^2 R_D^2}{(1 - 2\beta)^2}\left\{\frac{1 - 2\beta + 2\beta^2}{1 - 2\beta}\, ln\frac{(1 - \beta)^2}{\beta^2} - 2\right\}. \tag{A.55b}$$

Tyto vztahy jsou však stále ještě příliš komplikované pro následnou integraci, proto je nutné je dále zjednodušit. Ve výpočtech se vyskytuje relativní rychlost g v poměrně vysoké mocnině, proto jsou důležité malé hodnoty β. Proto s užitím označení pro β podle rovnice (A.48b) je

$$S_{st}^{(1)} \approx \frac{2\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4}\left(\ln\frac{\mu^2 R_D^2 g^4}{e_s^2 e_t^2} - 1\right), \tag{A.56a}$$

$$S_{st}^{(2)} \approx \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4}\left(\ln\frac{\mu^2 R_D^2 g^4}{e_s^2 e_t^2} - 2\right). \tag{A.56b}$$

Pokud v logaritmech opět použijeme střední hodnotu $\langle g^2 \rangle = 3kT_{st}/\mu$, pak platí

$$\ln\frac{\mu^2 R_D^2 g^4}{e_s^2 e_t^2} = 2\ln\Lambda_{st},$$

kde argument Coulombova logaritmu je definován s pomocí vzorce (A.28). Získáme tedy aproximaci

$$S_{st}^{(1)} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4}\left(\ln\Lambda_{st} - \frac{1}{2}\right), \tag{A.57a}$$

$$S_{st}^{(2)} = \frac{8\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4}\left(\ln\Lambda_{st} - 1\right). \tag{A.57b}$$

Porovnáme-li tyto vztahy s méně přesnými vzorci (A.45a,A.45b) získanými v předešlé kapitole, vidíme, že se jen mírně liší faktorem, kterým jsou vynásobeny zlomky $4\pi e_s^2 e_t^2/\mu^2 g^4$. Vidíme, že obecně pomocí odlišných postupů výpočtů získáváme vzorce

$$S_{st}^{(1)} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2 g^4}\ln\Lambda \tag{A.58a}$$

$$S_{st}^{(2)} = z'' S_{st}^{(1)}, \tag{A.58b}$$

kde $\ln\Lambda$, z'' jsou vhodně zvolené konstanty (přičemž $z'' \approx 2$). Různé výpočty účinných průřezů vedou na výsledky typu (A.58a,A.58b), přičemž hodnoty $\ln\Lambda$ se mírně liší. Uvádí se, že teorie Coulombovských srážek nebyla dosud plně dopracována a proto je možné v literatuře nalézt různé typy aproximací Coulombova logaritmu $\ln\Lambda$ a to jak z teoretických výpočtů, tak jako výsledek experimentů. Tyto vztahy se však nijak významně neliší. V této práci je použit vztah

$$\ln\Lambda = \ln\left[\frac{3kT}{e^2}\left(\frac{kT}{4\pi N e^2}\right)^{1/2}\right], \tag{A.59}$$

kde $N = \sum_s N_s$.

A.5 Fokkerova-Planckova rovnice

Fokkerova-Planckova aproximace je založena na předpokladu, že většina srážek vede pouze k malým změnám rychlosti dané testovací částice a že by mělo být možné sečíst všechny tyto malé změny a vyjádřit jejich efekt na distribuční funkci rychlostí.

Pro slabé srážky funkce F_s' a F_t' vyskytující se v integrálu (1.35) mohou být vyjádřeny pomocí prvních dvou členů Taylorova rozvoje funkcí F_s a F_t. Pomocí (A.5,A.6) je možné zapsat rychlosti částic po srážce jako

$$\xi_{sh}' = \xi_{sh} - x\left(g_h' - g_h\right), \tag{A.60a}$$

$$\xi_{th}' = \xi_{th} + (1-x)\left(g_h' - g_h\right). \tag{A.60b}$$

Zmiňovaný Taylorův rozvoj dává

$$F_s' = F_s - \frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}} x\left(g_h' - g_h\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_s}{\partial \xi_{sh}\partial \xi_{sk}} x^2\left(g_h' - g_h\right)\left(g_k' - g_k\right) \tag{A.61}$$

a podobně také pro F_t'. Za těchto předpokladů má rozdíl $F_s'F_t' - F_sF_t$, vyskytující se ve srážkovém členu (1.35), tvar

$$F_s'F_t' - F_sF_t = P_h\left(g_h' - g_h\right) + Q_{hk}\left(g_h' - g_h\right)\left(g_k' - g_k\right), \tag{A.62}$$

ve kterém jsme se omezili pouze na členy druhého řádu v rozdílu rychlostí. Přitom jako P_h a Q_{hk} bylo označeno

$$P_h = -xF_t\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}} + (1-x)\,F_s\frac{\partial F_t}{\partial \xi_{th}}, \tag{A.63a}$$

$$Q_{hk} = \frac{1}{2}x^2F_t\frac{\partial^2 F_s}{\partial \xi_{sh}\partial \xi_{sk}} - x\,(1-x)\,\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}}\frac{\partial F_t}{\partial \xi_{tk}} + \frac{1}{2}(1-x)^2\,F_s\frac{\partial^2 F_t}{\partial \xi_{th}\partial \xi_{tk}}. \tag{A.63b}$$

Dosadíme-li tyto výsledky do rovnice (1.35) zjistíme, že je nutné spočítat následující dva integrály,

$$(A) = \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t P_h\left(g_h' - g_h\right)\, gb\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\epsilon_1, \tag{A.64a}$$

$$(B) = \iiint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t Q_{hk}\left(g_h' - g_h\right)\left(g_k' - g_k\right)\, gb\,\mathrm{d}b\,\mathrm{d}\epsilon_1. \tag{A.64b}$$

S užitím výpočtu střední hodnoty (A.10a) lze pro první z integrálů napsat

$$\begin{aligned}(A) &= -2\pi\iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t P_h g_h g\,(1-\cos\chi)\; b\,\mathrm{d}b = -\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t P_h g_h g S^{(1)} = \\ &= x\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t g_h g S^{(1)} - (1-x)\,F_s\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t\frac{\partial F_t}{\partial \xi_{th}} g_h g S^{(1)} = \\ &= x\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t g_h g S^{(1)} - (1-x)\,F_s\frac{\partial}{\partial \xi_{sh}}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t g_h g S^{(1)},\end{aligned}$$

kde při transformaci posledního z členů byla použita integrace per-partes a následná úprava, založená na vztahu

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{th}}\left(g_h g S^{(1)}\right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_{sh}}\left(g_h g S^{(1)}\right).$$

Účinný průřez pro konstantní vzájemnou rychlost $S^{(1)}$ je zaveden ve vzorci (A.11). S označením

$$\hat{a}_h = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t g_h g S^{(1)} \tag{A.65}$$

lze pro první z integrálů napsat vzorec

$$(A) = x\frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}}\hat{a}_h - (1-x)\,F_s\frac{\partial \hat{a}_h}{\partial \xi_{sh}}. \tag{A.66}$$

Podobně pro druhý integrál s užitím výpočtu střední hodnoty podle (A.10a) platí

$$(B) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t Q_{hk}\left[2g_h g_k g S^{(1)} + \frac{1}{2}\left(\delta_{hk}g^2 - 3g_h g_k\right) g S^{(2)}\right].$$

Zavedeme-li veličiny

$$\hat{a}_{hk} = \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t g_h g_k g S^{(1)}, \tag{A.67a}$$

$$\hat{b}_{hk} = \frac{1}{4}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t\left(\delta_{hk}g^2 - 3g_h g_k\right) g S^{(2)}, \tag{A.67b}$$

pak po substituci do vztahu pro Q_{hk} získáme pro druhý z integrálů vztah

$$(B) = x^2 \frac{\partial^2 F_s}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) - 2x\,(1-x)\, \frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}} \frac{\partial}{\partial \xi_{sk}} \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) + \\ + (1-x)^2\, F_s \frac{\partial^2}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right). \quad \text{(A.68)}$$

Spojením obou výsledků má srážkový člen tvar (pro jednu částici t)

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left[F_s \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) \right] + x \frac{\partial F_s}{\partial \xi_{sh}} \left[\hat{a}_h - 2 \frac{\partial}{\partial \xi_{sk}} \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) \right] - \\ - F_s \left[(1-x)\, \frac{\partial \hat{a}_h}{\partial \xi_{sh}} - (1-2x)\, \frac{\partial^2}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) \right]. \quad \text{(A.69)}$$

Veličiny $\hat{a}_h$, $\hat{a}_{hk}$ a $\hat{b}_{hk}$ závisí na zvolených účinných průřezech. Pokud pro jejich výpočet použijeme výsledky získané v dodatcích — rovnice (A.58a,A.58b), pak po dosazení do příslušných definic (A.65,A.67a,A.67b) získáme vztahy

$$\hat{a}_h = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2} \ln \Lambda \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t \frac{g_h}{g^3}, \quad \text{(A.70a)}$$

$$\hat{a}_{hk} = \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2} \ln \Lambda \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t \frac{g_h g_k}{g^3}, \quad \text{(A.70b)}$$

$$\hat{b}_{hk} = \frac{z''}{4} \delta_{hk} \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu^2} \ln \Lambda \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_t \frac{1}{g} - \frac{3z''}{4} \hat{a}_{hk}. \quad \text{(A.70c)}$$

Díky tomu, že z definice relativní rychlosti (1.36) platí

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{sk}} g_h = \frac{\partial}{\partial \xi_{sk}} \left(\xi_{th} - \xi_{sh} \right) = -\delta_{hk},$$

je možné získat jednoduché vztahy mezi veličinami $\hat{a}_{hk}$ a $\hat{b}_{hk}$ na jedné straně a veličinou $\hat{a}_h$ na druhé straně ve tvaru

$$\frac{\partial \hat{a}_{hk}}{\partial \xi_{sk}} = -\hat{a}_h, \quad \text{(A.71a)}$$

$$\frac{\partial \hat{b}_{hk}}{\partial \xi_{sk}} = z'' \hat{a}_h. \quad \text{(A.71b)}$$

Za předpokladu $z'' = 2$ (viz. dodatek A.4) lze výraz pro srážkový člen (A.69) s využitím výše uvedených vztahů zjednodušit na

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left[F_s \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right) \right] - x \frac{\partial}{\partial \xi_{sh}} \left(F_s \hat{a}_h \right). \quad \text{(A.72)}$$

Označíme-li

$$a_h = x \hat{a}_h, \quad \text{(A.73a)}$$

$$b_{hk} = 2x^2 \left(\hat{a}_{hk} + \hat{b}_{hk} \right), \quad \text{(A.73b)}$$

pak výsledná Boltzmannova rovnice s nově získaným srážkovým členem má tvar

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_h} \left(\xi_{sh} F_s \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_{sh}} \left(\frac{f_{sh}}{m_s} F_s \right) = -\frac{\partial}{\partial \xi_{sh}} \left(F_s a_h \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \xi_{sh} \partial \xi_{sk}} \left(F_s b_{hk} \right), \quad \text{(A.74)}$$

což je tzv. *Fokkerova-Planckova rovnice*.

A.6 Momentové rovnice vyplývající z Fokkerovy-Planckovy rovnice

Nyní přistoupíme k poslednímu kroku při výpočtu momentových rovnic se srážkovým členem popisujícím srážky nabitých částic. Podobným způsobem jako byla v kapitole 1.1.3 integrována Boltzmannova rovnice budeme nyní integrovat též srážkový člen ve Fokkerově-Planckově rovnici (A.74). Pro tento výpočet využijeme následující násobitele:

$$Q_1 = m_s, \tag{A.75a}$$

$$Q_2 = m_s c_{sh}, \tag{A.75b}$$

$$Q_3 = \frac{1}{2} m_s c_s^2. \tag{A.75c}$$

A.6.1 Srážkový člen v rovnici kontinuity

Pro případ prvního z násobitelů je možné při integraci srážkového členu v rovnici (A.74) přes prostor rychlostí s částic přejít na integrál přes hranice, který je nulový. Protože rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmoty a při Coulombovských srážkách žádné částice nevznikají ani nezanikají, zůstává rovnice kontinuity (1.16) se zavedením Fokkerova-Planckova srážkového členu nezměněna.

A.6.2 Srážkový člen v pohybové rovnici

Integrací Fokkerovy-Planckovy rovnice vynásobené faktorem Q_2 přes prostor rychlostí s částic získáme (s užitím výsledku integrace pravé strany (1.30))

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} v_{sh} + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - \frac{\rho_s}{m_s} f_{sh} = m_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s F_s a_h - \frac{1}{2} m_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \frac{\partial}{\partial \xi_{sl}} \left(F_s b_{hl}\right), \tag{A.76}$$

kde bylo při úpravě obou členů použito integrace per-partes. Druhý člen na pravé straně opět vypadává a s užitím (A.70a,A.73a) je možné napsat

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t} v_{sh} + \frac{\partial p_s}{\partial x_h} - \frac{\rho_s}{m_s} f_{sh} = \sum_t \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu} \ln \Lambda \iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_s F_t \frac{g_h}{g^3}, \tag{A.77}$$

kde bylo obnoveno sčítání přes různé typy částic. Pro oba druhy částic zvolíme Maxwellovské rozložení rychlostí (A.16). V integrálu na pravé straně rovnice (A.77) přejdeme k proměnným $\boldsymbol{g}_*$ a $\boldsymbol{C}_*$ podle vzorce (A.19) a využijeme zápisu součinu dvou Maxwellovských rozdělovacích funkcí (A.17). Integrál pak přechází na tvar

$$\begin{aligned} \iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_s F_t \frac{g_h}{g^3} &= \frac{N_s N_t}{\pi^3 v_{\mathrm{th},s}^3 v_{\mathrm{th},t}^3} \iint \mathrm{d}\boldsymbol{C}_* \mathrm{d}\boldsymbol{g}_* \exp\left(-\frac{C_*^2}{a^2} - \frac{g_*^2}{\alpha^2}\right) \frac{g_h}{g^3} = \\ &= \frac{2\pi N_s N_t}{\pi^{3/2} \alpha^3} \int_0^\infty \mathrm{d}g \int_{-1}^1 \mathrm{d}z \exp\left[\frac{-\left(g^2 - 2guz + u^2\right)}{\alpha^2}\right] z \frac{u_z}{u}. \end{aligned} \tag{A.78}$$

Přitom jsme navíc využili vztahy (A.20,A.21a). Výsledný dvojný integrál lze spočítat například následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \mathrm{d}z\, z \int_0^\infty \mathrm{d}g \exp\left[\frac{-\left(g^2 - 2guz + u^2\right)}{\alpha^2}\right] = \\ &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}z\, z \exp\left[\frac{u^2}{\alpha^2}\left(z^2 - 1\right)\right] \int_0^\infty \mathrm{d}g \exp\left[\frac{-\left(g - uz\right)^2}{\alpha^2}\right] = \end{aligned}$$

$$= \alpha \int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, z \exp\left[\frac{u^2}{\alpha^2}\left(z^2-1\right)\right]\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{uz}}{\alpha}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right] =$$
$$= \alpha\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}z\, z \exp\left[\frac{u^2}{\alpha^2}\left(z^2-1\right)\right]\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{uz}}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{u}\left[\frac{\alpha^3}{\mathrm{u}^3}\mathrm{erf}\frac{\mathrm{u}}{\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\alpha^2}{\mathrm{u}^2}\exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2}\right)\right].$$

Dosazením do pohybové rovnice (A.77) získáme výslednou pohybovou rovnici, ve které jsou započteny srážky mezi nabitými částicemi

$$\rho_s\frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}v_{sh}+\frac{\partial p_s}{\partial x_h}-\frac{\rho_s}{m_s}f_{sh}=\sum_t\frac{4\pi N_sN_te_s^2e_t^2}{\mu\alpha^3}\ln\Lambda\, u_h\left[\frac{\alpha^3}{u^3}\mathrm{erf}\frac{\mathrm{u}}{\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\alpha^2}{\mathrm{u}^2}\exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \quad (A.79)$$

Protože pohybovou rovnici je možné chápat také jako rovnici kontinuity hybnosti, vyjadřuje srážkový člen přenos hybnosti mezi jednotlivými složkami. Tomu odpovídá i znaménko tohoto členu. Pokud je rychlost částice t větší než rychlost částice s je člen v rovnici kladný, tedy hybnost se přenáší od částice rychlejší k částici pomalejší.

