

Relativistická kvantová mechanika

Michal Lenc

Poznámky k přednášce v jarním semestru 2001

1	Obrazy	2
1.1	Postulát o kvantové kausalitě	2
1.2	Evoluční operátor	2
1.3	Schrödingerův a Heisenbergův obraz	3
1.4	Interakční obraz	4
2	Relativita a antičástice podle Feynmana	5
3	Relativistická kvantová mechanika	7
3.1	Historický přístup	7
4	Diracova rovnice v elektromagnetickém poli	8
4.1	Vlastnosti spinorů	8
4.2	Lorentzova transformace spinorů	10
4.3	Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice	12
4.4	Diracova rovnice v elektromagnetickém poli	13
4.5	Heisenbergův obraz	14
4.6	Rovnice kontinuity	15
5	Rovinné vlny	16
6	Transformace Diracovy rovnice	17
6.1	Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)	17
6.2	Rovnice částice v elektromagnetickém poli	18
7	Rozptyl elektronu na jádře	21
8	Invariantní účinný průřez	24
9	Spinová matice hustoty	25
10	Spinové středování	28

1 Obrazy

1.1 Postulát o kvantové kausalitě

Postulát o kvantové kausalitě říká, že:

- (a) Stav systému v čase t_0 jednoznačně určuje stav systému v libovolném okamžiku $t > t_0$ i v okamžiku $t < t_0$.
- (b) Platí princip superposice: Jsou-li stavy $|\psi_1(t)\rangle$ a $|\psi_2(t)\rangle$ časové evoluce stavů $|\psi_1(t_0)\rangle$ a $|\psi_2(t_0)\rangle$, pak také stav $c_1|\psi_1(t_0)\rangle + c_2|\psi_2(t_0)\rangle$ má časovou evoluci $c_1|\psi_1(t)\rangle + c_2|\psi_2(t)\rangle$.
- (c) Norma stavového vektoru se během časové evoluce nemění.

1.2 Evoluční operátor

Podle postulátu o kvantové kausalitě existuje jednoznačný vztah mezi vektory $|\psi(t)\rangle$ a $|\psi(t_0)\rangle$ a lze tedy definovat evoluční operátor $\hat{T}(t, t_0)$

$$|\psi(t)\rangle = \hat{T}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1}. \quad (1.1)$$

Ze zachování normy dostáváme

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \langle \hat{T}(t, t_0) \psi(t_0) | \hat{T}(t, t_0) \psi(t_0) \rangle = \langle \psi(t_0) | \psi(t_0) \rangle \quad (1.2)$$

a platí tak

$$\hat{T}^\dagger(t, t_0) \hat{T}(t, t_0) = \hat{1}. \quad (1.3)$$

Dále porovnáním

$$\begin{aligned} |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_1) |\psi(t_1)\rangle = \hat{T}(t_2, t_1) \hat{T}(t_1, t_0) |\psi(t_0)\rangle \quad , \\ |\psi(t_2)\rangle &= \hat{T}(t_2, t_0) |\psi(t_0)\rangle \end{aligned} \quad (1.4)$$

dostáváme

$$\hat{T}(t_2, t_0) = \hat{T}(t_2, t_1) \hat{T}(t_1, t_0) \quad . \quad (1.5)$$

Evoluční operátor je unitární, neboť také

$$\hat{T}(t, t_0) \hat{T}^+(t, t_0) = \hat{1} \quad (1.6)$$

a dále máme

$$\hat{T}^+(t, t_0) = \hat{T}(t_0, t) \quad . \quad (1.7)$$

Pro Taylorův rozvoj $\hat{T}(t + \Delta t, t)$ dostáváme

$$\hat{T}(t + \Delta t, t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \hat{H} \Delta t + \dots, \quad (1.8)$$

kde \hat{H} je nějaký hermiteovský operátor. Evoluční operátor splňuje rovnici

$$i \hbar \frac{d}{dt} \hat{T}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{T}(t, t_0) \quad , \quad \hat{T}(t_0, t_0) = \hat{1} \quad . \quad (1.9)$$

1.3 Schrödingerův a Heisenbergův obraz

Ve Schrödingerově obraze předpokládáme, že se v čase mění stavový vektor. Pro stavový vektor platí přirozeně ta samá rovnice, jako pro evoluční operátor (Schrödingerova rovnice)

$$i \hbar \frac{d}{dt} |\psi_s(t)\rangle = \hat{H}_s(t) |\psi_s(t)\rangle \quad (1.10)$$

a pokud operátory závisí na čase, tak pouze explicitně. V Heisenbergově obraze naopak předpokládáme, že se stavový vektor v čase nemění. Požadavek rovnosti vyjádření střední hodnoty libovolné fyzikální veličiny v obou obrazech vede ke vztahu mezi operátory

$$\begin{aligned}
|\psi_H\rangle &\equiv |\psi_S(t_0)\rangle = \hat{T}^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad , \\
\langle \psi_S(t) | \hat{F}_S | \psi_S(t) \rangle &= \langle \psi_H | \hat{F}_H(t) | \psi_H \rangle = \langle \psi_H | \hat{T}(t, t_0) \hat{F}_H(t) \hat{T}^+(t, t_0) | \psi_H \rangle \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.11}$$

tedy

$$\hat{F}_H(t) = \hat{T}^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}(t, t_0) \quad .
\tag{1.12}$$

Rovnici pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze získáme derivováním předchozího vztahu

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \hat{F}_H &= \frac{d\hat{T}^+}{dt} \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \frac{d\hat{T}}{dt} + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} = \\
&\frac{1}{i\hbar} \left(-\hat{T}^+ \hat{H}_S \hat{F}_S \hat{T} + \hat{T}^+ \hat{F}_S \hat{H}_S \hat{T} \right) + \hat{T}^+ \frac{\partial \hat{F}_S}{\partial t} \hat{T} \quad .
\end{aligned}
\tag{1.13}$$

S uvážením (1.6) máme

$$\frac{d}{dt} \hat{F}_H = \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}_H, \hat{H}_H] + \frac{\partial \hat{F}_H}{\partial t} \quad .
\tag{1.14}$$

1.4 Interakční obraz

Velmi důležitým pro aplikace je interakční obraz. Předpokládáme, že hamiltonián je složen ze dvou částí, $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}(t)$, kde \hat{H}_0 je na čase nezávislá základní část a $\hat{V}(t)$ je interakční část, která může explicitně záviset na čase. Zvolíme

$$\begin{aligned}
\hat{T}_0(t, t_0) &= \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{H}_0 (t - t_0) \right\} \quad , \\
F_I &= \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{F}_S \hat{T}_0(t, t_0) \quad , \quad |\psi_I(t)\rangle = \hat{T}_0^+(t, t_0) |\psi_S(t)\rangle \quad ,
\end{aligned}
\tag{1.15}$$

a dostáváme pak

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_I(t)\rangle = \hat{H}_I(t) |\psi_I(t)\rangle \quad , \quad \hat{H}_I(t) = \hat{T}_0^+(t, t_0) \hat{V}(t) \hat{T}_0(t, t_0) \quad ,$$

$$\frac{d}{dt} \hat{F}_I = \hat{T}_0^+(t, t_0) \frac{\partial \hat{V}(t)}{\partial t} \hat{T}_0(t, t_0) + [\hat{H}_0, \hat{F}_I] \quad .$$
(1.16)

2 Relativita a antičástice podle Feynmana

Amplituda pravděpodobnosti přechodu

$$A(\phi_0 \rightarrow \chi) = -i \int d^3 \vec{x} \chi^*(\vec{x}) U(\vec{x}) \phi_0(\vec{x}) = -i \langle \chi | \hat{U} | \phi_0 \rangle \quad .$$
(2.1)

