Riešenie okrajovej úlohy PDE prvého stupňa prevodom na kanonický tvar

Kanonický tvar

Majme parciálnu diferenciálnu rovnicu prvého stupňa v tvare

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u) \tag{1}$$

Predpokladajme, že existuje transformácia súradníc: $[x,y] \longmapsto \xi(x,y), \eta(x,y)$ s nenulovým jacobiánom taká, že rovnica (1) prejde do kanonického tvaru

$$u_\eta(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,u), \tag{2}$$

Dostali sme tak obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je funkcia u, závislá na parametri ξ a na nazávislej premennej η. Z tvaru rovnice (3) je zrejmé, že závislosť na parametri ξ môže všeobecne vstupovať do jej riešenia explicitne, ale aj cez integračnú "konštantu"$\varphi(\xi)$ (vzhľadom k integračnej premennej η). Obecné riešenie (2) potom zapíšeme v tvare

$$u = u(\xi,\eta,\varphi(\xi)), \tag{3}$$

Okrajová úloha

Majme ďalej zadanú okrajovú úlohu v tvare

$$u(x_0(\sigma), y_0(\sigma)) = f_0(\sigma) \tag{4}$$

Na túto okrajovú úlohu sa môžeme pozerať, ako na parametrizáciu jednotlivých premenných parametrom σ (závislosť na tomto parametri sa následne vo všeobecnosti prejaví aj u hľadanej funkcii u). Dostávame tak tri rovnice

$$x = x_0(\sigma) \qquad y = y_0(\sigma) \qquad u = f_0(\sigma) \tag{5}$$

Motivácia postupu

Aby sme našli riešenie rovnice (2) splňujúce konkrétnu okrajovú úlohu zadanú rovnicou (4), potrebujeme sa v obecnom riešení (3) zbaviť závisloti na integračnej konštante $\varphi(\xi)$. Prevodom rovnice (1) na kanonický tvar sme dostali obyčajnú diferenciálnu rovnicu (ODE) prvého stupňa, skúsime preto ďalej postupovať podobne, ako pri riešení počiatočnej úlohy pre ODE. Do rovnice (3) dosadíme parametrizácie (5) a nájdeme konkrétne vyjadrenie integračnej konštanty v premennej σ. Integračnú konštantu φ však hľadáme v premennej ξ, ak teda nájdeme vzťah medzi σ a ξ, teda $\sigma = \sigma(\xi)$, získame konkrétne vyjadrenie integračnej konštatny $\varphi(\xi)$, ktoré môžeme spolu s transformačnými vzťahmi $\xi(x,y)$, $\eta(x,y)$ dosadiť do (3) a dostať tak hľadané riešenie rovnice (1).

Riešenie okajovej úlohy

Do obecného riešenia (3) dosadíme parametrizácie z rovníc (5). V integračnej konštatne $\varphi(\xi)$ však ponecháme funkčnú závislosť na ξ, pretože nakoniec aj tak potrebujeme nájsť túto neznámu funkciu v premennej ξ (vid. rovnica (3)) a ďalší postup by sa mohol stať nerehľadným. Vo výrazoch tiež ponecháme explicitne niektoré funkčné závislosti aj po ich parametrizácií parametrom σ, aby bolo jasnejšie ako táto štruktúra vzniká.

Dostávame teda

$$f_0(\sigma) = u\big(\xi(x_0(\sigma), y_0(\sigma)), \eta(x_0(\sigma), y_0(\sigma)), \varphi(\xi)\big) = u\big(\xi(\sigma), \eta(\sigma), \varphi(\xi)\big). \tag{6}$$

Keďže $\varphi(\xi)$ vystupuje v obecnom riešení (3) ako integračná konštanta, malo by byť možné z rovnice (6) túto neznámu funkciu vyjadriť.

$$f_0(\sigma) = u\big(\xi(\sigma), \eta(\sigma), \varphi(\xi)\big) \longrightarrow \varphi(\xi) = \mathcal{N}(\sigma). \tag{7}$$

Z druhej časti poslednej rovnice už vidíme, že ak by sme našli funkčnú závislosť medzi parametrami σ a ξ, teda $\sigma = \sigma(\xi)$, jej dosadením do (7) získame konkrétne vyjadrenie nezmámej funkcie $\varphi(\xi)$.