A.6.3 Srážkový člen v energiové rovnici

Obdobným způsobem získáme též energiovou rovnici. Integrací Fokkerovy-Planckovy rovnice vynásobené faktorem Q_3 přes prostor rychlostí s částic získáme na pravé straně člen

$$\frac{m_s}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s c_s^2\left[-\frac{\partial}{\partial\xi_{sh}}\left(F_sa_h\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi_{sh}\partial\xi_{sk}}\left(F_sb_{hk}\right)\right], \quad (A.80)$$

který musíme integrovat. Nejprve se budeme věnovat druhému členu, jehož výpočet je do jisté míry jednodušší. Využijeme dvojnásobnou integraci per-partes a získáme

$$\frac{m_s}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_sF_sb_{hh},$$

kde je nutné spočítat pouze b_{hh}. Z definice (A.67b) a vztahů (A.70b,A.70c) pak získáme (s užitím Einsteinovy sumační symboliky)

$$b_{hh}=2x^2\left(\hat{a}_{hk}+\hat{b}_{hk}\right)=\sum_t\frac{4\pi e_s^2e_t^2}{m_s^2}\ln\Lambda\int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_tF_t\frac{2}{g}. \quad (A.81)$$

Vynecháme-li člen před integrálem, počítáme

$$2\iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t\frac{F_sF_t}{g}=\frac{4\pi N_sN_t}{\pi^{3/2}\alpha^3}\int_0^\infty \mathrm{d}g\, g\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\exp\left[\frac{-\left(g^2-2guz+u^2\right)}{\alpha^2}\right]. \quad (A.82)$$

Provedeme naznačenou integraci

$$\int_0^\infty \mathrm{d}g\, g\int_{-1}^{1}\mathrm{d}z\exp\left[\frac{-\left(g^2-2guz+u^2\right)}{\alpha^2}\right]=$$
$$=\frac{\alpha^2}{2u}\int_0^\infty \mathrm{d}g\exp\left[\frac{-\left(g^2+u^2\right)}{\alpha^2}\right]\left[\exp\left(\frac{2gu}{\alpha^2}\right)-\exp\left(-\frac{2gu}{\alpha^2}\right)\right]=\frac{\sqrt{\pi}\alpha^3}{2u}\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{u}}{\alpha}\right).$$

Celkový příspěvek tohoto členu do energiové rovnice je

$$\sum_t\frac{4\pi N_sN_te_s^2e_t^2}{\mu}\ln\Lambda\frac{m_t}{m_0}\frac{1}{u}\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{u}}{\alpha}\right). \quad (A.83)$$

Při výpočtu prvního členu využijeme již spočtené integrály. Po integraci per-partes lze přepsat jako

$$m_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s F_s a_h c_{sh}. \tag{A.84}$$

Dosadíme-li do tohoto výrazu vztahy (A.70a,A.73a) pro a_h, získáme

$$m_s \int \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s F_s a_h c_s = \sum_t \frac{4\pi e_s^2 e_t^2}{\mu} \ln\Lambda \iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_s F_t \frac{g_h}{g^3} c_{sh}. \tag{A.85}$$

Integrál, který je nutné spočítat, je možné zapsat s využitím stejných vztahů jako v minulém odstavci,

$$\iint \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_s \mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_t F_s F_t \frac{g_h}{g^3} c_{sh} = \frac{N_s N_t}{\pi^3 v_{\mathrm{th},s}^3 v_{\mathrm{th},t}^3} \iint \mathrm{d}\boldsymbol{C}_* \mathrm{d}\boldsymbol{g}_* \left(C_{*h} + \psi u_h - \psi g_h\right) \exp\left(-\frac{C_*^2}{a^2} - \frac{g_*^2}{\alpha^2}\right) \frac{g_h}{g^3}, \tag{A.86}$$

kde jsme příslušnou složku tepelné rychlosti c_{sh} vyjádřili pomocí vztahu (A.14a). Vidíme, že první člen se rozpadá na součet tří výrazů. První z nich je při integraci přes $\boldsymbol{C}_*$ nulový, protože integrujeme lichou funkci přes celý prostor. Z druhého je možné faktor ψu_h vytknout a vidíme, že zbylý integrál byl již vypočten pro rovnici (A.78). Při výpočtu posledního z integrálů využijeme sčítání přes index h a získáme integrál (A.82). Celkový příspěvek prvního z členů (A.80) pak tedy je

$$\sum_t -\frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu} \ln\Lambda \psi \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{\alpha^2}\right). \tag{A.87}$$

Celkový příspěvek srážkového členu v energiové rovnici dostaneme sečtením jednotlivých příspěvků (A.83) a (A.87),

$$\sum_t \frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu} \ln\Lambda \left[\frac{m_t}{m_0}\frac{1}{u}\mathrm{erf}\left(\frac{\mathrm{u}}{\alpha}\right) - \psi\frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{A.88}$$

Protože s využitím vzorců (A.3,A.13c,A.15a,A.18b) platí

$$\psi = x - \beta = \frac{m_t}{m_0} - \frac{m_s m_t}{m_0}\frac{T_t - T_s}{m_t T_s + m_s T_t} = \frac{m_t}{m_0} - \frac{2k\left(T_t - T_s\right)}{m_0 \alpha^2}, \tag{A.89}$$

může být vztah (A.88) přepsán ve fyzikálně průhlednějším tvaru

$$\sum_t \frac{16\sqrt{\pi} N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu\alpha^3} \ln\Lambda \frac{k\left(T_t - T_s\right)}{m_0} \exp\left(-\frac{u^2}{\alpha^2}\right) + \\ + \sum_t \frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu\alpha} \ln\Lambda \frac{m_t}{m_0}\left[\frac{\alpha}{u}\mathrm{erf}\frac{\mathrm{u}}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{A.90}$$

Než napíšeme výslednou energiovou rovnici, zastavíme se nejdříve u jednotlivých příspěvků srážkového členu. První člen v rovnici (A.90) je nulový v případě, že teploty obou složek jsou shodné ($T_t = T_s$), vyjadřuje přenos tepla mezi jednotlivými složkami. Druhý člen je nulový pokud je vzájemná rychlost složek $\boldsymbol{u}$ nulová. Navíc tento člen závisí na druhé mocnině rychlosti u a je vždy kladný. Z makroskopického hlediska vyjadřuje ohřev látky třením.

Spojením s rovnicí (1.34) získáme energiovou rovnici pro složku s se započtením Coulombovských srážek mezi jednotlivými složkami ve tvaru

$$\rho_s \frac{\mathrm{D}_s}{\mathrm{D}t}\left(\frac{3}{2}\frac{p_s}{\rho_s}\right) + p_s \frac{\partial v_{sh}}{\partial x_h} = \sum_t \frac{16\sqrt{\pi} N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu\alpha^3} \ln\Lambda \frac{k\left(T_t - T_s\right)}{m_0} \exp\left(-\frac{u^2}{\alpha^2}\right) + \\ + \sum_t \frac{4\pi N_s N_t e_s^2 e_t^2}{\mu\alpha} \ln\Lambda \frac{m_t}{m_0}\left[\frac{\alpha}{u}\mathrm{erf}\frac{\mathrm{u}}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{\mathrm{u}^2}{\alpha^2}\right)\right]. \tag{A.91}$$

Dodatek B

Diferenciované rovnice a členy Jacobiánu pro případ 1D větru

B.1 Jednosložkový vítr

B.1.1 Diskretizace rovnic

Systém diferenciálních rovnic (4.16) popisujících jednosložkový izotermický hvězdný vítr je možné v jednotlivých uzlových bodech aproximovat pomocí následujícího systému algebraických rovnic, zapsaných pro $1 < i < \mathrm{NR}$:

$$P_{2i-1} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 \rho v_r\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.1a}$$

$$P_{2i} = v_{ri}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_i^2}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{G\mathfrak{M}}{r_i^2}\left(1 - \mathit{\Gamma}\right) - x_\alpha \left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^\alpha. \tag{B.1b}$$

Tyto rovnice je navíc nutné doplnit okrajovými podmínkami

$$P_1 = \rho_1 - \rho_0, \tag{B.2a}$$

$$P_2 = v_{r1} - a \tag{B.2b}$$

a rovnicemi pro poslední bod sítě, $i = \mathrm{NR}$,

$$P_{2i-1} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 \rho v_r\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.3a}$$

$$P_{2i} = \frac{v_{ri} - v_{ri-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{ri-1} - v_{ri-2}}{\Delta r_{i-1}}. \tag{B.3b}$$

Za předpokladu úplné ionizace atomů vodíku je možné koncentraci elektronů vyjádřit jako $N_\mathrm{e} = \rho / m_\mathrm{p}$, tedy konstanta x_α je dána vzorcem (viz. 4.17)

$$x_\alpha = \frac{\sigma_\mathrm{e} L}{4\pi r_i^2 c}\left(\frac{1}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\frac{\rho_i}{m_\mathrm{p} W}\right)^\delta \frac{\left(1+\sigma_i\right)^{\alpha+1} - \left(1 + \sigma_i \mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma_i\left(1+\sigma_i\right)^\alpha} k\left(\sigma_\mathrm{e} v_\mathrm{th}\right)^{-\alpha}, \tag{B.4}$$

Proměnná σ_i a úhel μ_c jsou zavedeny jako

$$\sigma_i = \left[\frac{\mathrm{d}v_{ri}}{\mathrm{d}r}\right]_i \frac{r_i}{v_{ri}} - 1, \tag{B.5}$$

$$\mu_c = \sqrt{1 - \left(\frac{R_*}{r_i}\right)^2}. \tag{B.6}$$

B.1.2 Členy Jacobiánu

Jednotlivé členy Jacobiánu lze získat derivací rovnic (B.1) podle příslušných proměnných (viz. 4.9). Pro $i = 1$ má Jacobián jednoduchý tvar, v ostatních případech jsou jednotlivé nenulové členy Jacobiánu dány následujícími vzorci.

Členy pro běžný uzlový bod modelu $1 < i < \mathrm{NR}$

$$J_{2i-1,2i-3} = -(1-y_i)\frac{r_{i-1}^2 v_{r\,i-1}}{r_i^2 \Delta r_i} \tag{B.7a}$$

$$J_{2i-1,2i-2} = -(1-y_i)\frac{r_{i-1}^2 \rho_{i-1}}{r_i^2 \Delta r_i} \tag{B.7b}$$

$$J_{2i-1,2i-1} = v_{r\,i}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) \tag{B.7c}$$

$$J_{2i-1,2i} = \rho_i\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) \tag{B.7d}$$

$$J_{2i-1,2i+1} = y_i\frac{r_{i+1}^2 v_{r\,i+1}}{r_i^2 \Delta r_{i+1}} \tag{B.7e}$$

$$J_{2i-1,2i+2} = y_i\frac{r_{i+1}^2 \rho_{i+1}}{r_i^2 \Delta r_{i+1}} \tag{B.7f}$$

$$J_{2i,2i-3} = -\frac{a^2(1-y_i)}{\rho_i r_i^2 \Delta r_i} \tag{B.7g}$$

$$J_{2i,2i-2} = \frac{x_\alpha \alpha(1-y_i)}{\rho_i \Delta r_i}\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} + x_\alpha x_{\mathrm{d}\sigma}\frac{r_i}{\Delta r_i}\frac{1-y_i}{v_{r\,i}}\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} - \frac{v_{r\,i}(1-y_i)}{\Delta r_i} \tag{B.7h}$$

$$J_{2i,2i-1} = -\frac{a^2}{\rho_i^2}\left(y_i\frac{\rho_{i+1}}{\Delta r_{i+1}} - (1-y_i)\frac{\rho_{i-1}}{\Delta r_i}\right) + \frac{(\alpha-\delta)\,x_\alpha}{\rho_i}\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.7i}$$

$$\begin{aligned}J_{2i,2i} = {}& y_i\frac{v_{r\,i+1}-2v_{r\,i}}{\Delta r_{i+1}} + (1-y_i)\frac{2v_{r\,i}-v_{r\,i-1}}{\Delta r_i} - \\ & - \frac{\alpha x_\alpha}{\rho_i}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} - \\ & - x_\alpha x_{\mathrm{d}\sigma}\frac{r_i}{v_{r\,i}^2}\left(\frac{y_i v_{r\,i+1}}{\Delta r_{i+1}} - \frac{(1-y_i)v_{r\,i-1}}{\Delta r_i}\right)\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha}\end{aligned} \tag{B.7j}$$

$$J_{2i,2i+1} = \frac{a^2 y_i}{\rho_i \Delta r_{i+1}} \tag{B.7k}$$

$$J_{2i,2i+2} = \frac{v_{r\,i} y_i}{\Delta r_{i+1}} - \frac{\alpha x_\alpha y_i}{\rho_i \Delta r_{i+1}}\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} - x_\alpha x_{\mathrm{d}\sigma}\frac{r_i}{\Delta r_{i+1}}\frac{y_i}{v_{r\,i}}\left(\frac{1}{\rho_i}\left[\frac{\mathrm{d}v_r}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.7l}$$

Členy pro vnější okraj sítě $i = \mathrm{NR}$

$$J_{2i-1,2i-3} = -\frac{r_{i-1}^2 v_{r\,i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.8a}$$

$$J_{2i-1,2i-2} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.8b}$$

$$J_{2i-1,2i-1} = \frac{r_i^2 v_{r\,i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.8c}$$

$$J_{2i-1,2i} = \frac{r_i^2 \rho_i}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.8d}$$

$$J_{2i,2i-4} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.8e}$$

$$J_{2i,2i-2} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.8f}$$

$$J_{2i,2i} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.8g}$$

V rovnicích bylo použito označení

$$\overline{r}_i = \frac{1}{2}\left(r_i - r_{i-1}\right), \tag{B.9a}$$

$$x_{\mathrm{d}\sigma} = \frac{1}{x_\sigma} \frac{\left(1+\sigma_i\right)^\alpha - \mu_c^2 \left(1+\sigma_i \mu_c^2\right)^\alpha}{\left(1-\mu_c^2\right) \sigma_i \left(1+\sigma_i\right)^\alpha} - \frac{1}{\sigma_i} - \frac{\alpha}{1+\sigma_i}, \tag{B.9b}$$

$$x_\sigma = \frac{\left(1+\sigma_i\right)^{\alpha+1} - \left(1+\sigma_i \mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{\left(\alpha+1\right)\left(1-\mu_c^2\right) \sigma_i \left(1+\sigma_i\right)^\alpha}. \tag{B.9c}$$

B.2 Trojsložkový neizotermický vítr

B.2.1 Diskretizace rovnic

Rovnice, popisující trojsložkový hvězdný vítr jsou obdobné jako (B.1). Vztahy popisující rovnici kontinuity hmotnosti jsou stejné, vztahy popisující rovnici kontinuity hybnosti se liší členy popisujícími tření a zářivou sílu.