Předpokládáme

$$\langle \phi_0 | \phi_0 \rangle = 1 \quad , \quad \langle \phi_0 | \hat{U} | \phi_0 \rangle = 0 \quad .$$
(2.2)

Působení v čase t_1 označme \hat{U}_1 , působení v čase t_2 jako \hat{U}_2 atd. Máme pak

$$A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) = 1 - \sum_m \langle \phi_0 | \hat{U}_2 | \psi_m \rangle \exp\{-i E_m (t_2 - t_1)\} \langle \psi_m | \hat{U}_1 | \phi_0 \rangle \quad .$$
(2.3)

Za $|\psi_m\rangle$ vezmeme rovinné vlny. S označeními

$$a(\vec{x}_1) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_1, t_1) \phi_0(\vec{x}_1) \quad , \quad b(\vec{x}_2) = \sqrt{2E_p} U(\vec{x}_2, t_2) \phi_0(\vec{x}_2) \quad ,$$
(2.4)

kde $E_p = \sqrt{p^2 + m^2}$ (ne nutně kladná větev odmocniny), můžeme psát

$$A(\phi_0 \rightarrow \phi_0) = 1 - \int d^3 \vec{x}_2 b^*(\vec{x}_2) d^3 \vec{x}_1 a(\vec{x}_1) \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2E_p} \exp\{-i[E_p(t_2 - t_1) - \vec{p} \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)]\} \quad .$$
(2.5)

Proč jsme vydělili člen s energií, je vidět z úpravy relativisticky invariantního výrazu

$$\delta(p^i p_i - m^2) d p^0 d p^1 d p^2 d p^3 = \delta(E^2 - p^2 - m^2) d E d^3 \vec{p} =$$

$$\frac{1}{2E_p} [\delta(E + E_p) + \delta(E - E_p)] d E d^3 \vec{p} \Rightarrow \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} = \text{inv} \quad .$$
(2.6)

Označme $t = t_2 - t_1$ a $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a všimněme si chování funkce

$$G(\vec{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \vec{p}}{2E_p} \exp\{i[\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p t]\} . \quad (2.7)$$

Předpokládejme $E_p > 0$ a prostorupodobný interval $\lambda = \sqrt{-s^2} = \sqrt{r^2 - t^2}$. Integrací přes úhlové proměnné dostaneme

$$G(r, t) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{p}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} =$$

$$\frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} dp \frac{1}{\sqrt{p^2 + m^2}} \exp\{i[p r - \sqrt{p^2 + m^2} t]\} . \quad (2.8)$$

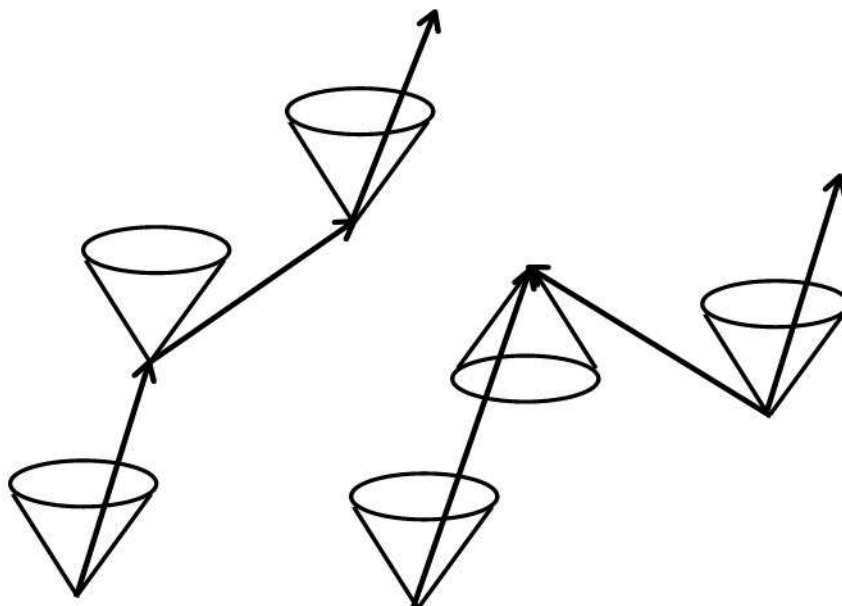
Substituce $p = m \sinh \varphi$ a označení $r = \lambda \cosh \varphi_0$, $t = \lambda \sinh \varphi_0$ převedou integrál na

$$G(r, t) = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi \exp\{i m \lambda \sinh(\varphi - \varphi_0)\} = \frac{1}{8\pi^2 i r} \frac{\partial}{\partial r} K_0(m \lambda) , \quad (2.9)$$

kde $K_0(x) = \int_0^{\infty} dy \cos(x \sinh y)$ je Besselova funkce. Pomocí vztahu $K_0'(x) = -K_1(x)$

přepíšeme (2.9) na

$$G(\lambda) = \frac{i m}{8\pi^2 \lambda} K_1(m \lambda) . \quad (2.10)$$



3 Relativistická kvantová mechanika

3.1 Historický přístup

V nerelativistické teorii máme

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \quad , \quad \hat{H} \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \hat{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \quad (3.1)$$

a Schrödingerovu rovnici

$$i\hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) \quad . \quad (3.2)$$

V relativistické teorii

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p} \right) \quad , \quad (3.3)$$

$$p_\mu = (p_0, p_1, p_2, p_3) = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p} \right) \quad .$$

Invariantní délka čtyřvektoru impulzu je

$$p_i p^i = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2 \quad . \quad (3.4)$$

Hamiltonián je tedy

$$H = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (3.5)$$

a analogie ke kvantování v souřadnicové reprezentaci

$$\hat{p}_i \rightarrow i \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} \quad . \quad (3.6)$$

Analogie ke Schrödingerově rovnici je ovšem

$$i \hbar \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial t} = \sqrt{-\hbar^2 c^2 \vec{\nabla}^2 + m^2 c^4} \psi(\vec{r}, t) \quad . \quad (3.7)$$

4 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

4.1 Vlastnosti spinorů

Připomeňme Pauliho matice (pro úplnost dodejme jednotkovou matici)

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (4.1)$$

V trojrozměrném případě je operace inverse provedená dvakrát návratem k původní souřadné soustavě, proto u tensorových veličin je $\hat{P}^2 = \hat{1}$. U trojrozměrných spinorů mohou nastat (rotace o 0 a 2π nejsou ekvivalentní) dvě možnosti

$$\hat{P}^2 = 1 \Rightarrow \hat{P} = \pm 1, \quad \hat{P}^2 = -1 \Rightarrow \hat{P} = \pm i \quad . \quad (4.2)$$

Ve čtyřrozměrném prostoru však prostorová inverse mění znaménko pouze tří (x, y, z) ze čtyř (ct, x, y, z) časoprostorových souřadnic a nekomutuje tedy s rotacemi souřadnic, které obsahují časovou osu. Speciálně pro Lorentzovu transformaci platí

$$\hat{P} \hat{L}(\vec{V}) = \hat{L}(-\vec{V}) \hat{P} \quad . \quad (4.3)$$

Při transformaci z vlastní Lorentzovy grupy transformuje se spinor jako

$$\xi'^1 = \alpha \xi^1 + \beta \xi^2 \quad , \quad \xi'^2 = \gamma \xi^1 + \delta \xi^2 \quad , \quad \alpha \delta - \beta \gamma = 1 \quad . \quad (4.4)$$

