Rovnice matematické fyziky M4010

Tento text obsahuje příklady a návody do cvičení k předmětu, je průběžně opravován a doplňován. Tato verze je k datu March 24, 2020.

Cvičení PDE 0.

Opakování obyčejných diferenciálních rovnic (první řád: Picardova a Peanova věta, Lipschitzova podmínka, rovnice separovatelné, rovnice s homogenní funkcí, rovnice převoditelné na separaci, lineární, Bernoulliova, exaktní, Clairautova a Lagrangeova rovnice, vyšší řád: lineární s konstantními koeficienty, metoda variace konstant, speciální pravá strana, soustavy rovnic. Skripta Roman Plch: Příklady z matematické analýzy, Diferenciální rovnice

Cvičení PDE 1.

Opakování parciální derivace, derivace složené funkce, převod operátorů a PDE do nových proměnných. Pojmy (definujte): Parciální derivace, druhá a vyšší parciální derivace, Schwarzova věta, derivace ve směru, operátor rotace, gradientu, divergence, Laplaceův operátor.

1. S využitím vzorců

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x, \qquad z_y = z_u u_y + z_v v_y$$

odvďte vzorce pro převod z_{xx}, z_{yy}, z_{xy}.

Řešení:

$$\begin{aligned} z_{xx} &= z_{uu}u_x^2 + 2z_{uv}u_xv_x + z_{vv}v_x^2 + z_u u_{xx} + z_v v_{xx} \\ z_{yy} &= z_{uu}u_y^2 + 2z_{uv}u_yv_y + z_{vv}v_y^2 + z_u u_{yy} + z_v v_{yy} \\ z_{xy} &= z_{uu}u_xu_y + z_{uv}[u_xv_y + u_yv_x] + z_{vv}v_xv_y + z_u u_{xy} + z_v v_{xy} \end{aligned}$$

---

2. Vypočtěte parciální derivace následujících funkcí podle všech proměnných prvního (případně i druhého) řádu:

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2\sqrt{y}}{\operatorname{arctg}(x-2y)} \\ z &= \cos\sqrt{xy}^{(x^2+y^2)} \\ z &= \sqrt{\arccos\frac{xy-x^2}{x^2+y+1}} \\ u &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot \mathrm{e}^{xyz} \\ u &= (x\sin y\cos z)^{(x-y+\sqrt{z})} \end{aligned}$$

---

3. Převeďte PDE do nových proměnných u a v:

a) $z_{xx} - z_{yy} = 0, u = x + y, v = x - y$
(řešení: $4z_{uv} = 0$)

b) $z_{xx} - y^4 z_{yy} - 2y^3 z_y = 0, u = x + \frac{1}{y}, v = x - \frac{1}{y}$
(řešení: $4z_{uv} = 0$)

c) $x^2 z_{xx} - y^2 z_{yy} + xz_x - yz_y = 0, u = xy, v = \frac{x}{y}$
(řešení: $4uvz_{uv} = 0$)

d) $x^2 z_{xx} - (x^2+y^2) z_{xy} + y^2 z_{yy} - 2y z_y - 2x z_x = 0, u = x + y, v = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

e) $y^2 z_{xx} + x^2 z_{yy} - 2xy z_{xy} = 0, u = \sqrt{x^2+y^2}, v = xy$
(řešení: $(u^2 - 4v^2) z_{vv} + \frac{u^2-2v^2}{u^3} z_u = 0$?)

f) $x z_{xx} + y z_{xy} + z_x, u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$

g) $z_{xx} - y z_{yy} - \frac{1}{2} z_y = 0, u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$
(řešení: $z_{uv} = 0$)

h) $z_{xx} - 2z_{xy} + z_{yy} - \frac{1}{2} z_y = 0, u = x + y, v = \frac{1}{x-y}$

i) $x z_{xx} - y z_{yy} = 0, u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$
(řešení: $(u^2 - v^2) z_{uv} + 4v z_u - 4u z_v = 0$?)

---

4. Navíc Převeďte Laplaceův operátor do válcových a kulových souřadnic. Případně převeďte i další operátory (gradiend, rotace, divergence).