Okrajové podmínky pro $i = 1$

Při hledání členů popisujících okrajové podmínky trojsložkového neizotermického větru vyjdeme z rovnic (4.104, 4.106, 4.107, 4.86, 4.87 a 4.108)

$$P_1 = \rho_{\mathrm{i}\,1} - \rho_0, \tag{B.10a}$$

$$P_2 = \left(\left[\frac{\mathrm{d}a_\mathrm{p}^2}{\mathrm{d}r}\right]_1 - \frac{2{a_\mathrm{p}}^2}{r_1}\right)\left(1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\rho_{\mathrm{p}\,1}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}}\right) + \frac{G\mathfrak{M}}{r_1^2}\left(1 - \mathit{\Gamma}\right) + \mathcal{R}_{\mathrm{pi}} \ln \Lambda + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \mathcal{R}_{\mathrm{ei}} \ln \Lambda, \tag{B.10b}$$

$$P_3 = \rho_{\mathrm{p}\,1} - \frac{1}{\mathfrak{Y}_\mathrm{i}} \rho_{\mathrm{i}\,1} \frac{v_{r\,\mathrm{i}1}}{v_{r\,\mathrm{p}\,1}}, \tag{B.10c}$$

$$P_4 = v_{r\,\mathrm{p}\,1}(R_*) - a_\mathrm{p} \sqrt{1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\rho_{\mathrm{p}\,1}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}}}, \tag{B.10d}$$

$$P_5 = \rho_{\mathrm{e}\,1} - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\left(\rho_{\mathrm{p}\,1} + \frac{z_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i}} \rho_{\mathrm{i}\,1}\right), \tag{B.10e}$$

$$P_6 = \rho_{\mathrm{e}\,1} v_{r\,\mathrm{e}\,1} - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\left(\rho_{\mathrm{p}\,1} v_{r\,\mathrm{p}\,1} + \frac{z_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i}} \rho_{\mathrm{i}\,1} v_{r\,\mathrm{i}\,1}\right) \tag{B.10f}$$

$$P_7 = Q^{\mathrm{rad}}. \tag{B.10g}$$

Rovnice pro běžný uzlový bod modelu $1 < i < \mathrm{NR}$

Při aproximaci rovnic popisující model trojsložkového neizotermického větru (4.81, 4.82, 4.86, 4.87, 4.88 a 4.89) pro jednotlivé uzlové body získáváme následující soustavu algebraických rovnic

$$P_{7i-6} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.11a}$$

$$P_{7i-5} = v_{r\mathrm{i},i}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_{\mathrm{i},i}^2}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \left[\frac{\mathrm{d}a_i^2}{\mathrm{d}r}\right]_i - \frac{q_{\mathrm{i}}}{m_{\mathrm{i}}}E - x_{\mathrm{i}\,\alpha}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} + g + \\ + \mathcal{R}_{\mathrm{ip}}\ln\Lambda + \mathcal{R}_{\mathrm{ie}}\ln\Lambda, \tag{B.11b}$$

$$P_{7i-4} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.11c}$$

$$P_{7i-3} = v_{r\mathrm{p},i}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_{\mathrm{p},i}^2}{\rho_{\mathrm{p},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \left[\frac{\mathrm{d}a_{\mathrm{p}}^2}{\mathrm{d}r}\right]_i - \frac{q_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}}E + g + \\ + \mathcal{R}_{\mathrm{pi}}\ln\Lambda + \mathcal{R}_{\mathrm{pe}}\ln\Lambda, \tag{B.11d}$$

$$P_{7i-2} = \rho_{\mathrm{e},i} - \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\left(\rho_{\mathrm{p},i} + \frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i},i}\right), \tag{B.11e}$$

$$P_{7i-1} = \rho_{\mathrm{e},i}v_{r\mathrm{e}} - \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\left(\rho_{\mathrm{p},i}v_{r\mathrm{p},i} + \frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i},i}v_{r\mathrm{i},i}\right), \tag{B.11f}$$

$$P_{7i} = \frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i \sum_{a=\mathrm{p,e,i}} v_{ra,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} + \sum_{a=\mathrm{p,e,i}} a_a^2\rho_{a,i}\frac{1}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2v_{ra}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - Q^{\mathrm{rad}} - \\ - \frac{1}{2}\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}\sum_{\substack{b=\mathrm{p,e,i}\\ b\neq a}} \rho_a\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda\left(v_{ra,i} - v_{rb,i}\right). \tag{B.11g}$$

Rovnice pro vnější okraj sítě $i = \mathrm{NR}$

Pro vnější okraj sítě znovu použijeme extrapolaci

$$P_{7i-6} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.12a}$$

$$P_{7i-5} = \frac{v_{r\mathrm{i},i} - v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\mathrm{i},i-1} - v_{r\mathrm{i},i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.12b}$$

$$P_{7i-4} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.12c}$$

$$P_{7i-3} = \frac{v_{r\mathrm{p},i} - v_{r\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\mathrm{p},i-1} - v_{r\mathrm{p},i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.12d}$$

$$P_{7i-2} = \left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{e}}v_{r\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.12e}$$

$$P_{7i-1} = \frac{v_{r\mathrm{e},i} - v_{r\mathrm{e},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\mathrm{e},i-1} - v_{r\mathrm{e},i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.12f}$$

$$P_{7i} = \frac{T_i - T_{i-1}}{\Delta r_i} - \frac{T_{i-1} - T_{i-2}}{\Delta r_{i-1}}. \tag{B.12g}$$

Přitom bylo použito označení

$$x_{ab,i} = \frac{\sqrt{A_{ab}}}{v_{\mathrm{th}}}\left(v_{ra,i} - v_{rb,i}\right), \tag{B.13a}$$

$$x_{\mathrm{i}\alpha} = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\frac{\sigma_{\mathrm{e}}L}{4\pi r^2 c}\left(\frac{1}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\frac{\rho_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{e}}W}\right)^{\delta}\frac{(1+\sigma_{\mathrm{i},i})^{\alpha+1} - \left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma_{\mathrm{i},i}\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\right)^{\alpha}}k\left(\frac{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}{\sigma_{\mathrm{e}}v_{\mathrm{th}}}\right)^{\alpha}, \tag{B.13b}$$

$$\mathcal{R}_{ab} = \rho_b\frac{4\pi q_a^2 q_b^2}{m_a m_b kT}\frac{v_{ra} - v_{rb}}{|v_{ra} - v_{rb}|}G(x_{ab}), \tag{B.13c}$$

$$\ln\Lambda = \ln\left(24\pi\sqrt{\frac{m_{\mathrm{p}}}{\tilde{\rho}_i}}\left(\frac{kT}{4\pi\,\mathrm{e}^2}\right)^{3/2}\right), \tag{B.13d}$$

$$\tilde{\rho}_i = \rho_{\mathrm{p},i} + \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\rho_{\mathrm{e},i} + \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i},i}, \tag{B.13e}$$

$$E = \frac{m_{\mathrm{e}}}{e}\left(g_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}} - g - \left[\frac{\mathrm{d}a_{\mathrm{e}}^2}{\mathrm{d}r}\right]_i - \frac{a_{\mathrm{e},i}^2}{\rho_{\mathrm{e},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}r}\right]_i - \mathcal{R}_{\mathrm{ep}}\ln\Lambda - \mathcal{R}_{\mathrm{ei}}\ln\Lambda\right), \tag{B.13f}$$

$$\begin{aligned} Q^{\mathrm{rad}} &= 4\pi N_{\mathrm{ei}}N_{\mathrm{H+},i}\sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}}\alpha_{\mathrm{ff}}(\overline{\nu}_j,T_i)\left[\bar{J}_j - \left(\bar{J}_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\right]\Delta\nu_j + \\ &\quad + 4\pi\sum_{l=1}^{2}N_{li}\sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}}\alpha_{\mathrm{bf},l}(\overline{\nu}_j)\left[\bar{J}_j - \left(\bar{J}_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\right]\left[1 - \frac{\overline{\nu}_l}{\overline{\nu}_j}\right]\Delta\nu_j, \end{aligned} \tag{B.13g}$$

$$\Delta\nu_j = \nu_j - \nu_{j-1}. \tag{B.13h}$$

B.2.2 Členy Jacobiánu

Jednotlivé prvky Jacobiánu jsou pro rovnici kontinuity hmotnosti jsou stejné, jako v případě 1D větru, prvky Jacobiánu pro rovnici kontinuity hybnosti se liší o členy popisující tření a zářivou sílu:

Členy odpovídající okrajové podmínce pro $i = 1$

Absorbující ionty

$$J_{1,1} = 1 \tag{B.14a}$$

$$J_{2,1} = \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\rho_{\mathrm{i}}}\ln\Lambda - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{i}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\tilde{\rho}_1} + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}}{\rho_{\mathrm{i}}}\ln\Lambda - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{i}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.14b}$$

$$J_{2,2} = -\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}'\ln\Lambda - \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}'\ln\Lambda \tag{B.14c}$$

$$J_{2,3} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{e}1}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\left(\left[\frac{\mathrm{d}a_{\mathrm{p}}^2}{\mathrm{d}r}\right]_1 - \frac{2{a_{\mathrm{p}}}^2}{r_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\tilde{\rho}_1} - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.14d}$$

$$J_{2,4} = \mathcal{R}_{\mathrm{pi}}'\ln\Lambda \tag{B.14e}$$

$$J_{2,5} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{\rho_{\mathrm{p}1}}{\rho_{\mathrm{e}1}^2}\left(\left[\frac{\mathrm{d}a_{\mathrm{p}}^2}{\mathrm{d}r}\right]_1 - \frac{2{a_{\mathrm{p}}}^2}{r_1}\right) - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\tilde{\rho}_1} - \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.14f}$$

$$J_{2,6} = \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\mathcal{R}_{\mathrm{ei}}'\ln\Lambda \tag{B.14g}$$

Neabsorbující složka

$$J_{3,1} = -\frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\frac{v_{r\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}} \tag{B.15a}$$

$$J_{3,2} = -\frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}} \frac{\rho_{\mathrm{i}\,1}}{v_{r\,\mathrm{p}\,1}} \tag{B.15b}$$

$$J_{3,3} = 1 \tag{B.15c}$$

$$J_{3,4} = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}} \rho_{\mathrm{i}\,1} \frac{v_{r\,\mathrm{i}\,1}}{v_{r\,\mathrm{p}\,1}^{\;2}} \tag{B.15d}$$

$$J_{4,3} = -\frac{1}{2} \frac{a_{\mathrm{p}}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \left(1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \frac{\rho_{\mathrm{p}\,1}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}}\right)^{-1/2} \tag{B.15e}$$

$$J_{4,4} = 1 \tag{B.15f}$$

$$J_{4,5} = \frac{1}{2} a_{\mathrm{p}} \frac{\rho_{\mathrm{p}\,1}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}^{2}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \left(1 + \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \frac{\rho_{\mathrm{p}\,1}}{\rho_{\mathrm{e}\,1}}\right)^{-1/2} \tag{B.15g}$$

Elektrony

$$J_{5,1} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}} \tag{B.16a}$$

$$J_{5,3} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \tag{B.16b}$$

$$J_{5,5} = 1 \tag{B.16c}$$

$$J_{6,1} = -\frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} v_{r\,\mathrm{i}\,1} \tag{B.16d}$$

$$J_{6,2} = -\frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \rho_{\mathrm{i}\,1} \tag{B.16e}$$

$$J_{6,3} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} v_{r\,\mathrm{p}\,1} \tag{B.16f}$$

$$J_{6,4} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \rho_{\mathrm{p}\,1} \tag{B.16g}$$

$$J_{6,5} = v_{r\,\mathrm{e}\,1} \tag{B.16h}$$

$$J_{6,6} = \rho_{\mathrm{e}\,1} \tag{B.16i}$$

Zářivá rovnováha

$$J_{7,7} = \frac{\partial Q^{\mathrm{rad}}}{\partial T_1} \tag{B.17}$$

Členy pro běžný uzlový bod modelu $1 < i < \mathrm{NR}$

Absorbující ionty

$$J_{7i-6,7i-13} = -(1 - y_i) \frac{r_{i-1}^2 v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i^3} \tag{B.18a}$$

$$J_{7i-6,7i-12} = -(1 - y_i) \frac{r_{i-1}^2 \rho_{\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i^3} \tag{B.18b}$$

$$J_{7i-6,7i-6} = v_{r\mathrm{i},i} \left(\frac{r_{i+1}^2 (1 - y_i)}{\Delta r_i^3} - \frac{r_i^2 y_i}{\Delta r_{i+1}^3}\right) \tag{B.18c}$$

$$J_{7i-6,7i-5} = \rho_{\mathrm{i},i} \left(\frac{r_{i+1}^2 (1 - y_i)}{\Delta r_i^3} - \frac{r_i^2 y_i}{\Delta r_{i+1}^3}\right) \tag{B.18d}$$

$$J_{7i-6,7i+1} = y_i \frac{r_{i+1}^2 v_{r\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}^3} \tag{B.18e}$$

$$J_{7i-6,7i+2} = y_i \frac{r_{i+1}^2 \rho_{\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}^3} \tag{B.18f}$$

$$J_{7i-5,7i-13} = -\frac{a_{\mathrm{i},i}^2 (1-y_i)}{\rho_{\mathrm{i},i} \Delta r_i} \tag{B.18g}$$

$$\begin{aligned} J_{7i-5,7i-12} = {} & \frac{x_{\mathrm{i}\alpha} \alpha (1-y_i)}{\rho_{\mathrm{i},i} \Delta r_i} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha-1} + x_{\mathrm{i}\alpha} x_{\mathrm{id}\sigma} \frac{r_i}{\Delta r_i} \frac{1-y_i}{v_{r\mathrm{i},i}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} - \\ & - \frac{v_{r\mathrm{i},i}(1-y_i)}{\Delta r_i} \end{aligned} \tag{B.18h}$$

$$J_{7i-5,7i-9} = -\frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{a_{\mathrm{e},i}^2 (1-y_i)}{\rho_{\mathrm{e},i} \Delta r_i} \tag{B.18i}$$

$$J_{7i-5,7i-7} = -\frac{1}{T_{i-1}} \left(\frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} a_{\mathrm{e},i-1}^2 + a_{\mathrm{i},i-1}^2 \right) \frac{1-y_i}{\Delta r_i} \tag{B.18j}$$

$$\begin{aligned} J_{7i-5,7i-6} = {} & -\frac{a_{\mathrm{i},i}^2}{\rho_{\mathrm{i},i}^2} \left(y_i \frac{\rho_{\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}} - (1-y_i) \frac{\rho_{\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} \right) + \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}} \left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ip}}{\tilde{\rho}_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ie}}{\tilde{\rho}_i} \right) - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{i},i}} \end{aligned} \tag{B.18k}$$

$$\begin{aligned} J_{7i-5,7i-5} = {} & y_i \frac{v_{r\mathrm{i},i+1} - 2 v_{r\mathrm{i},i}}{\Delta r_{i+1}} + (1-y_i) \frac{2 v_{r\mathrm{i},i} - v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} - \\ & - \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha-1} - \\ & - x_{\mathrm{i}\alpha} x_{\mathrm{id}\sigma} \frac{r_i}{v_{r\mathrm{i},i}^2} \left(\frac{(1-y_i) v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{y_i v_{r\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}} \right) \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} + \\ & + \mathcal{R}'_\mathrm{ip} \ln \Lambda + \mathcal{R}'_\mathrm{ie} \ln \Lambda - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{i},i}} \end{aligned} \tag{B.18l}$$

$$J_{7i-5,7i-4} = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ip}}{\rho_{\mathrm{p},i}} \ln \Lambda - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ip}}{\tilde{\rho}_i} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ie}}{\tilde{\rho}_i} - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{p},i}} \tag{B.18m}$$

$$J_{7i-5,7i-3} = -\mathcal{R}'_\mathrm{ip} \ln \Lambda - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{p},i}} \tag{B.18n}$$

$$J_{7i-5,7i-2} = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ie}}{\rho_{\mathrm{e},i}} \ln \Lambda - \frac{1}{2} \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}} \left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ip}}{\tilde{\rho}_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ie}}{\tilde{\rho}_i} \right) - \frac{\delta\, x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{e},i}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{e},i}} \tag{B.18o}$$