Koeficienty α , β , γ a δ jsou funkcemi úhlů rotace čtyřrozměrné souřadné soustavy. Bilineární forma

$$\xi^1 \Xi^2 - \xi^2 \Xi^1 \quad (4.5)$$

je invariantem (částice se spinem nula, složená ze dvou částic se spinem 1/2). Je užitečné zavést matici, která umožňuje snižovat a zvedat indexy a tak využívat součtové konvence

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad g^{AB} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \xi_A = g_{AB} \xi^B \quad , \quad \xi^A = g^{AB} \xi_B \quad . \quad (4.6)$$

Potom můžeme psát místo (4.5)

$$\xi^A \Xi_A = -\xi_A \Xi^A = inv \quad . \quad (4.7)$$

V nerelativistické teorii určuje $\psi^1 \psi^{1*} + \psi^2 \psi^{2*}$ hustotu pravděpodobnosti, a je tedy skalární veličinou, proto musí být spinorová transformace (4.4) unitární ($\alpha = \delta^*$, $\beta = -\gamma^*$). V relativistické teorii je hustota pravděpodobnosti časupodobnou složkou čtyřvektoru a podmínka unitarity nevzniká. Proto musíme uvažovat ne jeden spinor, ale dvojici spinorů ξ a η , transformujících se podle komplexně sdružených reprezentací Lorentzovy grupy, ξ podle (4.4) a η podle

$$\eta'^1 = \alpha^* \eta^1 + \beta^* \eta^2 \quad , \quad \eta'^2 = \gamma^* \eta^1 + \delta^* \eta^2 \quad , \quad \alpha^* \delta^* - \beta^* \gamma^* = 1 \quad . \quad (4.8)$$

Komponenty spinoru, který se transformuje podle komplexně sdružené reprezentace Lorentzovy grupy budeme značit tečkou nad velkým písmenem. Pro zvedání a snižování indexů platí i tady vztah (4.6). Působení operátoru prostorové inverse můžeme nyní zapsat jako (volíme reprezentaci, kde $\hat{P}^2 = -1$)

$$\hat{P} \xi^A = i \eta_A \quad , \quad \hat{P} \eta_A = i \xi^A \quad (4.9)$$

neboli

$$\hat{P}\xi_A = -i\eta^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\eta^{\dot{A}} = -i\xi_A \quad . \quad (4.10)$$

Dvojice bispinorů $(\xi^A, \eta_{\dot{A}})$ a $(\Xi^A, H_{\dot{A}})$ reprezentuje mimo jiné skalární a vektorové veličiny.

Pro skalární veličiny (skalár a pseudoskalár) je

$$\begin{aligned} \zeta &= \xi^A \Xi_A + \eta_{\dot{A}} H^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = \zeta \quad , \\ \zeta &= \xi^A \Xi_A - \eta_{\dot{A}} H^{\dot{A}} \quad , \quad \hat{P}\zeta = -\zeta \quad . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pro vektorové veličiny

$$\begin{aligned} \zeta^{A\dot{B}} &= \xi^A H^{\dot{B}} + \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = \zeta_{A\dot{B}} \quad , \\ \zeta^{A\dot{B}} &= \xi^A H^{\dot{B}} - \Xi^A \eta^{\dot{B}} \quad , \quad \hat{P}\zeta^{A\dot{B}} = -\zeta_{A\dot{B}} \quad . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vzhledem k relacím

$$\zeta = (\zeta^{A\dot{B}}) = \vec{a} \cdot \vec{\sigma} + a_0 \sigma_0 \quad , \quad \vec{a} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta \vec{\sigma}\} \quad , \quad a^0 = \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta\} \quad (4.13)$$

odpovídá první případ čtyřrozměrnému vektoru (s trojrozměrným polárním vektorem) a druhý případ čtyřrozměrnému pseudovektoru (s trojrozměrným axiálním vektorem)

$$\hat{P}(a^0, \vec{a}) = (a^0, -\vec{a}) \quad , \quad \hat{P}(a^0, \vec{a}) = (-a^0, \vec{a}) \quad . \quad (4.14)$$

4.2 Lorentzova transformace spinorů

Vztahů mezi bispinorem ζ a čtyřvektorem a^i využijeme pro nalezení konkrétního tvaru koeficientů transformace. Označme

$$\begin{aligned} L &= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad , \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = (\eta^1 \quad \eta^2) \quad , \quad \zeta = \begin{pmatrix} \zeta^{11} & \zeta^{12} \\ \zeta^{21} & \zeta^{22} \end{pmatrix} \quad , \\ \xi' &= L\xi \quad , \quad \eta' = \eta L^+ \quad , \quad \zeta' = L\zeta L^+ \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Pro infinitesimální transformaci píšeme

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \quad , \quad \zeta' = \zeta + \lambda \zeta + \zeta \lambda^+ \quad . \quad (4.16)$$

Při infinitesimální Lorentzově transformaci máme jednak

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \vec{a} - a^0 \vec{n} \delta V = \vec{a} - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \text{Tr}\{\zeta\} \quad , \\ a'^0 &= a^0 - \vec{a} \cdot \vec{n} \delta V = a^0 - \frac{\delta V}{2} \vec{n} \cdot \text{Tr}\{\vec{\sigma} \zeta\}\end{aligned}\quad (4.17)$$

a také

$$\begin{aligned}\vec{a}' &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta' \vec{\sigma}\} = \vec{a} + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\vec{\sigma} \lambda + \lambda^+ \vec{\sigma})\} \quad , \\ a'^0 &= \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta'\} = a^0 + \frac{1}{2} \text{Tr}\{\zeta (\lambda + \lambda^+)\} \quad .\end{aligned}\quad (4.18)$$

Porovnáním obou zápisů dostaneme

$$\lambda = \lambda^+ = -\frac{\delta V}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n} \quad .\quad (4.19)$$

S využitím vztahu

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{n})^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\quad (4.20)$$

můžeme psát pro konečné velikosti rychlosti

$$L = \exp\left\{-\frac{\phi}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cosh \frac{\phi}{2} - (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sinh \frac{\phi}{2} \quad , \quad \tanh \phi = V \quad .\quad (4.21)$$

Při infinitesimální rotaci souřadnic v geometrickém prostoru máme pak

$$\vec{a}' = \vec{a} - \delta \theta (\vec{n} \times \vec{a}) = \vec{a} - \frac{\delta \theta}{2} \text{Tr}\{\zeta (\vec{\sigma} \times \vec{n})\} \quad , \quad a'^0 = a^0 \quad ,\quad (4.22)$$

odkud

$$\lambda = -\lambda^+ = \frac{i \delta \theta}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \quad .\quad (4.23)$$

Pro konečné rotace potom

$$L = \exp\left\{\frac{i \theta}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{n}\right\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i (\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) \sin \frac{\theta}{2} \quad .\quad (4.24)$$

4.3 Vlnová rovnice pro částice se spinem 1/2 - Diracova rovnice

Při známém vztahu mezi čtyřvektory a spinory můžeme operátoru čtyřimpulsu \hat{p}^i přiřadit operátorový spinor $\hat{p}^{A\dot{B}}$ resp. $\hat{p}_{A\dot{B}}$. Jediné vhodné relativisticky invariantní výrazy jsou pak

$$\hat{p}^{A\dot{B}} \eta_{\dot{B}} = m \xi^A \quad , \quad \hat{p}_{B\dot{A}} \xi^A = m \eta_{\dot{B}} \quad , \quad (4.25)$$

které se značením

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad , \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

můžeme přepsat na

$$\left(\hat{p}_0 \sigma_0 + \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \right) \eta = m \xi \quad , \quad \left(\hat{p}_0 \sigma_0 - \hat{\vec{p}} \cdot \vec{\sigma} \right) \xi = m \eta \quad . \quad (4.27)$$