Řešení:

$$\begin{aligned}\Delta_{kulove} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \mathrm{tg}\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta} \\ \Delta_{valcove} &= \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho}\end{aligned}$$

Domácí úkol: Vymyslete a vypočtěte příklad podobný jako 2 (výpočet parciální derivace), 3 (převod PDE do nových souřadnic), 4 (převod operátoru do nových souřadnic).

Cvičení PDE 2.

Opakování Fourierových řad, Fourierova a Laplaceova transformace, konvoluce funkcí. Pojmy: skalární součin, ortogonalita, ortonormálnost, ortogonální projekce, ortogonální posoupnost, Fourierova řada, Fourierovy koeficienty, Besselova nerovnost, Parsevalvova rovnost, stejnoměrná a bodová konvergence, Dirichletova věta, liché, sudé, periodické rozšíření funkce. Další příklady Došlá, Novák: Nekonečné řady.

Fourierova řada funkce f vzhledem k ortogonálnímu systému $\{\varphi_n\}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_n)}{(\varphi_n, \varphi_n)} \cdot \varphi_n,$$

kde (,) je skalární součin.

1. Navíc Ukažte ortogonalitu systému $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

Ukažte, že Fourierova řada 2π-periodické funkce má pak tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \bigl(a_n \cos nx + b_n \sin nx\bigr),$$

kde

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N}.$$

---

2. Jak bude vypadat rozvoj $2h$- periodické funkce integrovatelné na intervalu $[-h, h]$?

Řešení:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x,$$

kde

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{\pi} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x \mathrm{d}x, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Pozn.: Podobně postupujte na libovolném intervalu $[a, b]$.

---

3. Navíc Vyjádřete Fourierovu řadu v oboru **C**

$$\sum_{-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}.$$

Využijte vztahů

$$\cos x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}, \quad \sin x = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}},$$

$$c_n = \frac{a_n - b_n \mathrm{i}}{2}, \quad c_{-n} = \frac{a_n + b_n \mathrm{i}}{2}.$$

---

4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce

a) $f(x) = x^2$ na $[-\pi, \pi]$
(řešení: $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$)

b) $f(x) = \mathrm{e}^x$ na $[0, 2\pi]$
(řešení: $\frac{\mathrm{e}^{2\pi}-1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} \cos nx - \frac{n}{n^2+1} \sin nx \right) \right]$)

c) $f(x) = x$ kosinovou řadu na $[0, \pi]$
(řešení: $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \cos nx$)

d) $f(x) = x$ na $[-1, 1]$
(řešení: $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi x$)

e) $\operatorname{sgn}(x)$ na $[-\pi, \pi]$ (řešení: $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$)

f) $f(x) = 0$ pro $x \in [-\pi, 0]$, $f(x) = \sin x$ pro $x \in [0, \pi]$ (řešení: $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$)

g) $f(x) = \cos x$ pro $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = -\cos x$ pro $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ — kosinovou řadu. (řešení: $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}$)

h) $f(x) = |x|$ na $(-l, l)$ (řešení: $\frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$)

Domácí úkol:
Výpočet alespoň jedné Fourierovy řady nějaké funkce.

Zopakovat (více ve cvičení 6):

Konvoluce funkcí f a g:

$$f \star g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)\mathrm{d}t$$

Fourierův obraz funkce f:

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

Laplaceův obraz funkce f:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \tilde{f}(s) = \int_{0}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t$$

Cvičení PDE 3.

PDE prvního řádu pro funkci dvou proměnných: lineární homogenní, quasilineární, obecná, semilineární, lineární nehomogenní. Quasilineární rovnice pro funkci n-proměnných. Metoda charakteristik a metoda převodu na kanonický tvar.