$$J_{7i-5,7i-1} = -\mathcal{R}'_\mathrm{ie} \ln \Lambda - \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{e},i}} \tag{B.18p}$$

$$\begin{aligned} J_{7i-5,7i} = {} & \frac{1}{T_i} \Bigg(\frac{a_{\mathrm{i},i}^2}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} \rho_\mathrm{i}}{\mathrm{d} r} \right]_i + \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{a_{\mathrm{e},i}^2}{\rho_\mathrm{e}} \left[\frac{\mathrm{d} \rho_\mathrm{e}}{\mathrm{d} r} \right]_i + \left(\frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} a_{\mathrm{e},i}^2 + a_{\mathrm{i},i}^2 \right) \left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \right) + \\ & + \frac{\alpha}{2} x_{\mathrm{i}\alpha} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} + (\mathcal{R}_\mathrm{ip} + \mathcal{R}_\mathrm{ie}) \left(\frac{3}{2} - \ln \Lambda \right) - \frac{1}{2} \mathcal{R}'_\mathrm{ip} \ln \Lambda \left(v_{r\mathrm{i},i} - v_{r\mathrm{p},i} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \mathcal{R}'_\mathrm{ie} \ln \Lambda \left(v_{r\mathrm{i},i} - v_{r\mathrm{e},i} \right) + \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_i} \Bigg) \end{aligned} \tag{B.18q}$$

$$J_{7i-5,7i+1} = \frac{a_{\mathrm{i},i}^2 y_i}{\rho_{\mathrm{i},i} \Delta r_{i+1}} \tag{B.18r}$$

$$J_{7i-5,7i+2} = \frac{v_{r\mathrm{i},i} y_i}{\Delta r_{i+1}} - \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha} y_i}{\rho_{\mathrm{i},i} \Delta r_{i+1}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha-1} - x_{\mathrm{i}\alpha} x_{\mathrm{id}\sigma} \frac{r_i}{\Delta r_{i+1}} \frac{y_i}{v_{r\mathrm{i},i}} \left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}} \left[\frac{\mathrm{d} v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d} r} \right]_i \right)^{\alpha} \tag{B.18s}$$

$$J_{7i-5,7i+5} = \frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} \frac{a_{\mathrm{e},i}^2 y_i}{\rho_{\mathrm{e},i} \Delta r_{i+1}} \tag{B.18t}$$

$$J_{7i-5,7i+7} = \frac{1}{T_{i+1}} \left(\frac{q_\mathrm{i}}{m_\mathrm{i}} \frac{m_\mathrm{e}}{e} a_{\mathrm{e},i+1}^2 + a_{\mathrm{i},i+1}^2 \right) \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.18u}$$

Neabsorbující složka

$$J_{7i-4,7i-11} = -(1-y_i) \frac{r_{i-1}^2 v_{r\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i^3} \tag{B.19a}$$

$$J_{7i-4,7i-10} = -(1-y_i) \frac{r_{i-1}^2 \rho_{\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i^3} \tag{B.19b}$$

$$J_{7i-4,7i-4} = v_{r\mathrm{p},i} \left(\frac{r_{i+1}^2 (1-y_i)}{\Delta r_i^3} - \frac{r_i^2 y_i}{\Delta r_{i+1}^3} \right) \tag{B.19c}$$

$$J_{7i-4,7i-3} = \rho_{\mathrm{p},i} \left(\frac{r_{i+1}^2 (1-y_i)}{\Delta r_i^3} - \frac{r_i^2 y_i}{\Delta r_{i+1}^3} \right) \tag{B.19d}$$

$$J_{7i-4,7i+3} = y_i \frac{r_{i+1}^2 v_{r\mathrm{p},i+1}}{\Delta r_{i+1}^3} \tag{B.19e}$$

$$J_{7i-4,7i+4} = y_i \frac{r_{i+1}^2 \rho_{\mathrm{p},i+1}}{\Delta r_{i+1}^3} \tag{B.19f}$$

$$J_{7i-3,7i-11} = -\frac{a_{\mathrm{p},i}^2 (1-y_i)}{\rho_{\mathrm{p},i} \Delta r_i} \tag{B.19g}$$

$$J_{7i-3,7i-10} = -\frac{v_{r\mathrm{p},i} (1-y_i)}{\Delta r_i} \tag{B.19h}$$

$$J_{7i-3,7i-9} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{a_{\mathrm{e},i}^2 (1-y_i)}{\rho_{\mathrm{e},i} \Delta r_i} \tag{B.19i}$$

$$J_{7i-3,7i-7} = -\frac{1}{T_{i-1}} \left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} a_{\mathrm{e},i-1}^2 + a_{\mathrm{p},i-1}^2 \right) \frac{1-y_i}{\Delta r_i} \tag{B.19j}$$

$$J_{7i-3,7i-6} = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pi}}{\rho_{\mathrm{i},i}} \ln \Lambda - \frac{1}{2} \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}} \left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{pi}}{\tilde{\rho}_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pe}}{\tilde{\rho}_i} \right) - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{i},i}} \tag{B.19k}$$

$$J_{7i-3,7i-5} = -\mathcal{R}'_\mathrm{pi} \ln \Lambda - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{i},i}} \tag{B.19l}$$

$$J_{7i-3,7i-4} = -\frac{a_\mathrm{p}^2}{\rho_{\mathrm{p},i}^2} \left(y_i \frac{\rho_{\mathrm{p},i+1}}{\Delta r_{i+1}} - (1-y_i) \frac{\rho_{\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pi}}{\tilde{\rho}_i} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pe}}{\tilde{\rho}_i} - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{p},i}} \tag{B.19m}$$

$$J_{7i-3,7i-3} = y_i \frac{v_{r\mathrm{p},i+1} - 2 v_{r\mathrm{p},i}}{\Delta r_{i+1}} + (1-y_i) \frac{2 v_{r\mathrm{p},i} - v_{r\mathrm{p},i-1}}{\Delta r_i} + \tag{B.19n}$$

$$+ \mathcal{R}'_\mathrm{pi} \ln \Lambda + \mathcal{R}'_\mathrm{pe} \ln \Lambda - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{p},i}} \tag{B.19o}$$

$$J_{7i-3,7i-2} = \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pe}}{\rho_{\mathrm{e},i}} \ln \Lambda - \frac{1}{2} \frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}} \left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{pi}}{\tilde{\rho}_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{pe}}{\tilde{\rho}_i} \right) - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_{\mathrm{e},i}} \tag{B.19p}$$

$$J_{7i-3,7i-1} = -\mathcal{R}'_\mathrm{pe} \ln \Lambda - \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{e},i}} \tag{B.19q}$$

$$J_{7i-3,7i} = \frac{1}{T_i}\left(\frac{a_{\mathrm{p},i}^2}{\rho_{\mathrm{p},i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\frac{a_{\mathrm{e},i}^2}{\rho_\mathrm{e}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_\mathrm{e}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}a_{\mathrm{e},i}^2 + a_{\mathrm{p},i}^2\right)\left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)\right) +$$
$$+ \frac{1}{T_i}\left((\mathcal{R}_\mathrm{pi} + \mathcal{R}_\mathrm{pe})\left(\frac{3}{2} - \ln\Lambda\right) - \frac{1}{2}\mathcal{R}'_\mathrm{pi}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{p},i} - v_{r\mathrm{i},i}\right)\right) -$$
$$- \frac{1}{T_i}\left(\frac{1}{2}\mathcal{R}'_\mathrm{pe}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{p},i} - v_{r\mathrm{e},i}\right) + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T_i}\right) \tag{B.19r}$$

$$J_{7i-3,7i+3} = \frac{a_{\mathrm{p},i}^2 y_i}{\rho_{\mathrm{p},i}\Delta r_{i+1}} \tag{B.19s}$$

$$J_{7i-3,7i+4} = \frac{v_{r\mathrm{p},i} y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.19t}$$

$$J_{7i-3,7i+5} = \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\frac{a_{\mathrm{e},i}^2 y_i}{\rho_{\mathrm{e},i}\Delta r_{i+1}} \tag{B.19u}$$

$$J_{7i-3,7i+7} = \frac{1}{T_{i+1}}\left(\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}a_{\mathrm{e},i+1}^2 + a_{\mathrm{i},i+1}^2\right)\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.19v}$$

Elektrony

$$J_{7i-2,7i-6} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\frac{z_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i}} \tag{B.20a}$$

$$J_{7i-2,7i-4} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \tag{B.20b}$$

$$J_{7i-2,7i-2} = 1 \tag{B.20c}$$

$$J_{7i-1,7i-6} = -\frac{z_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i}}\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}v_{r\mathrm{i},i} \tag{B.20d}$$

$$J_{7i-1,7i-5} = -\frac{z_\mathrm{i}}{A_\mathrm{i}}\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\rho_{\mathrm{i},i} \tag{B.20e}$$

$$J_{7i-1,7i-4} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}v_{r\mathrm{p},i} \tag{B.20f}$$

$$J_{7i-1,7i-3} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}\rho_{\mathrm{p},i} \tag{B.20g}$$

$$J_{7i-1,7i-2} = v_{r\mathrm{e},i} \tag{B.20h}$$

$$J_{7i-1,7i-1} = \rho_{\mathrm{e},i} \tag{B.20i}$$

Zákon zachování energie

$$J_{7i,7i-12} = -\frac{a_{\mathrm{i},i}^2\rho_{\mathrm{i},i}}{r_i^2}\frac{(1-y_i)r_{i-1}^2}{\Delta r_i} \tag{B.21a}$$

$$J_{7i,7i-10} = -\frac{a_{\mathrm{p},i}^2\rho_{\mathrm{p},i}}{r_i^2}\frac{(1-y_i)r_{i-1}^2}{\Delta r_i} \tag{B.21b}$$

$$J_{7i,7i-8} = -\frac{a_{\mathrm{e},i}^2\rho_{\mathrm{e},i}}{r_i^2}\frac{(1-y_i)r_{i-1}^2}{\Delta r_i} \tag{B.21c}$$

$$J_{7i,7i-7} = -\frac{3}{2}k\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}\sum_{\mathrm{a=p,e,i}} v_{ra,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} \tag{B.21d}$$

$$J_{7i,7i-6}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{v_{r\mathrm{i},i}}{m_\mathrm{i}}+\frac{a_{\mathrm{i},i}^2}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2v_{r\mathrm{i},i}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i-\mathcal{R}_\mathrm{ip}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)-$$
$$-\mathcal{R}_\mathrm{ie}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{e},i}\right)+\frac{1}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}}Q^\text{tření} \tag{B.21e}$$

$$J_{7i,7i-5}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{\rho_{\mathrm{i},i}}{m_\mathrm{i}}+a_{\mathrm{i},i}^2\rho_{\mathrm{i},i}\left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}-\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)-\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ip}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)-$$
$$-\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}_\mathrm{ip}\ln\Lambda-\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ie}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{e},i}\right)-\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}_\mathrm{ie}\ln\Lambda \tag{B.21f}$$

$$J_{7i,7i-4}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{v_{r\mathrm{p},i}}{m_\mathrm{p}}+\frac{a_{\mathrm{p},i}^2}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2v_{r\mathrm{p},i}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i-\rho_{\mathrm{i},i}\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ip}}{\rho_{\mathrm{p},i}}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)-$$
$$-\rho_{\mathrm{e},i}\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ep}}{\rho_{\mathrm{p},i}}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)-\frac{Q^\mathrm{rad}}{\rho_{\mathrm{p},i}}+\frac{1}{2\tilde{\rho}_i}Q^\text{tření} \tag{B.21g}$$

$$J_{7i,7i-3}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{\rho_{\mathrm{p},i}}{m_\mathrm{p}}+a_{\mathrm{p},i}^2\rho_{\mathrm{p},i}\left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}-\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)+\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ip}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)+$$
$$+\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}_\mathrm{ip}\ln\Lambda+\rho_{\mathrm{e},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ep}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)+\rho_{\mathrm{e},i}\mathcal{R}_\mathrm{ep}\ln\Lambda \tag{B.21h}$$

$$J_{7i,7i-2}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{v_{r\mathrm{e},i}}{m_\mathrm{e}}+\frac{a_{\mathrm{e},i}^2}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2v_{r\mathrm{e},i}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i-\rho_{\mathrm{i},i}\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ie}}{\rho_{\mathrm{e},i}}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{e},i}\right)-$$
$$-\mathcal{R}_\mathrm{ep}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)+\frac{Q_\mathrm{ff}^\mathrm{rad}\frac{N_{\mathrm{H}^0,i}}{N_{\mathrm{H}^+,i}}-Q_\mathrm{bf}^\mathrm{rad}}{\rho_\mathrm{ei}\left(\frac{N_{\mathrm{H}^0,i}}{N_{\mathrm{H}^+,i}}+1\right)}+\frac{1}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}}Q^\text{tření} \tag{B.21i}$$

$$J_{7i,7i-1}=\frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{\rho_{\mathrm{e},i}}{m_\mathrm{e}}+a_{\mathrm{e},i}^2\rho_{\mathrm{e},i}\left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}-\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)-\rho_{\mathrm{e},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ep}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i}-v_{r\mathrm{p},i}\right)-$$
$$-\rho_{\mathrm{e},i}\mathcal{R}_\mathrm{ep}\ln\Lambda+\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}'_\mathrm{ie}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{i},i}-v_{r\mathrm{e},i}\right)+\rho_{\mathrm{i},i}\mathcal{R}_\mathrm{ie}\ln\Lambda \tag{B.21j}$$

$$J_{7i,7i}=\frac{3}{2}k\left(\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}-\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}v_{ra,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a}+\frac{1}{T_i}\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}\frac{a_a^2\rho_{a,i}}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2v_{ra}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i-\frac{\partial Q^\mathrm{rad}}{\partial T_i}+$$
$$+\frac{1}{2T_i}\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}\sum_{\substack{b=\mathrm{p,e,i}\\ b\neq a}}\rho_a\left[\mathcal{R}_{ab}\left(\ln\Lambda-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{R}'_{ab}\ln\Lambda\left(v_{ra,i}-v_{rb,i}\right)\right]\left(v_{ra,i}-v_{rb,i}\right) \tag{B.21k}$$

$$J_{7i,7i+2}=\frac{a_{\mathrm{i},i}^2\rho_{\mathrm{i},i}}{r_i}\frac{y_ir_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.21l}$$

$$J_{7i,7i+4}=\frac{a_{\mathrm{p},i}^2\rho_{\mathrm{p},i}}{r_i}\frac{y_ir_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.21m}$$

$$J_{7i,7i+6}=\frac{a_{\mathrm{e},i}^2\rho_{\mathrm{e},i}}{r_i}\frac{y_ir_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.21n}$$

$$J_{7i,7i+7}=\frac{3}{2}k\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}v_{ra,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} \tag{B.21o}$$