Zavedení bispinorů a γ matic je posledním krokem při odvození obvyklého tvaru Diracovy rovnice. Se značením

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \quad , \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (4.28)$$

přejde (4.27) na

$$\left(\gamma^0 \hat{p}_0 - \vec{\gamma} \cdot \hat{\vec{p}} \right) \psi = m \psi \quad . \quad (4.29)$$

Zcela kompaktní zápis dostaneme po zavedení matic

$$\underline{\hat{p}} \equiv \gamma^j \hat{p}_j \quad , \quad \left(\underline{\hat{p}} - m \right) \psi = 0 \quad . \quad (4.30)$$

V souřadnicové reprezentaci (na chvíli v SI jednotkách)

$$\left(\underline{\hat{p}} - m c \right) \psi = 0 \quad , \quad \underline{\hat{p}} \rightarrow i \hbar \nabla = i \hbar \gamma^j \frac{\partial}{\partial x^j} = i \hbar \left(\gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} \right) \quad , \quad (4.31)$$

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi \quad , \quad \hat{H} = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + m c^2 \beta \quad ,$$

kde matice α a β jsou dány vztahy

$$\begin{aligned}\vec{\alpha} = \gamma^0 \vec{\gamma} &= \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & -\vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_i \alpha_k + \alpha_k \alpha_i &= 2 \delta_{ik}, \quad \beta \alpha_i + \alpha_i \beta = 0, \quad \beta^2 = 1.\end{aligned}\quad (4.32)$$

4.4 Diracova rovnice v elektromagnetickém poli

Se čtyřpotenciálem

$$A^i = \left(\frac{\Phi}{c}, \vec{A} \right), \quad A_i = \left(\frac{\Phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad (4.33)$$

a záměnou (v komutačních relacích vystupuje zobecněný impulz) oproti volné částici

$$p_i \rightarrow p_i - e A_i \quad (4.34)$$

dostáváme Diracovu rovnici ve vnějším elektromagnetickém poli

$$\gamma^i (\hat{p}_i - e \hat{A}_i) \psi = m c \psi, \quad (4.35)$$

kde γ^i je čtyřvektor matic, které mají ve spinorové reprezentaci tvar (jsou možné i jiné reprezentace, získané unitárními transformacemi)

$$\gamma^i = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & -\vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

a ψ je čtyřkomponentový bispinor. V souřadnicové reprezentaci je

$$\hat{p}_i = i \hbar \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, i \hbar \vec{\nabla} \right), \quad \hat{p}^i = \left(i \hbar \frac{\partial}{c \partial t}, -i \hbar \vec{\nabla} \right) \quad (4.37)$$

a Diracova rovnice má tvar

$$\left(\frac{1}{c} \gamma^0 \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial t} - e \Phi \right) + \vec{\gamma} \cdot (i \hbar \vec{\nabla} + e \vec{A}) - m c \right) \psi = 0. \quad (4.38)$$

nebo po přepsání

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(c \vec{\alpha} \cdot (\hat{\vec{p}} - e \vec{A}) + \beta mc^2 + e \hat{\Phi} \right) \psi \quad , \quad (4.39)$$

kde jsme označili

$$\gamma^0 = \beta \quad , \quad \vec{\alpha} = \beta \vec{\gamma} \quad . \quad (4.40)$$

4.5 Heisenbergův obraz.

Připomeňme si vztah pro časovou změnu operátoru v Heisenbergově obraze

$$\frac{d}{dt} \hat{F} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} \quad . \quad (4.41)$$

Zavedeme operátor mechanického impulzu

$$\hat{\vec{\pi}} = \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}}) \quad . \quad (4.42)$$

Výpočet komutátorů

$$[\hat{H}, \hat{\vec{r}}] = \frac{\hbar}{i} c \vec{\alpha} \quad , \quad (4.43)$$

a trochu komplikovaněji

$$[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}})] = -\frac{e\hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{ec\hbar}{i} \vec{\nabla}(\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) - \frac{ec\hbar}{i} (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} \quad . \quad (4.44)$$

S využitím vztahu

$$\vec{\nabla}(\vec{\alpha} \cdot \vec{A}) = (\vec{A} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\alpha} + (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{A} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\alpha}) + \vec{\alpha} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla}) \vec{A} + \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad (4.45)$$

dostaneme

$$[\hat{H}, \hat{\vec{p}} - e \vec{A}(\hat{\vec{r}})] = -\frac{e\hbar}{i} \vec{\nabla} \Phi + \frac{ec\hbar}{i} \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (4.46)$$

Tedy

$$\frac{d \hat{\vec{r}}}{dt} = c \vec{\alpha} \quad , \quad \frac{d \hat{\vec{\pi}}}{dt} = -e \vec{\nabla} \Phi + ec \vec{\alpha} \times \vec{B} \quad . \quad (4.47)$$

Charakter operátoru rychlosti dal vznik názvu Zitterbewegung.

4.6 Rovnice kontinuity.

Diracovu rovnici

$$\left(i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m c \right) \psi = 0 \quad (4.48)$$

komplexně sdružíme a s využitím vztahů $(\gamma^i)^+ = \gamma^0 \gamma^i \gamma^0$, tedy

$$(\gamma^0)^+ = \gamma^0 \quad , \quad (\vec{\gamma})^+ = -\vec{\gamma} \quad (4.49)$$

napíšeme jako

$$\left(-i \hbar \tilde{\gamma}^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \tilde{\vec{\gamma}} \cdot \vec{\nabla} - m c \right) \psi^* = 0 \quad . \quad (4.50)$$

Rovnici (4.50) transponujeme na (diferenciální operátory působí doleva)

$$\psi^+ \left(-i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} - m c \right) = 0 \quad (4.51)$$

a po zavedení Diracova sdružení $\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0$ s využitím antikomutačních relací γ matic máme

$$\bar{\psi} \left(i \hbar \gamma^0 \frac{\partial}{c \partial t} + i \hbar \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m c \right) = 0 \quad . \quad (4.52)$$

S použitím symbolů $\underline{a} = \gamma^i a_i$ můžeme (4.48) a (4.52) zapsat jako

$$\left(\underline{\hat{p}} - m c \right) \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} \left(\underline{\hat{p}} + m c \right) = 0 \quad . \quad (4.53)$$

Vynásobení první rovnice v (4.53) zleva $\bar{\psi}$ a druhé rovnice zprava ψ dává výrazy, jejichž sečtením dostáváme rovnici kontinuity

$$\frac{\partial j^k}{\partial x^k} = 0 \quad , \quad j^k = \bar{\psi} \gamma^k \psi \quad . \quad (4.54)$$

Časupodobná komponenta je $j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi = \psi^+ \psi > 0$.

