Dvě parciální diferenciální rovnice

Jedna

Máme řešit rovnici

$$
\begin{aligned}
u_t &= a^2 u_{xx}, \quad x,t>0,\\
u(x,0) &= 0,\\
u(0,t) &= K,
\end{aligned}
$$

a to nejlépe pomocí nějaké integrální transformace. Zvolíme si tedy transformaci Laplaceovu.

Laplaceova transformace funkce jedné proměnné $f(x)$ je definována jako

$$\mathscr{L}[f] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) \mathrm{d}x.$$

Nejdřív rychle odvodíme několik užitečných tvrzení, která o této transformaci platí. Ponejprv ztransformujme nějakou exponenciálu e^{-ax} — dostaneme

$$\mathscr{L}[e^{-ax}] = \int_0^\infty e^{-(a+s)x} \mathrm{d}x = \frac{1}{s+a}\left[e^{-(a+s)x}\right]_\infty^0 = \frac{1}{s+a}.$$

Jako speciální případ obdržíme též

$$\mathscr{L}[1] = \frac{1}{s}.$$

Za druhé, transformace je lineární (to by mělo být vidět okamžitě, protože integrál je lineární a f si můžeme klidně roznásobit). Platí tedy

$$\mathscr{L}[\alpha a + \beta b] = \alpha \mathscr{L}[a] + \beta \mathscr{L}[b],$$

kde a, b jsou funkce x a α, β nějaké konstanty.

Za třetí vypočteme transformaci derivace (užitím per partes):

$$\mathscr{L}[f^{(n)}] = \int_0^\infty e^{-sx} f'^{(n)}(x) \mathrm{d}x = \left\| \begin{matrix} u = e^{-sx} & u' = -se^{-sx} \\ v' = f^{(n)}(x) & v = f^{(n-1)}(x) \end{matrix} \right\| = \left[f^{(n-1)}(x) e^{-sx}\right]_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-sx} f^{(n-1)}(x) \mathrm{d}x = s\mathscr{L}[f^{(n-1)}] - f^{(n-1)}(0).$$

Speciálně pro první derivaci platí

$$\mathscr{L}[f'] = s\mathscr{L}[f] - f(0).$$

Za čtvrté si uvědomíme, že Laplaceova transformace je pořád jen obyčejný integrál a tudíž na ni účinkuje Leibnizovo pravidlo:

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathscr{L}_x[f(x,u)] = \mathscr{L}_x[\frac{\partial f}{\partial u}].$$

To nám bude aspoň prozatím stačit. Ztransformujeme obě strany rovnice. Někdo by se mohl snad tázat, jak to asi hodláme provést, když se transformuje jen podle jedné proměnné a u je funkce dvou proměnných. Takovému je třeba odpovědět, že transformujeme podle jedné z proměnných a druhou si necháme jako parametr. A kdyby se snad ten někdo opět tázal, podle které proměnné tedy budeme transformovat, odpověděli bychom mu, že podle t. Proveďme to tedy (budeme přitom psát $\tilde{f}$ místo $\mathscr{L}[f]$, ať netrpí přehledost zápisu; čárkami označujeme parciální derivaci podle x):

$$s\tilde{u} - u(x,0) = \mathscr{L}[u_t] = \mathscr{L}[a^2 u_{xx}] = a^2 \tilde{u}''.$$

Z počátečních podmínek víme, že $u(x,0) = 0$. Dosadivše, obdržíme obyčejnou diferenciální rovnici pro $\tilde{u}$:

$$\tilde{u}'' - \frac{s}{a^2}\tilde{u} = 0.$$

S tím si snadno poradíme:

$$\tilde{u} = C(s) e^{\sqrt{s}x/a} + D(s) e^{-\sqrt{s}x/a}.$$

Na tomto místě se zasekneme, protože nám chybí ještě jedna počáteční podmínka. Vzhledem k tomu, že jde o rovnici vedení tepla, usoudíme, že by se hodilo

$$\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$$

(rovnice vlastně simuluje vedení tepla v polonekonečné tyčce, na jejímž jediném konci je nějaké topítko, které jej udržuje na konstantní teplotě — a za takových podmínek asi nečekáme, že by se do nekonečna nějaké teplo dostalo, když tam předtím žádné nebylo. Ale ta podmínka by měla být podle mě uvedena, přecejenom neřešíme problém fysikální, ale čistě abstraktní, matematický; je jen náhoda, že jsme tu rovnici dovedli přirovnat k dějům v nějaké tyčce.) No a druhým důvodem, proč tuto podmínku tak násilně zavádíme, je, že by se ta rovnice velmi nepříjemně transformovala zpátky, a konečně třetím je to, že by pak výsledek neseděl s tím, co je napsáno v řešení (◡̈).