Členy pro vnější okraj sítě $i=\mathrm{NR}$

Absorbující ionty

$$J_{7i-6,7i-13}=-\frac{r_{i-1}^2v_{r\mathrm{i},i-1}}{\overline{r}_i^2\Delta r_i} \tag{B.22a}$$

$$J_{7i-6,7i-12} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{\mathrm{i},i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.22b}$$

$$J_{7i-6,7i-6} = \frac{r_i^2 v_{r\mathrm{i},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.22c}$$

$$J_{7i-6,7i-5} = \frac{r_i^2 \rho_{\mathrm{i},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.22d}$$

$$J_{7i-5,7i-19} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.22e}$$

$$J_{7i-5,7i-12} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.22f}$$

$$J_{7i-5,7i-5} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.22g}$$

Neabsorbující složka

$$J_{7i-4,7i-11} = -\frac{r_{i-1}^2 v_{r\mathrm{p},i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.23a}$$

$$J_{7i-4,7i-10} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{\mathrm{p},i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.23b}$$

$$J_{7i-4,7i-4} = \frac{r_i^2 v_{r\mathrm{p},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.23c}$$

$$J_{7i-4,7i-3} = \frac{r_i^2 \rho_{\mathrm{p},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.23d}$$

$$J_{7i-3,7i-17} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.23e}$$

$$J_{7i-3,7i-10} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.23f}$$

$$J_{7i-3,7i-3} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.23g}$$

Elektrony

$$J_{7i-2,7i-9} = -\frac{r_{i-1}^2 v_{r\mathrm{e},i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.24a}$$

$$J_{7i-2,7i-8} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{\mathrm{e},i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.24b}$$

$$J_{7i-2,7i-2} = \frac{r_i^2 v_{r\mathrm{e},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.24c}$$

$$J_{7i-2,7i-1} = \frac{r_i^2 \rho_{\mathrm{e},i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.24d}$$

$$J_{7i-1,7i-15} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.24e}$$

$$J_{7i-1,7i-8} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.24f}$$

$$J_{7i-1,7i-1} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.24g}$$

Teplota

$$J_{7i,7i-14} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.25a}$$
$$J_{7i,7i-7} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.25b}$$
$$J_{7i,7i} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.25c}$$

V jednotlivých vzorcích bylo použito označení

$$\mathcal{R}'_{ab} = \rho_{b,i}\frac{4\pi q_\mathrm{a}^2 q_\mathrm{b}^2}{m_\mathrm{a} m_\mathrm{b} kT}\frac{\sqrt{A_{ab}}}{v_\mathrm{th}}G'(x_{ab}), \tag{B.26a}$$
$$G'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2} - \frac{2}{x}\,G(x), \tag{B.26b}$$
$$x_{\mathrm{id}\sigma} = \frac{1}{x_{\mathrm{i}\sigma}}\frac{(1+\sigma_{\mathrm{i},i})^\alpha - \mu_c^2\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\mu_c^2\right)^\alpha}{\left(1-\mu_c^2\right)\sigma_{\mathrm{i},i}\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\right)^\alpha} - \frac{1}{\sigma_{\mathrm{i},i}} - \frac{\alpha}{1+\sigma_{\mathrm{i},i}}, \tag{B.26c}$$
$$x_{\mathrm{i}\sigma} = \frac{(1+\sigma_{\mathrm{i},i})^{\alpha+1} - \left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\mu_c^2\right)^{\alpha+1}}{(\alpha+1)\left(1-\mu_c^2\right)\sigma_{\mathrm{i},i}\left(1+\sigma_{\mathrm{i},i}\right)^\alpha}, \tag{B.26d}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{\mathrm{i},i}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{\mathrm{i},i-1}} = -\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ei}}{\rho_{\mathrm{i},i}}\ln\Lambda + \frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{i}}\left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ep}}{\tilde\rho_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ei}}{\tilde\rho_i}\right), \tag{B.26e}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{i},i}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{i},i-1}} = \mathcal{R}'_\mathrm{ei}\ln\Lambda, \tag{B.26f}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{\mathrm{p},i}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{\mathrm{p},i-1}} = -\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ep}}{\rho_{\mathrm{p},i}}\ln\Lambda + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ep}}{\tilde\rho_i} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ei}}{\tilde\rho_i}, \tag{B.26g}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{p},i}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{p},i-1}} = \mathcal{R}'_\mathrm{ep}\ln\Lambda, \tag{B.26h}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho_{\mathrm{e},i}} = \frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{p}}{m_\mathrm{e}}\left(\frac{\mathcal{R}_\mathrm{ep}}{\tilde\rho_i} + \frac{\mathcal{R}_\mathrm{ei}}{\tilde\rho_i}\right) + \frac{a_{\mathrm{e},i}^2}{\rho_{\mathrm{e},i}^2}\left(y_i\frac{\rho_{\mathrm{e},i+1}}{\Delta r_{i+1}} - (1-y_i)\frac{\rho_{\mathrm{e},i-1}}{\Delta r_i}\right), \tag{B.26i}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{e},i}} = \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial v_{r\mathrm{e},i-1}} = -\mathcal{R}'_\mathrm{ep}\ln\Lambda - \mathcal{R}'_\mathrm{ei}\ln\Lambda, \tag{B.26j}$$
$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial T_i} = \left(\mathcal{R}_\mathrm{ep} + \mathcal{R}_\mathrm{ei}\right)\left(\ln\Lambda - \frac{3}{2}\right) + \mathcal{R}'_\mathrm{ep}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i} - v_{r\mathrm{p},i}\right) + \mathcal{R}'_\mathrm{ei}\ln\Lambda\left(v_{r\mathrm{e},i} - v_{r\mathrm{i},i}\right), \tag{B.26k}$$
$$Q^\text{tření} = \frac{1}{2}\sum_{a=\mathrm{p,e,i}}\sum_{\substack{b=\mathrm{p,e,i}\\ b\neq a}}\rho_a\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda\left(v_{ra,i} - v_{rb,i}\right), \tag{B.26l}$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial Q^\mathrm{rad}}{\partial T_i} = &-\frac{4\pi h}{kT_i^{\,2}}\sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}}\left(\bar J_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right)\left(N_\mathrm{ei}N_{\mathrm{H}+,i}\alpha_\mathrm{ff}(\overline{\nu}_j,T_i) + \sum_{l=1}^{2}N_{li}\alpha_{\mathrm{bf},l}(\overline{\nu}_j)\left(1 - \frac{\nu_l}{\overline{\nu}_j}\right)\right)\times\\ &\times\mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\overline{\nu}_j\Delta\nu_j + \frac{1}{T_i}\left(\frac{3}{2} - \frac{h\nu_1}{kT_i}\right)\left(\frac{N_{\mathrm{H}+,i}}{N_{\mathrm{H}^0,i}} + 1\right)^{-1}\left(Q_\mathrm{ff}^\mathrm{rad} - \frac{N_{\mathrm{H}+,i}}{N_{\mathrm{H}^0,i}}Q_\mathrm{bf}^\mathrm{rad}\right) + \\ &+\frac{3h\nu_1}{4kT_i^{\,2}}Q_{\mathrm{bf},2}^\mathrm{rad} - \frac{1}{2T_i}Q_\mathrm{ff}^\mathrm{rad},\end{aligned} \tag{B.26m}$$
$$Q_\mathrm{ff}^\mathrm{rad} = 4\pi N_\mathrm{ei}N_{\mathrm{H}+,i}\sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}}\alpha_\mathrm{ff}(\overline{\nu}_j,T_i)\left[\bar J_j - \left(\bar J_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right)\mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\right]\Delta\nu_j, \tag{B.26n}$$

$$Q_{\mathrm{bf}}^{\mathrm{rad}} = 4\pi \sum_{l=1}^{2} N_{li} \sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}} \alpha_{\mathrm{bf},l}(\overline{\nu}_j) \left[\bar{J}_j - \left(\bar{J}_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right) \mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\right] \left[1 - \frac{\nu_l}{\overline{\nu}_j}\right] \Delta\nu_j, \tag{B.26o}$$

$$Q_{\mathrm{bf},2}^{\mathrm{rad}} = 4\pi N_{2,i} \sum_{j=1}^{\mathrm{NFR}} \alpha_{\mathrm{bf},2}(\overline{\nu}_j) \left[\bar{J}_j - \left(\bar{J}_j + \frac{2h\overline{\nu}_j^3}{c^2}\right) \mathrm{e}^{-h\overline{\nu}_j/kT_i}\right] \left[1 - \frac{\nu_2}{\overline{\nu}_j}\right] \Delta\nu_j. \tag{B.26p}$$

B.3 Vítr s odlišnými teplotami jednotlivých složek

B.3.1 Diskretizace rovnic

Okrajové podmínky pro $i = 1$

Okrajové podmínky větru s odlišnými teplotami jednotlivých složek jsou zadány rovnicemi

$$P_1 = \rho_{\mathrm{i}1} - \rho_0, \tag{B.27a}$$

$$P_2 = \frac{10a_{\mathrm{p}1}^2}{3r_1} - \frac{G\mathfrak{M}}{r_1^2} + \frac{ez_{\mathrm{p}1}}{m_{\mathrm{p}}}E_1 + \sum_{b\neq\mathrm{p}} \mathcal{R}_{\mathrm{p}b} \ln\Lambda - \frac{2}{3}\frac{1}{v_{r\mathrm{p}1}} \sum_{b\neq\mathrm{p}} \frac{m_b}{m_{\mathrm{p}} + m_b} \mathcal{R}_{\mathrm{p}b} \left(v_{rb1} - v_{r\mathrm{p}1}\right) \ln\Lambda, \tag{B.27b}$$

$$P_3 = T_{\mathrm{i}1} - T_{\mathrm{e}1}, \tag{B.27c}$$

$$P_4 = z_{\mathrm{i}1} - z_{\mathrm{i}}(r_1,\rho_{\mathrm{e}1},T_{\mathrm{e}1}), \tag{B.27d}$$

$$P_5 = \rho_{\mathrm{p}1} - \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}1}\frac{v_{r\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}}, \tag{B.27e}$$

$$P_6 = v_{r\mathrm{p}1} - \sqrt{\frac{5}{3}}a_{\mathrm{p}}, \tag{B.27f}$$

$$P_7 = T_{\mathrm{p}1} - T_{\mathrm{e}1}, \tag{B.27g}$$

$$P_8 = z_{\mathrm{p}1} - z_{\mathrm{p}}(r_1,\rho_{\mathrm{e}1},T_{\mathrm{e}1}), \tag{B.27h}$$

$$P_9 = \rho_{\mathrm{e}1} - \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\left(\rho_{\mathrm{p}1} + \frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}1}\right), \tag{B.27i}$$

$$P_{10} = \rho_{\mathrm{e}1}v_{r\mathrm{e}1} - \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\left(\rho_{\mathrm{p}1}v_{r\mathrm{p}1} + \frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}1}v_{r\mathrm{i}1}\right) \tag{B.27j}$$

$$P_{11} = Q^{\mathrm{rad}}, \tag{B.27k}$$

$$P_{12} = z_{\mathrm{i}1} - 1, \tag{B.27l}$$

$$P_{13} = \frac{E_3 - E_2}{\Delta r_3} - \frac{E_2 - E_1}{\Delta r_2} \tag{B.27m}$$

Rovnice pro běžný uzlový bod modelu $1 < i < \mathrm{NR}$

Při aproximaci rovnic popisující model větru s odlišnými teplotami jednotlivých složek (4.131a, 4.132, 4.135, 4.138 a 4.139) pro jednotlivé uzlové body získáváme následující soustavu algebraických rovnic

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+1} = \frac{1}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_a v_{ra}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \qquad a \neq \mathrm{e} \tag{B.28a}$$

$$P_{13(i-1)+4(\mathrm{e}-1)+1} = \frac{1}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_{\mathrm{e}} v_{r\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - \sum_{a\neq\mathrm{e}} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_a}\rho_{a,i}v_{ra,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.28b}$$

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+2} = v_{r\,a,i}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\,a}}{\mathrm{d}r}\right]_i + \frac{a_{a,i}^2}{\rho_{a,i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}r}\right]_i + \left[\frac{\mathrm{d}a_a^2}{\mathrm{d}r}\right]_i - \frac{ez_{a,i}}{m_a}E_i - g_a^{\mathrm{rad}} + \frac{G\mathfrak{M}}{r_i^2} + \sum_{b\neq a}\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda, \tag{B.28c}$$

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+3} = \frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r}\right]_i v_{r\,a,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} + a_{a,i}^2\rho_{a,i}\frac{1}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 v_{r\,a}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - Q_a^{\mathrm{rad}} - $$
$$- \sum_{b\neq a}\mathcal{K}_{ab}\ln\Lambda - \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda\left(v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}\right), \tag{B.28d}$$

$$P_{13(i-1)+4a} = z_{a,i} - z_a(r_i,\rho_{\mathrm{e},i},T_{\mathrm{e},i}), \tag{B.28e}$$

$$P_{13i} = \frac{1}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 E\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - 4\pi e\sum_a\frac{z_{a,i}\rho_{a,i}}{m_a}. \tag{B.28f}$$

Zářivá síla působící na jednotlivé složky větru je dána vzorci

$$g_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} = x_{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha}, \tag{B.29a}$$

$$g_{\mathrm{p}}^{\mathrm{rad}} = 0, \tag{B.29b}$$

$$g_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}} = \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\frac{G\mathfrak{M}\mathit{\Gamma}}{r_i^2}. \tag{B.29c}$$

Ve výrazu pro Coulombovský logaritmus (B.13d) byla za teplotu dosazena elektronová teplota. Ostatní konstanty popisující přenos hybnosti a tepla mají tvar

$$\alpha_{ab}^2 = \frac{2k\left(m_a T_{b,i} + m_b T_{a,i}\right)}{m_a m_b}, \tag{B.30a}$$

$$x_{ab} = \frac{v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}}{\alpha_{ab}}, \tag{B.30b}$$

$$T_{ab} = \frac{m_a T_{b,i} + m_b T_{a,i}}{m_a + m_b}, \tag{B.30c}$$

$$\mathcal{R}_{ab} = \rho_{b,i}\frac{4\pi e^4 z_{a,i}^2 z_{b,i}^2}{m_a m_b k T_{ab}}\frac{v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}}{|v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}|}G(x_{ab}), \tag{B.30d}$$

$$\mathcal{K}_{ab} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\rho_{a,i}\rho_{b,i}\frac{4\pi e^4 z_{a,i}^2 z_{b,i}^2}{m_a m_b k T_{ab}}\frac{2k\left(T_{b,i} - T_{a,i}\right)}{m_a + m_b}\frac{\exp\left(-x_{ab}^2\right)}{\alpha_{ab}}. \tag{B.30e}$$

Poslední z nově zavedených označení byly užity pro ohřev zářením,

$$Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}} = \frac{\rho_{\mathrm{i},i}v_{\mathrm{th,i}}k\sigma_{\mathrm{e}}L\left(1-\alpha\right)\alpha}{2\pi c\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}R_*^2}\left(\frac{\rho_{\mathrm{e},i}/\left(Wm_{\mathrm{e}}\right)}{10^{11}\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{\delta}\left(\frac{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}v_{r\mathrm{i},i}}{\sigma_{\mathrm{e}}\rho_{\mathrm{i},i}v_{\mathrm{th}}r_i}\right)^{\alpha}G(\sigma_i,\mu_c), \tag{B.31a}$$

$$Q_{\mathrm{p}}^{\mathrm{rad}} = 0, \tag{B.31b}$$

$$Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}} = Q^{\mathrm{rad}}, \tag{B.31c}$$

kde $Q_{\mathrm{e}}^{\mathrm{rad}}$ je dáno vzorcem (B.13g), ve kterém je místo jednosložkové teploty větru dosazena elektronová teplota.

Trojný integrál (4.137) pro výpočet funkce $G(\sigma,\mu_c)$ je počítán pomocí numerické integrace. Integrál přes proměnnou x může být rychle spočítán pomocí Hermiteovy kvadraturní formule (Ralston 1965). Kvadraturní váhy a uzly byly spočteny s pomocí programu `IQPACK`, jenž využívá metodu, kterou navrhli Kautsky a Elhay (1982). Dostatečnou přesnost je možné dosáhnout s pomocí dvaceti kvadraturních uzlů.

Pro úhlovou integraci byla zvolena Legendreova kvadratura počítaná s pomocí pěti uzlů. Jednotlivé váhy a uzly byly znovu spočteny pomocí programu `IQPACK` (Kautsky a Elhay 1982).

Poslední z integrací, integrace přes proměnnou y byla provedena pomocí Simpsonova pravidla. Interval $(0,\infty)$ byl aproximován intervalem $(10^{-3},10^5)$ a Simpsonova integrace byla rozdělena do podintervalů násobků deseti. V každém z nich bylo zvoleno deset kvadraturních uzlů.