5 Rovinné vlny

Dosadíme-li do (4.53) rovinné vlny (volba normovací konstanty $\varepsilon = c p_0 = +\sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$ se ozřejmí později)

$$\psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(p) \exp(-i p_i x^i) \quad , \quad \psi(-p) = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} u(-p) \exp(i p_i x^i) \quad , \quad (5.1)$$

dostáváme

$$(\underline{p} - mc)u(p) = 0 \quad , \quad (\underline{p} + mc)u(-p) = 0 \quad (5.2)$$

a

$$\bar{u}(p)(\underline{p} - mc) = 0 \quad , \quad \bar{u}(-p)(\underline{p} + mc) = 0 \quad . \quad (5.3)$$

podmínkou řešitelnosti je $p^i p_i = m^2 c^2$. Bispinory normujeme tak, že

$$\bar{u}(p)u(p) = 2mc^2 \quad , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2mc^2 \quad . \quad (5.4)$$

Násobení zleva první rovnice v (5.2) $\bar{u}(p)$ a druhé rovnice $\bar{u}(-p)$ vede na

$$\bar{u}(\pm p) \gamma^i p_i u(\pm p) = 2m^2 c^3 = 2c p^i p_i \quad \Rightarrow \quad \bar{u}(\pm p) \gamma^i u(\pm p) = 2c p^i \quad . \quad (5.5)$$

Pro čtyřvektor toku pak

$$j^i = \bar{\psi}(\pm p) \gamma^i \psi(\pm p) = \frac{c p^i}{\varepsilon} = \left(1, \frac{\vec{v}}{c}\right) \quad . \quad (5.6)$$

Ve standardní reprezentaci, kde píšeme

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad , \quad (5.7)$$

se Diracova rovnice rozpadá na dvě vázané rovnice

$$\begin{aligned} (\varepsilon - mc^2)\phi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \chi &= 0 \quad , \\ (\varepsilon + mc^2)\chi - c \vec{p} \cdot \vec{\sigma} \phi &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Máme pak

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} + mc^2} w(+)) \\ \sqrt{\mathcal{E} - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(+)) \end{pmatrix}, \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\mathcal{E} - mc^2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) w(-)) \\ \sqrt{\mathcal{E} + mc^2} w(-)) \end{pmatrix}, \quad (5.9)$$

kde $\vec{n} = \vec{p}/|\vec{p}|$ a $w(\pm)$ jsou libovolné dvoukomponentové veličiny, splňující $w^+(\pm)w(\pm)=1$.

Pro relativisticky sdružené bispinory máme z (5.9)

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \left(\sqrt{\mathcal{E} + mc^2} w^+(+) \quad -\sqrt{\mathcal{E} - mc^2} w^+(+) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \right), \\ \bar{u}(-p) &= \left(\sqrt{\mathcal{E} - mc^2} w^+(-) (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \quad -\sqrt{\mathcal{E} + mc^2} w^+(-) \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

6 Transformace Diracovy rovnice

6.1 Rovnice volné částice (Foldyova - Wouthuysenova transformace)

Hamiltonián je

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta mc^2. \quad (6.1)$$

Ve standardní reprezentaci jsou matice $\vec{\alpha}$ a β dány vztahy

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Uvažujme o takové unitární (a na čase explicitně nezávislé) transformaci, která by odstranila operátory, které vážou velké komponenty s malými

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}), \quad \hat{S} = \hat{S}^\dagger, \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{S} = 0. \quad (6.3)$$

Platí

$$\begin{aligned} |\psi'\rangle &= \exp(i\hat{S})|\psi\rangle, \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle &= \exp(i\hat{S})\hat{H}|\psi\rangle = \exp(i\hat{S})\hat{H}\exp(-i\hat{S})|\psi'\rangle = \hat{H}'|\psi'\rangle. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Velké a malé komponenty spojuje operátor $c\vec{\alpha} \cdot \hat{p}$. Uhádneme tedy poměrně snadno potřebný tvar \hat{S}

$$\exp(i\hat{S}) = \exp(\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \theta) = \cos(|\hat{p}| \theta) + \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \frac{\sin(|\hat{p}| \theta)}{|\hat{p}|} , \quad \theta = \theta(\hat{p}) . \quad (6.5)$$

Pro transformovaný hamiltonián dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \exp(i\hat{S}) \hat{H} \exp(-i\hat{S}) = \\ & \left(\cos(|\hat{p}| \theta) + \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \frac{\sin(|\hat{p}| \theta)}{|\hat{p}|} \right) (c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m c^2) \left(\cos(|\hat{p}| \theta) - \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \frac{\sin(|\hat{p}| \theta)}{|\hat{p}|} \right) = \\ & (c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m c^2) \left(\cos(|\hat{p}| \theta) - \beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \frac{\sin(|\hat{p}| \theta)}{|\hat{p}|} \right)^2 = \\ & (c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} + \beta m c^2) \exp(-2\beta \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \theta) = \\ & c \vec{\alpha} \cdot \hat{p} \left[\cos(2|\hat{p}| \theta) - m c \frac{\sin(2|\hat{p}| \theta)}{|\hat{p}|} \right] + \beta m c^2 \left[\cos(2|\hat{p}| \theta) + |\hat{p}| \frac{\sin(2|\hat{p}| \theta)}{m c} \right] . \end{aligned} \quad (6.6)$$

Položíme-li teď

$$\tan(2|\hat{p}| \theta) = \frac{|\hat{p}|}{m c} , \quad (6.7)$$

dostáváme výsledný hamiltonián

$$\hat{H}' = \beta \sqrt{m^2 c^4 + \hat{p}^2 c^2} . \quad (6.8)$$

6.2 Rovnice částice v elektromagnetickém poli

Hamiltonián v tomto případě je

$$\hat{H} = c \vec{\alpha} \cdot (\hat{p} - e \vec{A}) + \beta m c^2 + e \Phi = \beta m c^2 + \hat{E} + \hat{O} , \quad (6.9)$$

kde

$$\hat{E} = e \Phi , \quad \hat{O} = c \vec{\alpha} \cdot (\hat{p} - e \vec{A}) . \quad (6.10)$$

Platí

$$\beta \hat{O} = -\hat{O} \beta , \quad \beta \hat{E} = \hat{E} \beta . \quad (6.11)$$

Uvažujme opět o takové unitární (ale teď už možná na čase závislé) transformaci, která by odstranila liché operátory, které vážou velké komponenty s malými a ponechala jen operátory sudé

$$\hat{U} = \exp(i\hat{S}) \quad , \quad \hat{S} = \hat{S}^+ \quad . \quad (6.12)$$

Pro $|\psi'\rangle = \exp(i\hat{S})|\psi\rangle$ dostáváme

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S})|\psi'\rangle &= \exp(-i\hat{S}) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle + \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \exp(-i\hat{S}) \right) |\psi'\rangle = \\ & \hat{H}' |\psi'\rangle = \hat{H} \exp(-i\hat{S}) |\psi'\rangle \quad . \end{aligned} \quad (6.13)$$

odkud pak

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi'\rangle = \hat{H}' |\psi'\rangle \quad , \quad \hat{H}' = \exp(i\hat{S}) \left(\hat{H} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) \exp(-i\hat{S}) \quad . \quad (6.14)$$

Mějme výraz (chápaný jako funkce parametru λ , který pak položíme roven jedné)

$$F(\lambda) = \exp(i\hat{B}\lambda) \hat{A} \exp(-i\hat{B}\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \left(\frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \right) \Big|_{\lambda=0} \quad . \quad (6.15)$$

Derivováním (6.15) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} &= i [\hat{B}, \hat{A}] \quad , \\ \dots \quad , \\ \frac{\partial^n F}{\partial \lambda^n} \Big|_{\lambda=0} &= i^n \left[\hat{B}, \left[\hat{B}, \left[\dots \left[\hat{B}, \hat{A} \right] \dots \right] \right] \right] \quad , \end{aligned} \quad (6.16)$$

takže ponecháme-li v rozvoji pouze členy do třetího řádu (nebo čtvrtého, násobí-li člen

klidovou energií) v \hat{S} , dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{H}' &= \hat{H} + i [\hat{S}, \hat{H}] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]] - \frac{i}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \hat{H}]]] + \\ & \frac{m c^2}{24} [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, [\hat{S}, \beta]]]] - \hbar \dot{S} - \frac{i\hbar}{2} [\hat{S}, \dot{S}] + \frac{\hbar}{6} [\hat{S}, [\hat{S}, \dot{S}]] \quad . \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ponecháme-li v (6.17) jen členy nejnižšího řádu, máme

$$\hat{H}' = \beta m c^2 + \hat{E} + \hat{O} + i m c^2 [\hat{S}, \beta] \quad . \quad (6.18)$$