Keďže poznáme transformačný vzťah $\xi = \xi(x, y)$, môžeme doňho dosadiť parametrizáciu (5). Dostaneme tak $\xi = \xi(\sigma)$, odkiaľ ak sme schopní nájsť inverznú závislosť $\sigma = \sigma(\xi)$, máme hľadaný vzťah medzi parametrami σ a ξ.

$$\xi(x, y) = \xi\big(x_0(\sigma), y_0(\sigma)\big) = \xi(\sigma) \qquad \xi = \xi(\sigma) \longrightarrow \sigma = \sigma(\xi) \tag{8}$$

Ak sa nám podarilo vyjadriť $\sigma = \sigma(\xi)$, môžeme ju dosadiť do (7) a nájsť tak neznámu funkci $\varphi = \varphi(\xi)$

$$\varphi(\xi) = \mathcal{N}\big(\sigma(\xi)\big) \tag{9}$$

Takto získanú funkciu $\varphi(\xi) = \mathcal{N}\big(\sigma(\xi)\big)$ môžeme dosadiť do rovnice (3) a so znalosťou transformačných vzťahov $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ napísať riešenie rovnice (2)

$$u = u\big(\xi, \eta, \mathcal{N}\big(\sigma(\xi)\big)\big) = u\Big(\xi(x, y), \eta(x, y), \mathcal{N}\big(\sigma(\xi(x, y))\big)\Big) = u(x, y) \tag{10}$$

Poznámky

Tento postup predpokladá, že dokážeme jednoznačne určiť $\varphi(\xi) = \mathcal{N}(\sigma)$ z rovnice (7) a $\sigma = \sigma(\xi)$ z rovnice (8). Neznáma funkcia $\varphi(\xi)$ sa do rovnice (7) pôvodne dostala ako integračná konštanta, nemal by preto byť problém nájsť jej vyjadrenie $\varphi(\xi) = \mathcal{N}(\sigma)$ (Cauchy boundary condition problem pre ODR). Avšak vzhľadom na všeobecný tvar prvej časti rovnice (8), ťažko bez hlbších dôkazov niečo povedať o existencii a jednoznačnosti inverzného zobrazenia $\sigma = \sigma(\xi)$, čo samozrejme značne obmedzuje použiteľnosť tohto postupu.

Ilustračný Príklad

Majme PDE prvého stupňa v tvare

$$u_x + u_y = 1 \tag{11}$$

so zadanou okrajovou podmienkou

$$u(1, \sigma) = \sigma^2. \tag{12}$$

Riešme túto rovnicu najprv metódou charakteristík. Z charakteristického systému rovníc dostávame riešenia

$$x = s + c_1, \qquad y = s + c_2, \qquad u = s + c_3. \tag{13}$$

Pri riešení okrajovej úlohy dosadíme do riešení charakteristického systému rovníc $s = 0$, $x = 1$, $y = \sigma$, $u = \sigma^2$, odkiaľ pre neznáme konštanty c_i dostávame

$$c_1 = 1, \qquad c_2 = \sigma, \qquad c_3 = \sigma^2. \tag{14}$$

Dosadením nájdených konštánt c_i do riešení charakteristického systému dostávame

$$x = s + 1, \qquad y = s + \sigma, \qquad u = s + \sigma^2. \tag{15}$$

Našli sme tak $x = x(s, \sigma)$,$y = y(s, \sigma)$,$u = u(s, \sigma)$. Rovnice pre x a y predstavujú dve algebraické rovnice pre dve neznáme s a σ. Z týchto rovníc môžeme tieto neznáme nájsť a dosadiť do rovnice pre $u = u(s, \sigma)$.

$$s = x - 1, \qquad \sigma = y - x + 1. \tag{16}$$

Hľadané riešenie rovnice (11), splňujúce okrajovú úlohu (12) je potom

$$u = x - 1 + (y - x + 1)^2. \tag{17}$$

Riešme teraz rovnakú úlohu pomocou prevodu na kanonický tvar. Po nájdení transformačných vzťahov $\xi = x - y$ a $\eta = y$, prejde rovnica (11) do kanonického tvaru

$$u_\eta = 1, \tag{18}$$

ktorého riešením je

$$u = \eta + \varphi(\xi). \tag{19}$$

Zo zadania okrajovaj úlohy dostávame parametrizácie

$$x = 1, \qquad y = \sigma, \qquad u = \sigma^2, \tag{20}$$

ktoré môžeme dosadiť do známych transformačných vzťahov a obecného riešenia rovnice v kanonickom tvare (19)

$$\xi = 1 - \sigma, \qquad \eta = \sigma, \qquad \sigma^2 = \sigma + \varphi(\xi). \tag{21}$$