Numerické testy ukázaly, že teplota spočtená s takto započteným Dopplerovským ohřevem má chybu menší než 1%.

Konečně, náboj iontů je počítán podle vzorce (4.140) za předpokladu ionizační rovnováhy podle (4.139). Počet uvažovaných ionizačních stupňů pro jednotlivé atomy byl omezen pouze na pět. Pro uvažované modely je tento počet dostatečný. Pro číselný výpočet ionizační rovnováhy byl použit vzorec (Mihalas 1978)

$$\frac{N_{a,j}}{N_a} = \frac{\prod\limits_{l=j}^{4} \frac{N_{a,l}}{N_{a,l+1}}}{\sum\limits_{m=1}^{5} \prod\limits_{l=m}^{4} \frac{N_{a,l}}{N_{a,l+1}}}, \tag{B.32a}$$

$$z_a(r_i,\rho_{\mathrm{e},i},T_{\mathrm{e},i}) = \sum_j \frac{N_{a,j}}{N_a}. \tag{B.32b}$$

Rovnice pro vnější okraj sítě $i = \mathrm{NR}$

Pro vnější okraj sítě znovu použijeme rovnici kontinuity pro hustotu a pro ostatní proměnné extrapolaci

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+1} = \frac{1}{\overline{r}_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_a v_{r\,a}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i, \qquad a \neq \mathrm{e}, \tag{B.33a}$$

$$P_{13(i-1)+4(\mathrm{e}-1)+1} = \frac{1}{\overline{r}_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2\rho_\mathrm{e} v_{r\,\mathrm{e}}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - \sum_{a\neq\mathrm{e}} \frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{\rho}_{a,i}\overline{v}_{r\,a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i, \tag{B.33b}$$

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+2} = \frac{v_{r\,a,i} - v_{r\,a,i-1}}{\Delta r_i} - \frac{v_{r\,a,i-1} - v_{r\,a,i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.33c}$$

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+3} = \frac{T_{a,i} - T_{a,i-1}}{\Delta r_i} - \frac{T_{a,i-1} - T_{a,i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.33d}$$

$$P_{13(i-1)+4(a-1)+4} = \frac{z_{a,i} - z_{a,i-1}}{\Delta r_i} - \frac{z_{a,i-1} - z_{a,i-2}}{\Delta r_{i-1}}, \tag{B.33e}$$

$$P_{13i} = \frac{E_i - E_{i-1}}{\Delta r_i} - \frac{E_{i-1} - E_{i-2}}{\Delta r_{i-1}}. \tag{B.33f}$$

B.3.2 Členy Jacobiánu

Kromě rovnice pro elektrony jsou jednotlivé prvky Jacobiánu pro rovnici kontinuity hmotnosti stejné, jako v případě jednosložkového větru, prvky Jacobiánu pro rovnici kontinuity hybnosti se liší o členy popisující tření a zářivou sílu.

Členy odpovídající okrajové podmínce pro $i = 1$

Absorbující ionty

$$J_{1,1} = 1 \tag{B.34a}$$

$$J_{2,1} = \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\rho_{\mathrm{i}1}} \ln\Lambda - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{i}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.34b}$$

$$J_{2,2} = -\mathcal{R}'_{\mathrm{pi}} \ln\Lambda \tag{B.34c}$$

$$J_{2,3} = -\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{i}}}\left[\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{T_{\mathrm{pi}}} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}'_{\mathrm{pi}}}{T_{\mathrm{pi}}}\left(v_{r\mathrm{p}1} - v_{r\mathrm{i}1}\right)\right]\ln\Lambda \tag{B.34d}$$

$$J_{2,4} = \frac{2\mathcal{R}_{\mathrm{pi}}}{z_{\mathrm{i}1}} \ln\Lambda \tag{B.34e}$$

$$J_{2,5} = -\frac{1}{2}\sum_{b\neq\mathrm{p}} \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{p}b}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.34f}$$

$$J_{2,6} = \sum_{b\neq\mathrm{p}} \mathcal{R}'_{\mathrm{p}b} \ln\Lambda \tag{B.34g}$$

$$J_{2,7} = -\sum_{b\neq\mathrm{p}} \frac{m_b}{m_{\mathrm{p}}+m_b}\left[\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{p}b}}{T_{\mathrm{p}b}} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}'_{\mathrm{p}b}}{T_{\mathrm{p}b}}\left(v_{r\mathrm{p}1} - v_{rb1}\right)\right]\ln\Lambda \tag{B.34h}$$

$$J_{2,8} = \sum_{b\neq\mathrm{p}} \frac{2\mathcal{R}_{\mathrm{p}b}}{z_{\mathrm{p}1}} \ln\Lambda + \frac{e}{m_{\mathrm{p}}}E_1 \tag{B.34i}$$

$$J_{2,9} = \frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pe}}}{\rho_{\mathrm{e}1}} \ln\Lambda - \frac{1}{2}\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{e}}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pe}}}{\tilde{\rho}_1} \tag{B.34j}$$

$$J_{2,10} = -\mathcal{R}'_{\mathrm{pe}} \ln\Lambda \tag{B.34k}$$

$$J_{2,11} = -\frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{p}}+m_{\mathrm{e}}}\left[\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{pe}}}{T_{\mathrm{pe}}} + \frac{1}{2}\frac{\mathcal{R}'_{\mathrm{pe}}}{T_{\mathrm{pe}}}\left(v_{r\mathrm{p}1} - v_{r\mathrm{e}1}\right)\right]\ln\Lambda + \frac{3}{2}\sum_{b\neq\mathrm{p}}\frac{\mathcal{R}_{\mathrm{p}b}}{T_{\mathrm{e}}} \tag{B.34l}$$

$$J_{2,12} = \frac{2\mathcal{R}_{\mathrm{pe}}}{z_{\mathrm{e}1}} \ln\Lambda \tag{B.34m}$$

$$J_{2,13} = \frac{e z_{\mathrm{p}1}}{m_{\mathrm{p}}} \tag{B.34n}$$

$$J_{3,2} = 1 \tag{B.34o}$$

$$J_{3,11} = -1 \tag{B.34p}$$

$$J_{4,4} = 1 \tag{B.34q}$$

$$J_{4,9} = -\frac{\partial z_{\mathrm{i}1}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial \rho_{\mathrm{e}}} \tag{B.34r}$$

$$J_{4,12} = -\frac{\partial z_{\mathrm{i}1}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial T_{\mathrm{e}}} \tag{B.34s}$$

Neabsorbující složka

$$J_{5,1} = -\frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\frac{v_{r\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}} \tag{B.35a}$$

$$J_{5,2} = -\frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\frac{\rho_{\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}} \tag{B.35b}$$

$$J_{5,5} = 1 \tag{B.35c}$$

$$J_{5,6} = \frac{1}{\mathfrak{Y}_{\mathrm{i}}}\rho_{\mathrm{i}1}\frac{v_{r\mathrm{i}1}}{v_{r\mathrm{p}1}^2} \tag{B.35d}$$

$$J_{6,6} = 1 \tag{B.35e}$$

$$J_{7,7} = 1 \tag{B.35f}$$

$$J_{7,11} = -1 \tag{B.35g}$$
$$J_{8,8} = 1 \tag{B.35h}$$
$$J_{8,9} = -\frac{\partial z_{\mathrm{p}1}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial \rho_{\mathrm{e}}} \tag{B.35i}$$
$$J_{8,12} = -\frac{\partial z_{\mathrm{p}1}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial T_{\mathrm{e}}} \tag{B.35j}$$

Elektrony

$$J_{9,1} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}}\frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}} \tag{B.36a}$$
$$J_{9,5} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \tag{B.36b}$$
$$J_{9,9} = 1 \tag{B.36c}$$
$$J_{10,1} = -\frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} v_{r\,\mathrm{i}\,1} \tag{B.36d}$$
$$J_{10,2} = -\frac{z_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i}}}\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \rho_{\mathrm{i}\,1} \tag{B.36e}$$
$$J_{10,5} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} v_{r\,\mathrm{p}\,1} \tag{B.36f}$$
$$J_{10,6} = -\frac{m_{\mathrm{e}}}{m_{\mathrm{p}}} \rho_{\mathrm{p}\,1} \tag{B.36g}$$
$$J_{10,9} = v_{r\,\mathrm{e}\,1} \tag{B.36h}$$
$$J_{10,10} = \rho_{\mathrm{e}\,1} \tag{B.36i}$$
$$J_{11,11} = \frac{\partial Q^{\mathrm{rad}}}{\partial T_1} \tag{B.36j}$$
$$J_{12,12} = 1 \tag{B.36k}$$

Elektrické pole

$$J_{13,13} = \frac{1}{\Delta r_2} \tag{B.37a}$$
$$J_{13,26} = -\frac{1}{\Delta r_2} - \frac{1}{\Delta r_3} \tag{B.37b}$$
$$J_{13,39} = \frac{1}{\Delta r_3} \tag{B.37c}$$

Členy pro běžný uzlový bod modelu $1 < i < \mathrm{NR}$

Rovnice kontinuity ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 1$)

$$J_{j,j-13} = -(1-y_i)\frac{r_{i-1}^2 v_{r\,a,i-1}}{r_i^2 \Delta r_i} \tag{B.38a}$$
$$J_{j,j-12} = -(1-y_i)\frac{r_{i-1}^2 \rho_{a,i-1}}{r_i^2 \Delta r_i} \tag{B.38b}$$
$$J_{j,j} = v_{r\,a,i}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) \tag{B.38c}$$

$$J_{j,j+1} = \rho_{a,i}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) \tag{B.38d}$$

$$J_{j,j+13} = y_i \frac{r_{i+1}^2 v_{r\,a,i+1}}{r_i^2 \Delta r_{i+1}} \tag{B.38e}$$

$$J_{j,j+14} = y_i \frac{r_{i+1}^2 \rho_{a,i+1}}{r_i^2 \Delta r_{i+1}} \tag{B.38f}$$

Pro elektrony je navíc nutné přidat členy

$$J_{j,13(i-2)+4a} = \frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\rho_{a,i} v_{r\,a,i}\frac{1-y_i}{\Delta r_i} \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.39a}$$

$$J_{j,13(i-1)+4(a-1)+1} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_a} v_{r\,a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.39b}$$

$$J_{j,13(i-1)+4(a-1)+2} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\rho_{a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.39c}$$

$$J_{j,13(i-1)+4a} = \frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\rho_{a,i} v_{r\,a,i}\left(\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} - \frac{1-y_i}{\Delta r_i}\right) \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.39d}$$

$$J_{j,13i+4a} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\rho_{a,i} v_{r\,a,i}\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.39e}$$

Pohybová rovnice ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 2$)

$$J_{j,j-14} = -\frac{a_{a,i}^2 (1-y_i)}{\rho_{a,i}\Delta r_i} \tag{B.40a}$$

$$J_{j,j-13} = -\frac{v_{r\,a,i}(1-y_i)}{\Delta r_i} \tag{B.40b}$$

$$J_{j,j-12} = -\frac{a_{a,i-1}^2}{T_{a,i-1}}\frac{1-y_i}{\Delta r_i} \tag{B.40c}$$

$$J_{j,j-1} = -\frac{a_{a,i}^2}{\rho_{a,i}^2}\left(y_i\frac{\rho_{a,i+1}}{\Delta r_{i+1}} - (1-y_i)\frac{\rho_{a,i-1}}{\Delta r_i}\right) - \frac{1}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_\mathrm{p}}{m_a}\frac{\mathcal{R}_{ab}}{\tilde{\rho}_i} \tag{B.40d}$$

$$J_{j,j} = y_i \frac{v_{r\,a,i+1} - 2v_{r\,a,i}}{\Delta r_{i+1}} + (1-y_i)\frac{2v_{r\,a,i} - v_{r\,a,i-1}}{\Delta r_i} + \sum_{b\neq a}\mathcal{R}'_{ab}\ln\Lambda \tag{B.40e}$$

$$\begin{aligned} J_{j,j+1} = {} & \frac{1}{T_{a,i}}\left(\frac{a_{a,i}^2}{\rho_{a,i}}\left[\frac{\mathrm{d}\rho_a}{\mathrm{d}r}\right]_i + a_{a,i}^2\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)\right) - \\ & - \sum_{b\neq a}\frac{1}{T_{ab}}\frac{m_b}{m_a+m_b}\left[\mathcal{R}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}\right)\right]\ln\Lambda \end{aligned} \tag{B.40f}$$

$$J_{j,j+2} = \frac{2}{z_{a,i}}\sum_{b\neq a}\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda - \frac{e}{m_a}E_i \tag{B.40g}$$

$$J_{j,j-4(a-b)-1} = \frac{\mathcal{R}_{ab}}{\rho_{b,i}}\ln\Lambda - \frac{1}{2}\sum_{c\neq a}\frac{m_\mathrm{p}}{m_b}\frac{\mathcal{R}_{ac}}{\tilde{\rho}_i} \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.40h}$$

$$J_{j,j-4(a-b)} = -\mathcal{R}'_{ab}\ln\Lambda \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.40i}$$

$$J_{j,j-4(a-b)+1} = -\frac{1}{T_{ab}}\frac{m_a}{m_a+m_b}\left[\mathcal{R}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}\right)\right]\ln\Lambda \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.40j}$$

$$J_{j,j-4(a-b)+2} = \frac{2}{z_{b,i}}\mathcal{R}_{ab}\ln\Lambda \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.40k}$$

$$J'_{j,j-4(a-\mathrm{e})+1} = J_{j,j-4(a-\mathrm{e})+1} + \sum_{b\neq a} \frac{3}{2}\frac{\mathcal{R}_{ab}}{T_{\mathrm{e},i}} \tag{B.40l}$$

$$J'_{j,13i} = -\frac{ez_{a,i}}{m_a} \tag{B.40m}$$

$$J_{j,j+12} = \frac{a_{a,i}^2 y_i}{\rho_{a,i}\Delta r_{i+1}} \tag{B.40n}$$

$$J_{j,j+13} = \frac{v_{r\,a,i} y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.40o}$$

$$J_{j,j+14} = \frac{a_{a,i+1}^2}{T_{a,i+1}}\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.40p}$$

Přitom pro absorbující ionty je nutné přidat členy

$$J'_{j,j-13} = J_{j,j-13} + \frac{x_{\mathrm{i}\alpha}\alpha(1-y_i)}{\rho_{\mathrm{i},i}\Delta r_i}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} + x_{i\alpha}x_{\mathrm{id}\sigma}\frac{r_i}{\Delta r_i}\frac{1-y_i}{v_{r\mathrm{i},i}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41a}$$

$$J'_{j,j-1} = J_{j,j-1} + \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41b}$$

$$J'_{j,j} = J_{j,j} - \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right)\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} - \tag{B.41c}$$

$$- x_{\mathrm{i}\alpha}x_{\mathrm{id}\sigma}\frac{r_i}{v_{r\mathrm{i},i}^2}\left(\frac{(1-y_i)v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i} - \frac{y_i v_{r\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}}\right)\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41d}$$

$$J'_{j,j-4(a-\mathrm{e})-1} = J_{j,j-4(a-\mathrm{e})-1} - \frac{\delta\, x_{\mathrm{i}\alpha}}{\rho_{\mathrm{e},i}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41e}$$

$$J'_{j,j+1} = J_{j,j+1} + \frac{1}{T_{i-1}}\frac{\alpha}{2}x_{\mathrm{i}\alpha}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41f}$$

$$J'_{j,j+13} = J_{j,j+13} - \frac{\alpha x_{\mathrm{i}\alpha}y_i}{\rho_{\mathrm{i},i}\Delta r_{i+1}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha-1} - x_{\mathrm{i}\alpha}x_{\mathrm{id}\sigma}\frac{r_i}{\Delta r_{i+1}}\frac{y_i}{v_{r\mathrm{i},i}}\left(\frac{1}{\rho_{\mathrm{i},i}}\left[\frac{\mathrm{d}v_{r\mathrm{i}}}{\mathrm{d}r}\right]_i\right)^{\alpha} \tag{B.41g}$$