Tento tvar vede k tomu, že zkusíme zvolit

$$\hat{S} = -\frac{i}{2mc^2} \beta \hat{O} \quad . \quad (6.19)$$

S označením matice spinu (ta je stejná ve spinorové i standardní reprezentaci)

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

máme po delších výpočtech výsledný hamiltonián ve tvaru

$$\begin{aligned} \hat{H}' = & \beta \left(mc^2 + \frac{1}{2m} (\hat{p} - e\vec{A})^2 - \frac{1}{8m^3 c^2} \hat{p}^4 \right) + e\Phi - \\ & \frac{e\hbar}{2m} \vec{\Sigma} \cdot \vec{B} - \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{p}) - \frac{ie\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \frac{e\hbar^2}{8m^2 c^2} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \quad . \end{aligned} \quad (6.21)$$

Pro rotačně souměrné pole máme

$$\vec{E}(r) = -\frac{dV(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r} \quad (6.22)$$

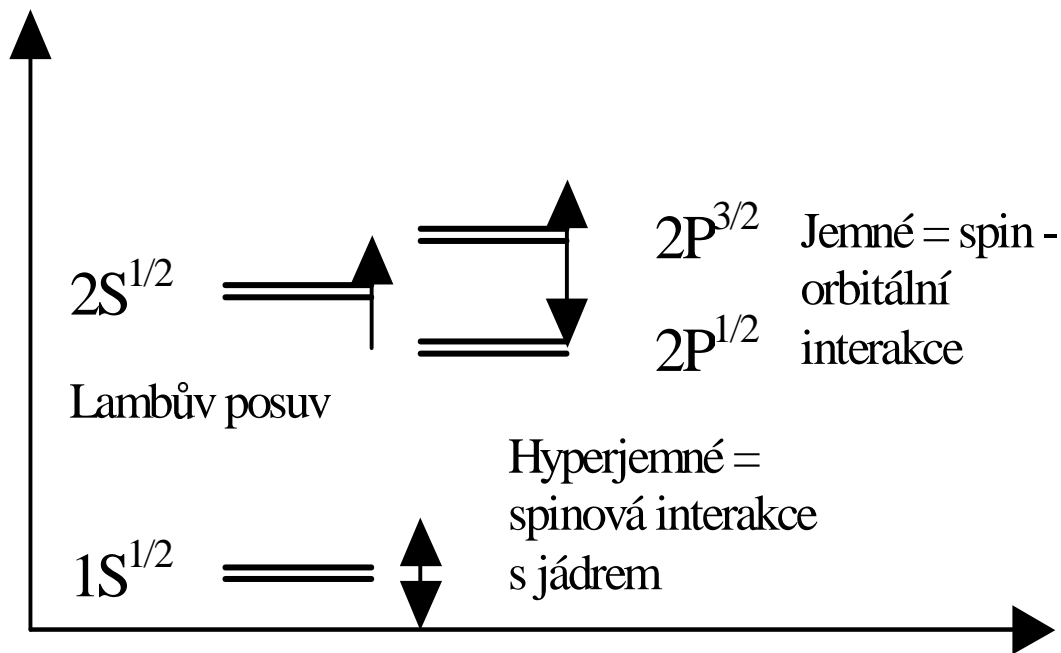
a příslušný člen nabude tvaru

$$-\frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \vec{\Sigma} \cdot (\vec{E} \times \hat{p}) = \frac{e\hbar}{4m^2 c^2} \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{\Sigma} \cdot \vec{L} \quad , \quad \vec{L} = \vec{r} \times \hat{p} \quad , \quad (6.23)$$

kterým popisujeme spin - orbitální interakci. Poslední člen se nazývá Darwinův, jeho vznik se dá se chápat jako rozmazání energie Coulombova působení

$$\langle V(\vec{r} + \delta\vec{r}) - V(\vec{r}) \rangle \approx \left\langle \frac{\partial V}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^i \partial x^j} \delta x^i \delta x^j \right\rangle \approx \frac{1}{6} \Delta V \left(\frac{\hbar}{mc} \right)^2 \quad . \quad (6.24)$$

Schéma nejnižších hladin je na obrázku:



7 Rozptyl elektronu na jádře.

Budeme počítat rozptyl elektronu na (nekonečně) těžkém jádře náboje Ze . Volba souřadné soustavy je velmi důležitá pro zjednodušení výpočtu. Impuls elektronu před rozptylem ať je ve směru osy x , impuls elektronu po rozptylu ať leží v rovině x - y (značíme $\underline{p} \equiv p_i \gamma^i = (E/c) \gamma^t - \vec{p} \vec{\gamma}$)

$$\underline{p}_1 = \gamma^t \frac{E_1}{c} - \gamma^x p_{1x} \quad , \quad \underline{p}_2 = \gamma^t \frac{E_2}{c} - \gamma^x p_{2x} - \gamma^y p_{2y} \quad . \quad (7.1)$$

Čtyřvektor potenciálu je

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r}, \vec{A} = 0 \right) \Rightarrow \underline{A} = \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 c r} \gamma^t \quad . \quad (7.2)$$

Připomeňme Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - e \underline{A} - mc) |\psi\rangle = 0 \quad , \quad \underline{p} = i \hbar \underline{\nabla} \quad . \quad (7.3)$$

Počáteční a koncový stav je, pokud píšeme i obvykle vynechávaný normovací faktor

$$\langle x | \psi_1 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_1V}} u_1 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{1i} x^i} \quad , \quad \langle x | \psi_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2E_2V}} u_2 e^{-\frac{i}{\hbar} p_{2i} x^i} \quad . \quad (7.4)$$

Amplituda pravděpodobnosti přechodu je

$$\langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle = -\frac{i}{\hbar} \frac{\bar{u}_2 \gamma^t u_1}{2\sqrt{E_1 E_2} V} \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0} \int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt \quad . \quad (7.5)$$

Pro integrály máme vyjádření

$$\int e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{p}_2 \vec{r}} \frac{1}{r} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p}_1 \vec{r}} d^3 \vec{r} = \frac{4\pi \hbar^2}{|\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \quad , \quad \int_0^T e^{\frac{i}{\hbar} E_2 t} e^{-\frac{i}{\hbar} E_1 t} dt = \frac{\sin\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}} e^{i\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T} \quad . \quad (7.6)$$

První integrál počítáme jako

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi}^{\pi} d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{\infty} dr r e^{i q r \cos \vartheta - \lambda r} = \frac{4\pi}{q} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_0^{\infty} dr \sin(qr) e^{-\lambda r} =$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{4\pi}{\lambda^2 + q^2} = \frac{4\pi}{q^2} \quad . \quad (7.7)$$

Pro pravděpodobnost přechodu za jednotku času

$$w(1 \rightarrow 2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left| \langle \psi_2 | H_{\text{int}} | \psi_1 \rangle \right|^2 =$$

$$\frac{|\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2}{4\hbar^2 E_1 E_2 V^2} \left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\sin^2\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar} T\right)}{\left(\frac{E_1 - E_2}{2\hbar}\right)^2 T} \quad . \quad (7.8)$$

