Riešenie počiatočnej úlohy LDE prvého stupňa prevodom na kanonický tvar

Majme parciálnu diferenciálnu rovnicu prvého stupňa v tvare

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u) \tag{1}$$

Hľadáme transformácie súradníc: $[x,y] \longmapsto \xi(x,y), \eta(x,y)$ také, že rovnica (1) prejde v čo najjednoduchší (kanonický) tvar. Ďalej predpokladajme, že sme tieto transformačné vzťahy našli (ak zvolíme $\eta = y$, hľadáme $\xi = \xi(x,y)$). Proces hľadania je popísaný inde a snád nie je podstatný pre tento text. Rovnica (1) potom prejde do kanonického tvaru

$$u_\eta(\xi,\eta) = F(\xi,\eta,u), \tag{2}$$

kde $F = f/b$. Túto rovnicu je možné považovať za obyčajnú diferenciálnu rovnicu, ktorej riešením je funkce u, závislá na parametri ξ a na nazávislej premennej η. Z tvaru rovnice (3) je zrejmé, že závislosť na parametri ξ môže všeobecne vstupovať do jej riešenia explicitne, ale aj cez integračnú konštantu. Toto pozorovanie môžeme zapísať ako

$$u = u(\xi,\eta,\varphi(\xi)), \tag{3}$$

kde $\varphi(\xi)$ je integračná konštanta (vzhľadom k integračnej premennej η).Riešme ďalej počiatočnú úlohu (využijeme indexy kvôli prehľadnosti)

$$u(x_0(\sigma), y_0(\sigma)) = f_0(\sigma) \tag{4}$$

Na túto počiatočnú úlohu sa môžeme pozerať, ako na parametrizáciu jednotlivých premenných parametrom σ (závislosť na tomto parametri sa následne môže vo všeobecnom prípade prejaviť aj u funkcie u). Dostávame potom tri rovnice

$$x = x_0(\sigma) \qquad y = y_0(\sigma) \qquad u = f_0(\sigma) \tag{5}$$

Dosadeným týchto vzťahov do rovnice (3) dostávame

$$f_0(\sigma) = u\big(\xi(x_0(\sigma), y_0(\sigma)), \eta(x_0(\sigma), y_0(\sigma)), \varphi(\xi)\big) = u\big(\xi(\sigma), \eta(\sigma), \varphi(\xi)\big). \tag{6}$$

Za splnenia určitých matematických predpokladov je z rovnice (4) možné jednoznačne vyjadriť $\varphi(\xi)$

$$f_0(\sigma) = u\big(\xi(\sigma), \eta(\sigma), \varphi(\xi)\big) \longrightarrow \varphi(\xi) = \mathcal{H}(\sigma). \tag{7}$$

Z tejto rovnice vidíme, že ak nájdeme $\sigma = \sigma(\xi)$ a dosadíme je do poslednej rovnice, získame konkrétne vyjadrenie nezmámej funkcie $\varphi(\xi)$ pre počiatočnú podmienku zadanú rovnicou (4). Keďže poznáme transformačný vzťah $\xi = \xi(x,y)$, môžeme doňho dosadiť parametrizáciu (5). Dostaneme tak $\xi = \xi(\sigma)$, odkiaľ sme (za splnenia určitých matematických podmienok) schopní jednoznačne vyjadriť $\sigma = \sigma(\xi)$

$$\xi(x,y) = \xi\big(x_0(\sigma), y_0(\sigma)\big) = \xi(\sigma) \qquad \xi = \xi(\sigma) \longrightarrow \sigma = \sigma(\xi) \tag{8}$$

Ak sa nám podarilo vyjadriť $\sigma = \sigma(\xi)$, môžeme ju dosadiť do (7) a nájsť tak neznámu funkci $\varphi = \varphi(\xi)$

$$\varphi(\xi) = \mathcal{H}\big(\sigma(\xi)\big) \tag{9}$$

Takto získanú funkciu $\varphi(\xi) = \mathcal{H}\big(\sigma(\xi)\big)$ môžeme dosadiť do rovnice (3) a so znalosťou transformačných vzťahov $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$ napísať riešenie rovnice (2) vzhľadom na konkrétnu počiatočnu úlohu, zadanú rovnicou (4)

$$u = u\big(\xi, \eta, \mathcal{H}\big(\sigma(\xi)\big)\big) = u\Big(\xi(x, y), \eta(x, y), \mathcal{H}\big(\sigma(\xi(x, y))\big)\Big) = u(x, y) \tag{10}$$

Tento postup predpokladá, že dokážeme jednoznačne určiť $\varphi(\xi) = \mathcal{H}(\sigma)$ z rovnice (7) a $\sigma = \sigma(\xi)$ z rovnice (8). Neznáma funkcia $\varphi(\xi)$ sa do rovnice (7) pôvodne dostala ako integračná konštanta, nemal by preto byť problém nájsť jej vyjadrenie $\varphi(\xi) = \mathcal{H}(\sigma)$. Avšak vzhľadom na všeobecný tvar prvej časti rovnice (8), inverzné zobrazenie $\xi = \xi(\sigma)$ nemusí vždy existovať. Na odstránenie tejto nejednoznačnosti by bolo treba zostaviť reálny, matematický dôkaz - alebo tento postup nie je možné vždy jednoznačne použiť. Ak by boli nejednoznačnosti spôsobené iba nejakými znamienkami, mohli by sme úlohu vyriešiť s nejednoznačnými znamienkami "$\pm$"na týchto miestach, následne znovu dosadiť parametrizáciu počiatočnej úlohy do tohto riešenia a úpravami sa dopracovať ku správnym znamienkam.

Riešenie počiatočnej úlohy homogénnej LDE prvého stupňa

Majme LDE prvého stupňa v tvare

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0 \tag{11}$$

Jej implicitne zadané riešenie nájdeme napríklad metódou charakteristík:

$$u = \Psi\big(\varphi(x, y)\big) \tag{12}$$

Riešme ďalej počiatočnú úlohu

$$u(x_0(\sigma), y_0(\sigma)) = f_0(\sigma) \tag{13}$$

teda

$$x = x_0(\sigma) \qquad y = y_0(\sigma) \qquad u = f_0(\sigma) \tag{14}$$

Dosadením týchto výrazov do rovnice (12) dostávame

$$f_0(\sigma) = \Psi\big(\varphi(x_0(\sigma), y_0(\sigma)\big) = \Psi\big(\varphi(\sigma)\big) \tag{15}$$

Zaveďme novú premennú $\eta = \varphi(\sigma)$ a pokúsme sa nájsť inverzné vyjadrenie $\sigma = \sigma(\eta)$, ktoré dosadíme do rovnice (15)

$$\eta = \varphi(\sigma) \longrightarrow \sigma = \sigma(\eta) \qquad f_0\big(\sigma(\eta)\big) = \Psi(\eta) \tag{16}$$

Porovnaním takto získaného výrazu s rovnicou (12) vidíme, že nahradením $\eta = \varphi(x, y)$ nájdeme riešenia rovnice (11) vzhľadom ku konkrétnej počiatočnej úlohe zadanej rovnicou (13)

$$f_0\big(\sigma(\varphi(x, y))\big) = \Psi\big(\varphi(x, y)\big) = u(x, y) \tag{17}$$

Tento postup závisí na existencii inverzného zobrazenia $\sigma = \sigma(\eta)$ v prvej časti rovnice (16), čo bez ďalšieho dôkazu môže spôsobovať komplikácie v rámci jeho použiteľnosti.