Zákon zachování energie ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 3$)

$$J_{j,j-14} = -\frac{a_{a,i}^2\rho_{a,i}}{r_i^2}\frac{(1-y_i)r_{i-1}^2}{\Delta r_i} \tag{B.42a}$$

$$J_{j,j-13} = -\frac{3}{2}k\frac{(1-y_i)}{\Delta r_i}v_{r\,a,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} \tag{B.42b}$$

$$J_{j,j-2} = \frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T_a}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{v_{r\,a,i}}{m_a} + \frac{a_{a,i}^2}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 v_{r\,a}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i - \sum_{b\neq a}\mathcal{K}_{ab}\left(\frac{\ln\Lambda}{\rho_{a,i}} - \frac{1}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_a}\right) -$$

$$- \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}\mathcal{R}_{ab}\left(v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}\right)\left(\ln\Lambda - \frac{\rho_{a,i}}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_a}\right) \tag{B.42c}$$

$$J_{j,j-1} = \frac{3}{2}k\left[\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right]_i\frac{\rho_{a,i}}{m_a} + a_{a,i}^2\rho_{a,i}\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) - \sum_{b\neq a}\mathcal{K}'_{ab}\ln\Lambda -$$

$$- \sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\ln\Lambda\left[\mathcal{R}_{ab} + \mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i} - v_{r\,b,i}\right)\right] \tag{B.42d}$$

$$J_{j,j} = \frac{3}{2}k\left(\frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}\right) v_{r\,a,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} + \frac{1}{T_{a,i}}\frac{a_{a,i}^2\rho_{a,i}}{r_i^2}\left[\frac{\mathrm{d}\left(r^2 v_{r\,a}\right)}{\mathrm{d}r}\right]_i + \\ + \sum_{b\neq a}\frac{\rho_{a,i}\ln\Lambda}{T_{ab}}\left(\frac{m_b}{m_a+m_b}\right)^2\left[\mathcal{R}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\right]\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right) + \\ + \sum_{b\neq a}\frac{\ln\Lambda}{T_{ab}}\frac{m_b}{m_a+m_b}\left[\frac{3}{2}\mathcal{K}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{K}'_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\right] + \sum_{b\neq a}\frac{\mathcal{K}_{ab}\ln\Lambda}{T_{b,i}-T_{a,i}} \tag{B.42e}$$

$$J_{j,j+1} = -\frac{2}{z_{a,i}}\sum_{b\neq a}\left[\frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right) + \mathcal{K}_{ab}\right]\ln\Lambda \tag{B.42f}$$

$$J_{j,j-4(a-b)-2} = -\mathcal{K}_{ab}\frac{\ln\Lambda}{\rho_{b,i}} + \frac{1}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_b}\sum_{c\neq a}\mathcal{K}_{ac} - \frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\frac{\ln\Lambda}{\rho_{b,i}} + \\ + \frac{1}{2\tilde{\rho}_i}\frac{m_\mathrm{p}}{m_b}\sum_{c\neq a}\frac{m_c}{m_a+m_c}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ac}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,c,i}\right) \qquad \text{pro všechna } b\neq a \tag{B.42g}$$

$$J_{j,j-4(a-b)-1} = \mathcal{K}'_{ab}\ln\Lambda + \frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\ln\Lambda\left[\mathcal{R}_{ab} + \mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\right] \\ \text{pro všechna } b\neq a \tag{B.42h}$$

$$J_{j,j-4(a-b)} = \frac{\rho_{a,i}\ln\Lambda}{T_{ab}}\frac{m_a m_b}{\left(m_a+m_b\right)^2}\left[\mathcal{R}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{R}'_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\right]\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right) + \\ + \frac{\ln\Lambda}{T_{ab}}\frac{m_a}{m_a+m_b}\left[\frac{3}{2}\mathcal{K}_{ab} + \frac{1}{2}\mathcal{K}'_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right)\right] - \frac{\mathcal{K}_{ab}\ln\Lambda}{T_{b,i}-T_{a,i}} \text{ pro všechna } b\neq a \tag{B.42i}$$

$$J_{j,j-4(a-b)+1} = -\frac{2}{z_{b,i}}\left[\frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right) + \mathcal{K}_{ab}\right]\ln\Lambda \qquad \text{pro všechna } b\neq a \tag{B.42j}$$

$$J'_{j,j-4(a-\mathrm{e})} = J_{j,j-4(a-\mathrm{e})} - \frac{1}{T_{\mathrm{e},i}}\left(\frac{3}{2}\sum_{b\neq a}\frac{m_b}{m_a+m_b}\rho_{a,i}\mathcal{R}_{ab}\left(v_{r\,a,i}-v_{r\,b,i}\right) + \frac{3}{2}\sum_{b\neq a}\mathcal{K}_{ab}\right) \tag{B.42k}$$

$$J_{j,j+12} = \frac{a_{a,i}^2\rho_{a,i}}{r_i^2}\frac{y_i r_{i+1}^2}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.42l}$$

$$J_{j,j+13} = \frac{3}{2}k\frac{y_i}{\Delta r_{i+1}}v_{r\,a,i}\frac{\rho_{a,i}}{m_a} \tag{B.42m}$$

Pro absorbující ionty je nutné přidat členy

$$J'_{j,j-14} = J_{j,j-14} + \frac{r_i}{v_{r\mathrm{i},i}}\frac{1-y_i}{\Delta r_i}Q_\mathrm{i}'^{\mathrm{rad}} \tag{B.43a}$$

$$J'_{j,j-2} = J_{j,j-2} + \frac{\alpha-1}{\rho_{\mathrm{i},i}}Q_\mathrm{i}^{\mathrm{rad}} \tag{B.43b}$$

$$J'_{j,j-1} = J_{j,j-1} + \frac{r_i}{v_{r\mathrm{i},i}^2}\left(\frac{y_i v_{r\mathrm{i},i+1}}{\Delta r_{i+1}} - \frac{(1-y_i)v_{r\mathrm{i},i-1}}{\Delta r_i}\right)Q_\mathrm{i}'^{\mathrm{rad}} - \frac{\alpha}{v_{r\mathrm{i},i}}Q_\mathrm{i}^{\mathrm{rad}} \tag{B.43c}$$

$$J'_{j,j} = J_{j,j} + \frac{\alpha-1}{2T_{\mathrm{i},i}}Q_\mathrm{i}^{\mathrm{rad}} \tag{B.43d}$$

$$J'_{j,j-4(\mathrm{i}-\mathrm{e})-2} = J_{j,j-4(\mathrm{i}-\mathrm{e})-2} - \frac{\delta}{\rho_{\mathrm{e},i}}Q_\mathrm{i}^{\mathrm{rad}} \tag{B.43e}$$

$$J'_{j,j+12} = J_{j,j+12} - \frac{r_i}{v_{\mathrm{ri},i}} \frac{y_i}{\Delta r_i} Q_{\mathrm{i}}^{\prime\mathrm{rad}} \tag{B.43f}$$

Pro elektrony je nutné přidat členy

$$J'_{j,j-4(\mathrm{e}-\mathrm{p})-2} = J_{j,j-4(\mathrm{e}-\mathrm{p})-2} - \frac{Q^{\mathrm{rad}}}{\rho_{\mathrm{p},i}} \tag{B.44a}$$

$$J'_{j,j-2} = J_{j,j-2} + \frac{Q_{\mathrm{ff}}^{\mathrm{rad}} \frac{N_{\mathrm{H}^0,i}}{N_{\mathrm{H}^+,i}} - Q_{\mathrm{bf}}^{\mathrm{rad}}}{\rho_{\mathrm{ei}} \left(\frac{N_{\mathrm{H}^0,i}}{N_{\mathrm{H}^+,i}} + 1 \right)} \tag{B.44b}$$

$$J'_{j,j} = J_{j,j} - \frac{\partial Q^{\mathrm{rad}}}{\partial T_i} \tag{B.44c}$$

Ionizační rovnováha ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 3$)

$$J_{j,j} = 1 \tag{B.45a}$$

$$J_{j,j-(a-\mathrm{e})-3} = -\frac{\partial z_{a,i}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial \rho_{\mathrm{e}}} \tag{B.45b}$$

$$J_{j,j-(a-\mathrm{e})-1} = -\frac{\partial z_{a,i}(r,\rho_{\mathrm{e}},T_{\mathrm{e}})}{\partial T_{\mathrm{e}}} \tag{B.45c}$$

Elektrické pole ($j = 13i$)

$$J_{j,j-13} = -\frac{1-y_i}{\Delta r_i} \frac{r_{i-1}^2}{r_i^2} \tag{B.46a}$$

$$J_{j,j-12+4(a-1)} = -4\pi e \frac{z_{a,i}}{m_a} \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.46b}$$

$$J_{j,j-9+4(a-1)} = -4\pi e \frac{\rho_{a,i}}{m_a} \qquad \text{pro všechna } b \neq a \tag{B.46c}$$

$$J_{j,j} = \frac{1-y_i}{\Delta r_i} - \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \tag{B.46d}$$

$$J_{j,j+13} = \frac{y_i}{\Delta r_{i+1}} \frac{r_{i+1}^2}{r_i^2} \tag{B.46e}$$

Členy pro vnější okraj sítě $i = \mathrm{NR}$

Rovnice kontinuity ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 1$)

$$J_{j,j-13} = -\frac{r_{i-1}^2 v_{r\,a,i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.47a}$$

$$J_{j,j-12} = -\frac{r_{i-1}^2 \rho_{a,i-1}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.47b}$$

$$J_{j,j} = \frac{r_i^2 v_{r\,a,i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.47c}$$

$$J_{j,j+1} = \frac{r_i^2 \rho_{a,i}}{\overline{r}_i^2 \Delta r_i} \tag{B.47d}$$

Pro elektrony je navíc nutné přidat členy

$$J_{j,13(i-2)+4(a-1)+1} = -\frac{1}{2} \frac{m_{\mathrm{e}}}{m_a} \overline{v}_{r\,a,i} \left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r} \right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48a}$$

$$J_{j,13(i-2)+4(a-1)+2} = -\frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{\rho}_{a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48b}$$

$$J_{j,13(i-2)+4a} = \frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{\rho}_{a,i}\overline{v}_{r\,a,i}\frac{1}{\Delta r_i} \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48c}$$

$$J_{j,13(i-1)+4(a-1)+1} = -\frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{v}_{r\,a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48d}$$

$$J_{j,13(i-1)+4(a-1)+2} = -\frac{1}{2}\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{\rho}_{a,i}\left[\frac{\mathrm{d}z_a}{\mathrm{d}r}\right]_i \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48e}$$

$$J_{j,13(i-1)+4a} = -\frac{m_\mathrm{e}}{m_a}\overline{\rho}_{a,i}\overline{v}_{r\,a,i}\frac{1}{\Delta r_i} \qquad \text{pro všechna } a \neq \mathrm{e} \tag{B.48f}$$

Rychlost ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 2$)

$$J_{j,j-26} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.49a}$$

$$J_{j,j-13} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.49b}$$

$$J_{j,j} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.49c}$$

Teplota ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 3$)

$$J_{j,j-26} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.50a}$$

$$J_{j,j-13} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.50b}$$

$$J_{j,j} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.50c}$$

Náboj ($j = 13(i-1) + 4(a-1) + 4$)

$$J_{j,j} = 1 \tag{B.51a}$$

$$J_{j,j-(a-\mathrm{e})-3} = -\frac{\partial z_{a,i}(r,\rho_\mathrm{e},T_\mathrm{e})}{\partial \rho_\mathrm{e}} \tag{B.51b}$$

$$J_{j,j-(a-\mathrm{e})-1} = -\frac{\partial z_{a,i}(r,\rho_\mathrm{e},T_\mathrm{e})}{\partial T_\mathrm{e}} \tag{B.51c}$$

Elektrické pole ($j = 13i$)

$$J_{j,j-26} = \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.52a}$$

$$J_{j,j-13} = -\frac{1}{\Delta r_i} - \frac{1}{\Delta r_{i-1}} \tag{B.52b}$$

$$J_{j,j} = \frac{1}{\Delta r_i} \tag{B.52c}$$

V jednotlivých vzorcích bylo použito označení

$$\mathcal{R}'_{ab} = \rho_{b,i}\frac{4\pi q_{a,i}^2 q_{b,i}^2}{m_a m_b k T_{ab}}\frac{G'(x_{ab})}{\alpha_{ab}}, \tag{B.53a}$$

$$\mathcal{K}'_{ab} = -\frac{2x_{ab}}{\alpha_{ab}}\mathcal{K}_{ab}, \tag{B.53b}$$

$$Q_{\mathrm{i}}^{\prime\,\mathrm{rad}} = \frac{Q_{\mathrm{i}}^{\mathrm{rad}}}{G(\sigma_i,\mu_c)}G_\sigma(\sigma_i,\mu_c), \tag{B.53c}$$

$$\begin{aligned} G_\sigma(\sigma,\mu_c) = \int_0^\infty \mathrm{d}y\, y^{\alpha-1} \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \Bigg\{ \left[\frac{\beta_c\beta'}{\beta^2} - \frac{\beta'_c}{\beta}\right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\phi(x) \exp\left(-\frac{y\Phi(x)}{1+\sigma\mu^2}\right) + \\ + \left[D(\mu) - \frac{\beta_c}{\beta}\right] \frac{y\mu^2}{(1+\sigma\mu^2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, x\phi(x)\Phi(x) \exp\left(-\frac{y\Phi(x)}{1+\sigma\mu^2}\right)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{B.53d}$$

$$\beta'_c = \frac{1}{2}\int_{\mu_c}^{1} \mathrm{d}\mu \frac{\mu^2}{1+\sigma\mu^2}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau_\mu}}{\tau_\mu} - \mathrm{e}^{-\tau_\mu}\right], \tag{B.53e}$$

$$\beta' = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{d}\mu \frac{\mu^2}{1+\sigma\mu^2}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-\tau_\mu}}{\tau_\mu} - \mathrm{e}^{-\tau_\mu}\right]. \tag{B.53f}$$

Seznam publikací

Články v recenzovaných časopisech

Multicomponent radiatively driven stellar winds
II. Gayley-Owocki heating in multitemperature winds of OB stars
Krtička, J., Kubát, J., 2001, zasláno do *Astronomy and Astrophysics*

Multicomponent radiatively driven stellar winds
I.Nonisothermal three-component wind of hot B stars
Krtička, J., Kubát, J., 2001, *Astronomy and Astrophysics* **369**, 222

Properties and nature of Be stars
XX. Binary nature and orbital elements of γ Cas
Harmanec, P., Habuda, P., Štefl, S., Hadrava, P., Korčáková, D., Koubský, P., **Krtička, J.**, Kubát, J., Škoda, P., Šlechta, M., Wolf, M., 2000, *Astronomy and Astrophysics Letters* **364**, 85

Isothermal two-component stellar wind of hot stars
Krtička, J., Kubát, J., 2000, *Astronomy and Astrophysics* **359**, 983

Atmosphere parameters of four K-giants obtained by spectrum fitting
Krtička, J., Štefl, V., 1999, *Astronomy and Astrophysics Supplement Series* **138**, 47

Photometry of Symbiotic Stars: an International Campaign VIIb
CQ DRA (4Dra), YY Her, V 443 Her, BX Mon, AG Peg, AX Per, V 741 Per, FG Sge, QW Sge, PU Vul
Hric, L., Skopal, A., Urban, Z., Petrík, K., Komžík, R., Chochol, D., Pribulla, T., Niarchos, P., Rovithis-Livaniou, H., Rovithis, P., Kaserkevich, V. S., Shpychka, I. V., Velič, Z., Halevin, A. V., Andronov, I. L., Okša, G., **Krtička, J.**, 1996, *Contributions of Astronomical Observatory Skalnaté Pleso* **26**, 121