Jedním z vyjádření Diracovy delta funkce je

$$\delta(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(xT)}{\pi x^2 T} \quad . \quad (7.9)$$

Využitím (7.9) upravíme vztah (7.8) na

$$w(1 \rightarrow 2) = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{|\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2}{4E_1 E_2 V^2} \left(\frac{Z e^2 \hbar^2}{\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 \delta(E_2 - E_1) \quad . \quad (7.10)$$

Hustota stavů v okolí koncového stavu (stav 2) je ($E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$)

$$d\rho = \frac{V d^3 \vec{p}_2}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V E_2 p_2}{(2\pi\hbar)^3 c^2} d\Omega dE_2 \quad (7.11)$$

a tak můžeme psát (platí $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2|$)

$$d w = \frac{V d\Omega}{(2\pi\hbar)^3 c^2} \int w(1 \rightarrow 2) E_2 p_2 dE_2 = \frac{p_1}{E_1 V} |\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2 \left(\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2} \right)^2 d\Omega \quad . \quad (7.12)$$

Poněvadž $\vec{v} = \partial E / \partial \vec{p}$, máme pro hustotu toku částic výraz

$$j = \frac{v_1}{V} = \frac{p_1 c^2}{E_1 V} \quad (7.13)$$

a pro diferenciální účinný průřez pak

$$d\sigma = |\bar{u}_2 \gamma^t u_1|^2 \left(\frac{Z e^2}{4\pi\epsilon_0 q^2} \right)^2 d\Omega \quad , \quad q^2 = |\vec{p}_1 - \vec{p}_2|^2 = 4 p_1^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad . \quad (7.14)$$

Nyní zvolme bispinory jako

$$u^{(1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E + mc^2}} \begin{pmatrix} E + mc^2 \\ 0 \\ 0 \\ c(p_x + i p_y) \end{pmatrix} \quad , \quad u^{(-1/2)}(p) = \frac{1}{\sqrt{E + mc^2}} \begin{pmatrix} 0 \\ E + mc^2 \\ c(p_x - i p_y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (7.15)$$

Platí

$$|\bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)}|^2 = \frac{\left| (E_1 + mc^2)^2 + p_1^2 c^2 e^{-i\theta} \right|^2}{(E_1 + mc^2)^2} = 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad . \quad (7.16)$$

Obdobně spočteme další výrazy, takže máme

$$\begin{aligned} \left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 &= 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) , & \left| \bar{u}_2^{(1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 &= 0 , \\ \left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(1/2)} \right|^2 &= 0 , & \left| \bar{u}_2^{(-1/2)} \gamma^t u_1^{(-1/2)} \right|^2 &= 4 E_1^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) . \end{aligned} \quad (7.17)$$

Pro diferenciální účinný průřez rozptylu je tedy konečný výraz

$$d\sigma_{rel} = \left(\frac{m c^2}{E_1} \right)^2 \left(1 - \left(\frac{v_1}{c} \right)^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\sigma_{Ruth} , \quad d\sigma_{Ruth} = \left(\frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 m v_1^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} . \quad (7.18)$$

8 Invariantní účinný průřez

Mějme dva svazky částic, které se srážejí. Počítejme v klidové soustavě částice 2 počet srážek v objemu dV za čas dt

$$d\nu = n_1 \sigma v_{rel} dt n_2 dV , \quad d\nu = A n_1 n_2 dt dV , \quad (8.1)$$

kde v_{rel} je velikost rychlosti částice 1 v klidové soustavě částice 2, n_1 a n_2 jsou hustoty částic a konečně σ je účinný průřez. Veličiny $d\nu$ a $dt dV$ jsou invarianty, musí tedy být invariantem také veličina $A n_1 n_2$, přičemž A musí v klidové soustavě jedné z částic přejít na $v_{rel} \sigma$. Máme

$$n dV = n_0 dV_0 \Rightarrow n = \frac{n_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = n_0 \frac{\mathcal{E}}{m c^2} \quad (8.2)$$

a tedy

$$A n_1 n_2 = inv'' \Rightarrow A \mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2 = inv' \Rightarrow A \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{p_1 \cdot p_2} = inv , \quad (8.3)$$

kde skalární součin označujeme jako $p_1 \cdot p_2 = p_{1i} p_2^i$. V klidové soustavě částice 2 je

$$A = v_{rel} \sigma , \quad p_2^i = \left(\frac{\mathcal{E}_2}{c} = m_2 c, \vec{p}_2 = 0 \right) \Rightarrow p_1 \cdot p_2 = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2}{c^2} \Rightarrow inv = v_{rel} \sigma c^2 \quad (8.4)$$

a dále

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{m_1 c}{\sqrt{1 - v_{rel}^2/c^2}} m_2 c \Rightarrow \frac{v_{rel}}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{m_1 m_2 c^2}{p_1 \cdot p_2} \right)^2} . \quad (8.5)$$

Spojením vztahů dostáváme

$$d w = \frac{d V}{d t} = c \sigma n_1 n_2 \frac{c^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} \sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2} d V . \quad (8.6)$$

Účinný průřez dostaneme tedy z pravděpodobnosti přechodu za jednotku času

$$\sigma = \frac{d w}{J n_2 d V} , \quad J = \frac{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - (m_1 m_2 c^2)^2}}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} n_1 . \quad (8.7)$$

V těžišťové soustavě je $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 = \vec{p}$, a tedy

$$j = \frac{|\vec{p}|}{V} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} \right) = \frac{v_1 + v_2}{V} , \quad (8.8)$$

v souladu s obvyklou definicí hustoty toku.

9 Spinová matice hustoty

Spinory vyhovují řešitelným (determinant je roven nule) soustavám algebraických rovnic

$$(\underline{p} - m)u(p) = 0 , \quad (\underline{p} + m)u(-p) = 0 . \quad (9.1)$$

Normujeme je tak, aby platilo

$$\bar{u}(p)u(p) = 2m , \quad \bar{u}(-p)u(-p) = -2m . \quad (9.2)$$

Ve standardní reprezentaci máme

$$u(p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon+m} w(p) \\ \sqrt{\varepsilon-m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(p) \end{pmatrix}, \quad u(-p) = \begin{pmatrix} \sqrt{\varepsilon-m} (\vec{n} \vec{\sigma}) w(-p) \\ \sqrt{\varepsilon+m} w(-p) \end{pmatrix}, \quad (9.3)$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}, \quad w^+(p)w(p) = w^+(-p)w(-p) = 1.$$

Pro relativisticky sdružené výrazy pak

$$\begin{aligned} \bar{u}(p) &= \left(\sqrt{\varepsilon+m} w^+(p) - \sqrt{\varepsilon-m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) \right), \\ \bar{u}(-p) &= \left(\sqrt{\varepsilon-m} w^+(p) (\vec{n} \vec{\sigma}) - \sqrt{\varepsilon+m} w^+(p) \right). \end{aligned} \quad (9.4)$$

V těchto výrazech jsou $w(p)$ a $w(-p)$ libovolné normované dvoukomponentové veličiny.