Z poslednej rovnice vieme nájsť integračnú konštantu $\varphi(\sigma)$ a z prvého transformačného vzťahu $\xi = \xi(\sigma)$ tiež $\sigma = \sigma(\xi)$

$$\sigma = 1 - \xi, \qquad \varphi(\sigma) = \sigma^2 - \sigma. \tag{22}$$

Vzájomným dosadením týchto vzťahov dostávame konkrétne vyjadrenie integračnej konštanty

$$\varphi(\xi) = (1 - \xi)^2 - 1 + \xi, \tag{23}$$

ktoré môžeme dosadiť spolu so známymi transformačnými vzťahmi do rovnice (19) a nájsť tak hľadané riešenie rovnice (11)

$$u = \eta + \varphi(\xi) = \eta + (1 - \xi)^2 - 1 + \xi = x - 1 + (1 - x + y)^2. \tag{24}$$

Riešenie okrajovej úlohy homogénnej LDE prvého stupňa

Majme LDE prvého stupňa v tvare

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0 \tag{25}$$

Jej implicitne zadané riešenie nájdeme napríklad metódou charakteristík

$$u = \Psi\big(\varphi(x,y)\big) \tag{26}$$

Riešme ďalej okrajovú úlohu

$$u(x_0(\sigma), y_0(\sigma)) = f_0(\sigma) \tag{27}$$

teda

$$x = x_0(\sigma) \qquad y = y_0(\sigma) \qquad u = f_0(\sigma) \tag{28}$$

Dosadením týchto výrazov do rovnice (26) dostávame

$$f_0(\sigma) = \Psi\big(\varphi(x_0(\sigma), y_0(\sigma)\big) = \Psi\big(\varphi(\sigma)\big) \tag{29}$$

Zaveďme novú premennú $\eta = \varphi(\sigma)$ a pokúsme sa nájsť inverzné vyjadrenie $\sigma = \sigma(\eta)$, ktoré dosadíme späť do rovnice (29)

$$\eta = \varphi(\sigma) \longrightarrow \sigma = \sigma(\eta) \qquad f_0\big(\sigma(\eta)\big) = \Psi(\eta) \tag{30}$$

Porovnaním posledného výrazu s rovnicou (26) vidíme, že nahradením $\eta = \varphi(x,y)$ nájdeme hľadané riešenie rovnice (25)

$$f_0\big(\sigma(\varphi(x,y))\big) = \Psi\big(\varphi(x,y)\big) = u(x,y) \tag{31}$$

Poznámky

Tento postup predpokladá existenciu inverzného zobrazenia $\sigma = \sigma(\eta)$ v prvej časti rovnice (30), čo opäť predstavuje obmedzenie pre jeho použiteľnosť. Zrejme sme sa tiež mohli pokúsiť previesť rovnicu (25) na jej kanonický tvar a použiť postup popísaný vyššie, no asi by to bolo dlhšie a problému s existenciou nejakého inverzného zobrazenia by sme sa nezbavili.

Ilustračný príklad

Majme zadanú rovnicu spolu s okrajovou úlohou

$$u_x + u_y = 0, \qquad u(1,\sigma) = \sigma^2. \tag{32}$$

Riešením jej charakteristického systému rovníc dostávame

$$x = s + c_1, \qquad y = s + c_2. \tag{33}$$

Do týchto vyjadrení môžeme dosadiť parametrizáciu z okrajovej úlohy, teda $s = 0$, $x = 1$, $y = \sigma$ a dostávame

$$1 = c_1, \qquad \sigma = c_2 \to x = s + 1, \qquad y = s + \sigma. \tag{34}$$

Z posledných dvoch rovníc už vieme vyjadriť parameter $\sigma(x,y)$ a dosadiť ho do závislosti $u(\sigma)$, známej z okrajovej úlohy

$$\sigma = y - x + 1, \qquad u = \sigma^2 = (y - x + 1)^2 \tag{35}$$

Riešme teraz rovnicu (32) s rovnakou okrajovou úlohou spôsobom popísaným v tomto texte. Z riešenia charakteristického systému rovníc (33) dostávame implicitne zadané riešenie rovnice (32)

$$u = \Psi\big(x - y\big). \tag{36}$$

Dosadením parametrizícií z okrajovej úlohy do poslednej rovnice, menovite

$$x = 1, \qquad y = \sigma, \qquad u = \sigma^2, \tag{37}$$

dostávame

$$u = \Psi\big(x - y\big) \to \sigma^2 = \Psi\big(1 - \sigma\big). \tag{38}$$

Zaveďme novú premennú $\eta = 1 - \sigma$, potom $\sigma = 1 - \eta$. Dosadením posledného výtazu do rovnice (38) máme

$$(1 - \eta)^2 = \Psi(\eta). \tag{39}$$

Porovnaním rovnice (39) a (36) vidíme, že ak zvolíme $\eta = x - y$, dostaneme hľadané riešenie

$$\Psi(x - y) = (1 - x + y)^2 = u(x,y). \tag{40}$$