Skriptum

Úlohy z astrofyziky
Štefl, V., **Krtička, J.**, 2000, Brno, MU

Sborníky

Two-component stellar wind in hot stars
Krtička, J., Kubát, J.. 2000, *Thermal and ionization aspects of flows from hot stars: observations and theory*, ASP Conf. Ser. Vol. 204, 235

Determination of Parameters of K Giants Atmosphere
Krtička, J., Štefl, V., 2000, *METACenter Annual Report 1999*, 55

Model atmospheres for K-giants
Krtička, J., 1998, *Proceedings of the 20th Stellar Conference of the Czech and Slovak Astronomical Institutions*, 73

Literatura

Abbott, D. C., 1978, *Astrophys. J.* **225**, 893

Abbott, D. C., 1980, *Astrophys. J.* **242**, 1183

Abbott, D. C., 1982, *Astrophys. J.* **259**, 282

Abbott, D. C., Bieging, J. H., Churchwell, E., 1984, *Astrophys. J.* **280**, 671

Abbott, D. C., Bieging, J. H., Churchwell, E., Cassinelli, J. P., 1980, *Astrophys. J.* **238**, 196

Abbott, D. C., Lucy, L. B., 1985, *Astrophys. J.* **288**, 679

Aufdenberg, J. P., Hauschildt, P. H., Baron, E., 1999, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **302**, 599

Aufdenberg, J. P., Hauschildt, P. H., Shore, S. N., Baron, E., 1998, *Astrophys. J.* **498**, 837

Babel, J., 1995, *Astron. & Astrophys.* **301**, 823

Babel, J., 1996, *Astron. & Astrophys.* **309**, 867

Berghöfer. T. W., Schmitt, J. H. M. M., 1993, *Astron. & Astrophys.* **290**, 435

Bieging, J. H., Abbott, D. C., Churchwell, E. B., 1989, *Astrophys. J.* **340**, 518

Beutler, G., Numerische Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen, Mitt. Satell.-Beobachtungsstn. Zimmerwald, 4, Astron. Inst., Univ. of Bern, Bern, Switzerland, 1979

Biermann, L., 1951, *Zs. f. Ap.* **29**, 274

Bjorkman, J. E., 1995, *Astrophys. J.* **453**, 369

Burgers, J. M., Flow equations for composite gases, Academic Press, New York 1969

Bürgi, A., 1992, *J. Geophys. Res.* **97**, 3137

Bjorkman, J. E., Cassinelli, J. P., 1993, *Astrophys. J.* **409**, 429

Брагинский, Ц. И., Вопросы теории плазмы, ред. Леонтович М. А., Госатомиздат, Москва 1963

Cassinelli, J. P., Cohen, D. H., MacFarlane, J. J., Drew, J. E., Lynas-Gray, A. E., Hoare, M. G., Vallerga, J. V., Welsh, B. Y., Vedder, P. W., Hubeny, I., Lanz, T., 1995, *Astrophys. J.* **438**, 932

Cassinelli, J. P., Cohen, D. H., MacFarlane, J. J., Drew, J. E., Lynas-Gray, A. E., Hubeny, I., Vallerga, J. V., Welsh, B. Y., Hoare, M. G., 1996, *Astrophys. J.* **460**, 949

Cassinelli, J. P., Miller, N. A., Waldron, W. L., MacFarlane, J. J., Cohen, D. H., 2001, *Astrophys. J. Letters* **554**, 55

Castor, J. I., 1970, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **149**, 111

Castor, J. I., 1974, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **169**, 279

Castor, J. I., Abbott, D. C., Klein, R. I., 1975, *Astrophys. J.* **195**, 157 (CAK)

Castor, J. I., Abbott, D. C., Klein, R. I., 1976, in Physique des mouvements dans les atmosphères stellaires, R. Cayrel & M. Sternberg eds., CNRS Paris, str. 363

Cohen, D. H., Cassinelli, J. P., Waldron, W. L., 1997, *Astrophys. J.* **488**, 397

Courant, R., Hilbert, D., Partial differential equations, Mir, Moskva 1964

Dachs, J., Hummel, W., 1996, *Astron. & Astrophys.* **312**, 818

de Jong, J. A., Henrichs, H. F., Kaper, L., Nichols, J. S., Bjorkman, K., Bohlender, D. A., Cao, H., Gordon, K., Hill, G., Jiang, Y., Kolka, I., Morrison, N., Neff, J., O'Neal, D., Scheers, B., Telting, J. H., 2001, *Astron. & Astrophys.* **368**, 601

Drake, S. A., Linksy, J. L., Schmitt, J. H. M. M., Rosso, C., 1994, *Astrophys. J.* **420**, 387

Dreicer, H., 1959, *Phys. Rev.* **115**, 238

Dreicer, H., 1960, *Phys. Rev.* **117**, 329

Drew, J. E., 1985, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **217**, 867

Drew, J. E., 1989, *Astrophys. J., Suppl. Ser.* **71**, 267

Drew, J. E., Proga, D., Stone, J. M., 1998, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **296**, L6

Dworetsky, M. M., Budaj, J., 2000, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **318**, 1264

Feldmeier, A., 2000, , Thermal and ionization aspects of flows from hot stars: observations and theory, ed. H. J. G. L. M. Lamers a A. E. Sapar, ASP Conf. Ser. Vol. 204, str. 151

Feldmeier, A., Puls, J., Pauldrach, A. W. A., 1997, *Astron. & Astrophys.* **322**, 878

Feldmeier, A., Shlosman, I., 2000, *Astrophys. J. Letters* **532**, 125

Friend, D. B., Abbott, D. C., 1986, *Astrophys. J.* **311**, 701

Friend, D. B., Castor, J. I., 1983, *Astrophys. J.* **272**, 259

Friend, D. B., MacGregor, K. B., 1984, *Astrophys. J.* **282**, 591

Garmany, C., 1981, *Astrophys. J.* **250**, 660

Gayley, K. G., 1995, *Astrophys. J.* **454**, 410

Gayley, K. G., Owocki, S. P., 1994, *Astrophys. J.* **434**, 684 (GO)

Gayley, K. G., Owocki, P., Cranmer, S. R., 1995, *Astrophys. J.* **442**, 296

Gies, D. R., Lambert, D. L., 1992, *Astrophys. J.* **387**, 673

Groote, D., Hunger, K., 1997, *Astron. & Astrophys.* **319**, 250

Hamann, W.-R., 1981, *Astron. & Astrophys.* **100**, 169

Harmanec, P., 1988, *Bull. Astron. Inst. Czechosl.* **39**, 329

Henyey, L. G., Forbes, J. E., Gould, N. L., 1964, *Astrophys. J.* **139**, 306

Hubený, I., 1988, *Computer Physics Comm.* **52**, 103

Hubený, I., Lanz T., 1992, *Astron. & Astrophys.* **262**, 501

Hummer, D. G., Rybicki, G. B., 1985, *Astrophys. J.* **293**, 258

Hunger, K., Groote, D., 1999, *Astron. & Astrophys.* **351**, 554

Jenkins, M. A., Traub, J. F., 1970, *SIAM J. Numer. Anal.* **7**, 545

Johnson, M. C., 1925, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **85**, 813

Johnson, M. C., 1926, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **86**, 300

Kautsky, J., Elhay, S., 1982, *Numer. Math.* **40**, 407

Kilian, J., 1994, *Astron. & Astrophys.* **282**, 867

Krall, N. A., Trivelpiece, A. W., Principles of Plasma Physics, McGraw-Hill, New York, 1973

Krtička, J., Kubát, J., 2000, *Astron. & Astrophys.* **359**, 983

Krtička, J., Kubát, J., 2001, *Astron. & Astrophys.* **369**, 222

Krtička, J., Kubát, J., 2001b, zasláno do *Astron. & Astrophys.*

Kubát, J., 2001, *Astron. & Astrophys.* **366**, 210

Kubát, J., Puls, J., Pauldrach, A. W. A., 1999, *Astron. & Astrophys.* **341**, 587

Kudritzki, R. P., Pauldrach, A. W. A., Puls, J., Abbott, D. C., 1989, *Astron. & Astrophys.* **219**, 205 (KPPA)

Kudritzki, R. P., Puls, J., Lennon, D. J., Venn, K. A., Reetz, J., Najarro, F., McCarthy, J. K., Herrero, A., 1999, *Astron. & Astrophys.* **350**, 970

Kudritzki, R. P., Puls, J., 2000, *Annual Rev. of Astron. & Astrophys.* **38**, 613

Lamers, H. J. G. L. M., Cassinelli, J. P., Introduction to Stellar Winds, Cambridge Univ. Press, 1999

Lamers, H. J. G. L. M., Leitherer, C., 1993, *Astrophys. J.* **412**, 771

Lamers, H. J. G. L. M., Rogerson, J. B., 1978, *Astron. & Astrophys.* **66**, 417

Lamers, H. J. G. L. M., Snow, T. P., Lindholm, D. M., 1995, *Astrophys. J.* **455**, 269 (LSL)

Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М., Теоретическая фызика, Том VI, Гидродинамика, Москва, Наука 1986

Landstreet, J. D., 1980, *Astronom. J.* **85**, 611

Lanz, T., Bouret, J.-C., Heap, S. R., Hubeny, I., Hillier, D. J., Lennon, D. J., Smith, L. J., Evans, C. J., Owocki, S. P., *American Astronomical Society Meeting* **197**, 7811

Lucy, L. B., Solomon, P. M., 1970, *Astrophys. J.* **159**, 879

Lucy, L. B., White, R. L., 1980, *Astrophys. J.* **241**, 300

MacGregor, K. B., Friend, D. B., 1987, *Astrophys. J.* **312**, 659

Michaud, G., 1970, *Astrophys. J.* **160**, 641

Mihalas, D., *Stellar Atmospheres* 2nd ed., W. H. Freeman & Comp., San Francisco, 1978

Milne, E. A., 1923, *Camb. Phil. Soc. Trans.* **26**, 512

Milne, E. A., 1926. *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **86**, 459

Morton, D. C., 1967, *Astrophys. J.* **147**, 1017

Murdoch, K. A., Drew, J. E., Anderson, L. S., 1994, *Astron. & Astrophys.* **284**, L27

Nobili, L., Turola, R., 1988, *Astrophys. J.* **333**, 248

Oskinova, L. M., Ignace, R., Brown, J. C., Cassinelli, J. P., 2001, v tisku *Astron. & Astrophys.*

Osmer, P. S., Peterson, D. M., 1974, *Astrophys. J.* **187**, 117

Owocki, S. P., 1991, Stellar Atmospheres: Beyond Classical Models, ed. L. Crivellari, I. Hubeny a D. G. Hummer, Dordrecht, Kluwer, str. 235

Owocki, S. P., 1993, The Atmospheres of Early Type Stars, ed. U. Heber a S. Jeffrey, Berlin, Springer, str. 393

Owocki, S. P., 1994, Pulsation, rotation and mass loss in early-type stars, IAU symp. No. 162, ed. L. A. Balona, H. F. Henrichs, J. M. Le Contel

Owocki, S. P., Castor, J. I., Rybicki, G. B., 1988, *Astrophys. J.* **335**, 914

Owocki, S. P., Puls, J., 1999, *Astrophys. J.* **510**, 355

Owocki, S. P., Cranmer, S. R., Blondin, J. M., 1994, *Astrophys. J.* **424**, 887

Owocki, S. P., Cranmer, S. R., Gayley, K. G., 1996, *Astrophys. J. Letters* **472**, 115

Owocki, S. P., Rybicki, G. B., 1984, *Astrophys. J.* **284**, 337

Parker, E. N., 1958, *Astrophys. J.* **128**, 664

Pauldrach, A. W. A., 1987, *Astron. & Astrophys.* **183**, 295

Pauldrach, A. W. A., Hofmann, T. L., Lennon, M., zasláno do *Astron. & Astrophys.*

Pauldrach, A. W. A., Kudritzki, R. P., Puls, J., Butler, K., Hunsinger, J., 1994, *Astron. & Astrophys.* **283**, 525

Pauldrach, A. W. A., Puls, J., *Astron. & Astrophys.* **237**, 409

Pauldrach, A. W. A., Puls, J., Kudritzki, R. P., 1986, *Astron. & Astrophys.* **164**, 86

Pavlakis, K. G., Kylafis, N. D., 1996, *Astrophys. J.* **467**, 292

Petrenz, P., Puls, J., 2000, *Astron. & Astrophys.* **358**, 956

Poe, C. H., Owocki, S. P., Castor, J. I., 1990, *Astrophys. J.* **358**, 199

Poe, C. H., Friend, D. B., 1986, *Astrophys. J.* **311**, 317

Porter, J. M., Drew, J. E., 1995, *Astron. & Astrophys.* **296**, 761

Porter, J. M., Skouza, B. A., 1999, *Astron. & Astrophys.* **344**, 205

Prinja, K. R., Howarth, I. D., 1986, *Astrophys. J., Suppl. Ser.* **61**, 357

Puls, J., 1987, *Astron. & Astrophys.* **184**, 227

Puls, J., Hummer, D. G., 1988, *Astron. & Astrophys.* **191**, 87

Puls, J., Springmann, U., Lennon, M. M., 2000, *Astron. & Astrophys., Suppl. Ser.* **141**, 23

Ralston, A., A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, New York 1965

Rosner, R., Tucker, W. H., Vaiana, G. S., 1978, *Astrophys. J.* **220**, 643

Rybicki, G. B., Hummer, D. G., 1978, *Astrophys. J.* **219**, 645

Scuderi, S., Panagia, N., Stanghellini, C., Trigilio, C., Umana, G., 1998, *Astron. & Astrophys.* **332**, 251

Smith, K. C., Dworetsky, M. M., 1988, ed. S. J. Adelman, T. Lanz T., Elemental abundance analyses, Institut d' Astronomie de l' Univ. de Lausanne, Switzerland, str. 32

Smith, M. A., Groote, D., 2001, *Astron. & Astrophys.* **372**, 208

Соболев, В. В., Движущийеся оболочки звезд, Ленинград, Ленингр. гос. университет 1947

Springmann, U. W. E., Pauldrach, A. W. A., 1992, *Astron. & Astrophys.* **262**, 515

Sur, R. K., 1926, *Astrophys. J.* **63**, 111

Traving, G., Baschek, B., Holweger, H., 1966, Abhand. Hamburg. Sternwarte, band VIII, Nr. 1

Vázquez, A. C., 2000, The Be Phenomenon in Early-Type Stars, ASP Conf. Ser. 214, ed. M. A. Smith, H. F. Henrichs, J. Fabregat, str. 113

Vink, J. S., de Koter, A., Lamers, H. J. G. L. M., 1999, *Astron. & Astrophys.* **350**, 181

Vink, J. S., de Koter, A., Lamers, H. J. G. L. M., 2000, *Astron. & Astrophys.* **362**, 295

Vink, J. S., de Koter, A., Lamers, H. J. G. L. M., 2001, *Astron. & Astrophys.* **369**, 574

Waldron, W. L., Cassinelli, J. P., 2001, *Astrophys. J. Letters* **548**, 45

Waters, L. B. F. M., Marlborough, J. M., Geballe, T. R., Oosterbroek, T., Zaal, P., 1993, *Astron. & Astrophys.* **272**, L9

Wineland, D., Dalibard, J., Cohen-Tannoudji, C., 1992, *J. Opt. Soc. Am. B* **32**

Zaal, P. A., de Koter, A., Waters, L. B. F. M., Marlborough, J. M., Geballe, T. R., Oliveira, J. M., Foing, B. H., 1999, *Astron. & Astrophys.* **349**, 573

Zboril, M., North, P., 1999, *Astron. & Astrophys.* **345**, 244