Uvedené volnosti můžeme užít pro vhodnou volbu vlnové funkce. Možnou volbou je například

$$\begin{aligned} w(p)^{(\sigma=1/2)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w(-p)^{(\sigma=1/2)} = -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=-1/2)} = \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \\ w(p)^{(\sigma=-1/2)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w(-p)^{(\sigma=-1/2)} = -\sigma_y w^*(p)^{(\sigma=1/2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Platí

$$\sum_{\sigma} w(p)^{(\sigma)} w^+(p)^{(\sigma)} = \sum_{\sigma} w(-p)^{(\sigma)} w^+(-p)^{(\sigma)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.6)$$

Pro bispinory pak máme

$$\sum_{\sigma} u(p)^{(\sigma)} u^+(p)^{(\sigma)} = \underline{p} + m, \quad \sum_{\sigma} u(-p)^{(\sigma)} u^+(-p)^{(\sigma)} = \underline{p} - m. \quad (9.7)$$

Prvky spinové matice hustoty jsou v čistém stavu triviální výrazy

$$\rho_{AB}(p) = u_A(p) \bar{u}_B(p). \quad (9.8)$$

Poněkud odlišně oproti běžné matici hustoty zde stopa není rovna 1

$$\text{Tr}\{\rho(p)\} = \sum_A u_A(p) \bar{u}_A(p) = \bar{u}(p) u(p) = 2m. \quad (9.9)$$

Ze (9.8) je zřejmé, že matice hustoty v čistém i smíšeném stavu bude splňovat Diracovu rovnici

$$(\underline{p} - m)\rho(p) = 0 \quad , \quad \rho(p)(\underline{p} - m) = 0 \quad . \quad (9.10)$$

V čistém stavu spočteme střední hodnotu spinu podle vztahu

$$\langle \hat{s} \rangle = \frac{1}{2} \int \psi^* \vec{\Sigma} \psi d^3 \vec{r} = \frac{1}{4\varepsilon} u^*(p) \vec{\Sigma} u(p) = \frac{1}{4\varepsilon} \bar{u}(p) \gamma^0 \vec{\Sigma} u(p) \quad (9.11)$$

a odpovídající výraz pro stav částečné polarizace je pak

$$\begin{aligned} \langle \hat{s} \rangle &= \frac{1}{4\varepsilon} \sum_A \sum_B \bar{u}_A(p) (\gamma^0 \vec{\Sigma})_{AB} u_B(p) = \\ &= \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr} \{ \rho(p) \gamma^0 \vec{\Sigma} \} = \frac{1}{4\varepsilon} \text{Tr} \{ \rho(p) \gamma^5 \vec{\gamma} \} \quad . \end{aligned} \quad (9.12)$$

Polarizační vektor v klidové soustavě označme $\vec{\zeta} = 2\langle \hat{s} \rangle$, platí tedy pro čistý stav $|\vec{\zeta}| = 1$, pro smíšený stav $|\vec{\zeta}| < 1$. Čtyřvektory impulsu a spinu v klidové soustavě jsou $p^i = (m, \vec{0})$ a $a^i = (0, \vec{\zeta})$ a v libovolné inerciální souřadné soustavě tedy musí platit

$$p \cdot p = m^2 \quad , \quad a \cdot a = -\zeta^2 \quad , \quad p \cdot a = 0 \quad . \quad (9.13)$$

Lorentzova transformace do laboratorní soustavy dává

$$a^0 = \frac{\zeta \vec{p}}{m} \quad , \quad \vec{a} = \vec{\zeta} + \frac{(\vec{\zeta} \vec{p}) \vec{p}}{m(\varepsilon + m)} \quad . \quad (9.14)$$

Matice hustoty pro nepolarizovaný svazek bude mít tvar (musí obsahovat pouze impuls jako jedinou charakteristiku a splňovat dané rovnice)

$$\rho_n(p) = \frac{1}{2} (\underline{p} + m) \quad . \quad (9.15)$$

Pro obecný smíšený stav bude mít tvar

$$\rho(p) = \frac{1}{4m}(\underline{p} + m)\tilde{\rho}(\underline{a})(\underline{p} + m) \quad , \quad \tilde{\rho}(\underline{a}=0) = 1 \quad . \quad (9.16)$$

Připomeňme si, že platí $(\underline{p} + m)^2 = 2m(\underline{p} + m)$. Matice $\tilde{\rho}(\underline{a})$ má na čtyřvektoru \underline{a} záviset lineárně. Napišme tedy $\tilde{\rho}(\underline{a}) = 1 - A\gamma^5 \underline{a}$. Konstantní matici A určíme výpočtem střední hodnoty spinu v klidové soustavě

$$\begin{aligned} \rho(p) &= \frac{m}{4}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5(\vec{\gamma}\vec{\zeta}))(1 + \gamma^0) = \frac{m}{2}(1 + \gamma^0)(1 + A\gamma^5(\vec{\gamma}\vec{\zeta})) \quad , \\ \vec{\zeta} = 2\langle\hat{s}\rangle &= \frac{1}{2m}\text{Tr}\{\rho(p)\gamma^5\vec{\gamma}\} = -\frac{1}{4}A\text{Tr}\{(\vec{\gamma}\vec{\zeta})\vec{\gamma}\} = A\vec{\zeta} \end{aligned} \quad (9.17)$$

a musí být tedy $A = 1$. Protože je $a \cdot p = 0$, \underline{p} antikomutuje s \underline{a} a komutuje s $\gamma^5 \underline{a}$. Výraz pro spinovou matici hustoty lze přepsat do konečného tvaru

$$\rho(p) = \frac{1}{2}(\underline{p} + m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (9.18)$$

Vektor spinové polarizace lze naopak z matice hustoty spočítat pomocí vztahu

$$a^i = \frac{1}{2m}\text{Tr}\{\rho(p)\gamma^5\gamma^i\} \quad . \quad (9.19)$$

Obdobně by bylo možné odvodit obecný vztah pro spinovou matici hustoty pozitronů

$$\rho(-p) = \frac{1}{2}(\underline{p} - m)(1 - \gamma^5 \underline{a}) \quad . \quad (9.20)$$

10 Spinové středování.

Máme-li ve Feynmanově diagramu jen jednu fermionovou čáru (rozptyl na vnějším poli, Comptonův rozptyl, anihilace nebo kreace páru), můžeme použít následujícího způsobu spinového středování (středování přes počáteční spinové stavy a součtu přes koncové spinové

stavy pro rozptyl, středování přes spinové stavy elektronu a pozitronu při anihilaci nebo kreaci). Maticový element M_{fi} je ve zmíněných případech možno zapsat jako

$$M_{fi} = \sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} = \bar{u}_f Q u_i \quad . \quad (10.1)$$

Potom máme

$$M_{fi}^* = \left(\sum_{A,B} \bar{u}_{fA} Q_{AB} u_{iB} \right)^* = \sum_{A,B,C} u_{fC} \gamma_{CA}^{0*} Q_{AB}^* u_{iB}^* = \sum_{A,B,C,D,E} u_{iB}^* \gamma_{BD}^0 \gamma_{DE}^0 Q_{BA}^+ \gamma_{AC}^0 u_{fC} = \bar{u}_i \bar{Q} u_f \quad , \quad (10.2)$$

kde jsme využili vlastností $\gamma^0 \gamma^0 = 1$, $\gamma^{0+} = \gamma^0$ a označili $\bar{Q} = \gamma^0 Q^+ \gamma^0$. Můžeme teď psát

$$|M_{fi}|^2 = \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} u_f = \text{Tr} \{ u_f \bar{u}_f Q u_i \bar{u}_i \bar{Q} \} \quad . \quad (10.3)$$

Takže máme

$$\begin{aligned} 2\text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{rozptyl elektronů na vnějším potenciále} \\ 2\text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{Comptonův rozptyl} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(-p) Q \rho_i(p) \bar{Q} \} & \text{anihilace páru} \\ \text{Tr} \{ \rho_f(p) Q \rho_i(-p) \bar{Q} \} & \text{kreace páru} \end{aligned} \quad (10.4)$$