Když ztransformujeme tuto podmínku, kterou jsme si právě vyčarovali, dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} u(x,s) = 0.$$

Nedá se nic dělat, musíme položit $C = 0$. Jinak by se teplota směrem do nekonečna naopak zvyšovala nade všechny meze a to nechceme připustit. Zůstává nám tedy

$$\tilde{u} = D(s)e^{-\sqrt{s}x/a}.$$

Nyní nastal čas pro naši poslední podmínku. Taky ji ztransformujeme, obdržíme

$$\tilde{u}(0,s) = \mathscr{L}[K\cdot 1] = K\mathscr{L}[1] = \frac{K}{s}.$$

Z toho hned dostaneme $D(s) = \frac{K}{s}$. K řešení je už jen krok, a sice zpětná transformace výrazu

$$\tilde{u} = \frac{K}{s}e^{-\sqrt{s}x/a}.$$

Když nahlédneme do tabulky, zjistíme, že

$$u(x,t) = K(1 - \operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}),$$

kde

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Ten konec možná vypadá jako obrovský skok, ale ve skutečnosti je to jen hledání v tabulce, nic víc. I kdybych o tom chtěl napsat víc, tak nemůžu, protože není co psát. Dokázat, že transformací $K(1-\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}})$ je opravdu $\frac{K}{s}e^{-\sqrt{s}x/a}$, samozřejmě můžu, ale jednak by to bylo trochu zdlouhavé a jednak by to stejně nevysvětlilo, jak jsem zjistil, že zrovna tuhletu transformaci mám použít. Jde zkrátka jen o to mít dost dobrou tabulku.

Druhá

Máme řešit rovnici

$$\triangle u = 0$$

na polorovině $x \in \mathbb{R}, y > 0$, přičemž na hranici platí

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & a < x < b, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

To je jako stvořené k řešení pomocí Greenovy funkce. Obecně pro rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} \triangle u &= F \quad (\text{v oblasti } \Omega), \\ u &= f \quad (\text{na hranici } \partial\Omega). \end{aligned}$$

platí vztah pro řešení v tomto tvaru:

$$u(x,y) = \int_\Omega FG\,\mathrm{d}V + \oint_{\partial\Omega} f\,\mathfrak{grad}\,G\cdot\mathrm{d}\mathfrak{S},$$

kde G je jakási magická, jinak též Greenova funkce. Takže jediné, co je opravdu potřeba udělat, je zase otevřít nějaké tabulky a příslušnou Greenovu funkci si tam najít. Greenova funkce souvisí jen s tvarem oblasti, na níž se počítá, na rovnici samotné nijak nezávisí, takže najdeme Greenovu funkci pro polorovinu přesně toho tvaru, který se tu popisuje:

$$G = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{r}{r'} = \frac{1}{4\pi}\ln\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{(x-X)^2+(y+Y)^2},$$

a řešení dostaneme ve tvaru nádherného vzorce

$$u(x,y)=\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}F\ln\frac{(x-X)^2+(y-Y)^2}{(x-X)^2+(y+Y)^2}\mathrm{d}S+\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(X)}{(x-X)^2+y^2}\mathrm{d}X.$$

Do toho vzorce prostě dosadíme a dostaneme:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{f(X)\mathrm{d}X}{(x-X)^2+y^2}.$$

Funkce f je jedničková na intervalu (a,b) a nulová jinde, takže integrál přejde na

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}X}{(X-x)^2+y^2}.$$

Provedeme pár výpočtů …:

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}X}{(X-x)^2+y^2}=\frac{1}{y\pi}\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}X}{1+\left(\frac{X-x}{y}\right)^2}=\frac{1}{y\pi}\cdot y\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{X-x}{y}\right]_a^b$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b-x}{y}-\operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{y}\right)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{y(b-a)}{(x-a)(x-b)+y^2}.$$

Hotovo, řešení je na světě. Pokud vám to přijde jako příliš velké voodoo, tak jde bohužel v zásadě opět o šťastný nález v tabulkách. (Ve skutečnosti jsem si dělal nějaké poznámky ke Greenovým funkcím, když jsem se o tom učil, a během toho učení jsem si tenhle vzorec poctivě odvodil, ale moc-li pak se to od toho nálezu v tabulkách vlastně liší.)