Poznámka: Lineární rovnice je taková, která je lineární ve všech derivacích včetně nulté a příslušné koeficienty jsou funkcemi pouze nezávisle proměnných stejně jako funkce na pravé straně, tedy například pro první řád a dvě proměnné

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y),$$

pro druhý řád

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + \alpha(x,y)u_x + \beta(x,y)u_y + \gamma(x,y)u = f(x,y).$$

Semilineární rovnice je taková, která je lineární v nejvyšších derivacích, tedy například pro první řád a dvě proměnné

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y,u),$$

pro druhý řád

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} = f(x,y,u_x,u_y,u).$$

Quasilineární rovnice pouze vypadá lineárně v nejvyšších derivacích, ale koeficienty u nejvyšších derivací mohou záviset na všech derivacích nižšího řádu než je řád rovnice, tedy například pro první řád a dvě proměnné

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = f(x,y,u),$$

pro druhý řád

$$a(x,y,u_x,u_y,u)u_{xx} + b(x,y,u_x,u_y,u)u_{xy} + c(x,y,u_x,u_y,u)u_{yy} = f(x,y,u_x,u_y,u).$$

Ukažte, že pro lineární rovnici je splněn princip superpozice (množina řešení homogenní rovnice je uzavřená na lineární kombinace, obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem obecného řešení homogenizované rovnice a libovolného partikulárního řešení původní rovnice). Ukažte na vhodném příkladu, že pro semilineární rovnici to neplatí.

Návody pro cvičené opice:

Lineární homogenní rovnice:

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$x'(s) = a(x,y), \quad y'(s) = b(x,y).$$

Soustava má řešení $x = x(s)$, $y = y(s)$. Je-li $\phi(x,y) = C$ implicitní popis charakteristických trajektorií, pak funkce $u(x,y) = \Phi(\phi(x,y))$ je řešení rovnice. Jaká je geometrická interpretace tého úlohy?

Okrajová úloha pro lineární rovnici vznikne přidáním podmínky:

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Do řešení soustavy $x = x(s, C_1, C_2)$, $y = y(s, C_1, C_2)$ dosadíme za $s = 0$ a z rovnic $x(0, C_1, C_2) = \varphi(\sigma)$, $y(0, C_1, C_2) = \psi(\sigma)$ určíme konstanty C_1 a C_2. Po dosazení vypočtených konstant zpět do rovnic $x = x(s,\sigma)$, $y = y(s,\sigma)$ vyjádříme σ pomocí x a y a dosadíme do $u = f(\sigma)$ dostaneme řešení počáteční úlohy, které je jediné:

$$u(x,y) = f(\sigma(x,y)).$$

1. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy, u rovnic bez okrajové podmínky zvolte vhodnou křivku, zadejte okrajovou podmínku a určete řešení:

a) $xu_x + yu_y = 0$
(řešení $u = \Phi(y/x)$ nebo $u = \Phi(x/y)$)

b) $yu_x + xu_y = 0$
(řešení $u = \Phi(x^2 - y^2)$)

c) $yu_x - xu_y = 0$, $x = \sigma$, $y = \sigma$, $u(\sigma,\sigma) = 2\sigma^2$
(řešení $u = x^2 + y^2$)

d) $\sin x \sin y u_x + \cos x \cos y u_y = 0$, $u = \cos 2y$ na $x + y = \frac{\pi}{2}$
(řešení: $u = 2\cos y \sin x - 1$)

e) $\sin x \sin y u_x + \cos y \cos y u_y = 0$
(řešení: $u = \Phi\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2}{\cos y}}\right)$)

Quasilineární rovnice

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x'(s) &= a(x,y,u) \\ y'(s) &= b(x,y,u) \\ u'(s) &= c(x,y,u) \end{aligned}$$

Je-li $\varphi_1 = \varphi_1(x,y,u)$, $\varphi_2 = \varphi_2(x,y,u)$ implicitní popis řešení této soustavy, pak řešení původní rovnice je dáno implicitně vztahem:

$$\Phi(\varphi_1(x,y,u), \varphi_2(x,y,u)) = 0.$$

Okrajová úloha pro quasilineární rovnici vznikne přidáním podmínky:

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Do řešení $x = x(s, C_1, C_2, C_3)$, $y = y(s, C_1, C_2, C_3)$, $u = u(s, C_1, C_2, C_3)$ dosadíme za $s = 0$ a z rovnic $x(0, C_1, C_2, C_3) = \varphi(\sigma)$, $y(0, C_1, C_2, C_3) = \psi(\sigma)$, $u(0, C_1, C_2, C_3) = f(\sigma)$ určíme konstanty C_1, C_2, C_3. Dosazením vypočtených konstant do rovnic $x = x(s, \sigma)$, $y = y(s, \sigma)$ pak vyjádříme s a σ pomocí x a y a dosadímě do třetí rovnice $u = u(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma))$, tak získáme řešení počáteční úlohy, které je jediné:

$$u = u(s(x, y), C_1(\sigma(x, y)), C_2(\sigma(x, y)), C_3(\sigma(x, y))).$$

2. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

a) $xu_x + yu_y = 2u$, $x = \cos\sigma$, $y = \sin\sigma$, $u(\cos\sigma, \sin\sigma) = 1$
(řešení $u = x^2 + y^2$)

b) $yu_x + xu_y = 2u$
(řešení $u : \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = 0$, $\varphi_1 = \frac{(x+y)^2}{u}$, $\varphi_2 = (x - y)^2 u$)

b1) $yu_x + xu_y = 2u$, $u(x, 0) = 1$
(řešení $u = (x + y)/(x - y)$)

b2) $yu_x + xu_y = 2u$, $u(x, 0) = x^2$
(řešení $u = (x + y)^2$)

c) raději neřešit $(u + y)u_x + (u + x)u_y = x + y$

d) $u_x + u_y = u^2$, $u(x, 0) = g(x)$
(řešení $u = \frac{g(x-y)}{1-yg(x-y)}$)

e) $xu_y - yu_x = u$, v prvním kvadrantu, $u(x, 0) = g(x)$
(řešení $u = g(\sqrt{x^2 + y^2})\mathrm{e}^{\arctan \frac{y}{x}}$)

Obecná rovnice prvního řádu s okrajovou podmínkou:

$$F(x, y, u, u_x = p, u_y = q) = 0$$

$$x = \varphi(\sigma), \quad y = \psi(\sigma), \quad u(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) = f(\sigma)$$

Řešení metodou charakteristik, tj. soustavou rovnic:

$$\begin{aligned}
x'(s) &= F_p \\
y'(s) &= F_q \\
u'(s) &= pF_p + qF_q \\
p'(s) &= -F_x - pF_u \\
q'(s) &= -F_y - qF_u \\
0 &= F(x(0), y(0), u(0), p(0), q(0)) \quad \text{(počáteční podmínka)}
\end{aligned}$$

Z derivace okrajové podmínky $f' = p\varphi' + q\psi'$, tj. speciálně

$$f' = p_0\varphi' + q_0\psi'$$

a rovnice

$$F(\varphi(\sigma), \psi(\sigma), f(\sigma), p_0, q_0) = 0$$

vypočteme p_0 a q_0. Z počáteční podmínky pro soustavu:

$$\begin{array}{rcl} x(0) & = & \varphi(\sigma) \\ y(0) & = & \psi(\sigma) \\ u(0) & = & f(\sigma) \\ p(0) & = & p_0 \\ q(0) & = & q_0 \end{array}$$

Určíme konstanty C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 a dosadíme do řešení:
$x = x(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma), C_4(\sigma), C_5(\sigma))$,
$y = y(s, C_1(\sigma), C_2(\sigma), C_3(\sigma), C_4(\sigma), C_5(\sigma))$. Vyjádříme $s = s(x, y)$, $\sigma = \sigma(x, y)$ a najdeme řešení okrajové úlohy, které je jediné:

$$u(x, y) = u(s(x, y), C_1(\sigma(x, y)), C_2(\sigma(x, y)), C_3(\sigma(x.y)), C_4(\sigma(x, y))), C_5(\sigma(x, y))).$$

3. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

a) $xu_x^2 + yu_y^2 = u$, $u(\sigma, \sigma) = 2\sigma$
(řešení $u = x + y$)

b) $xu_x^2 + yu_y^2 = u$, $u(1, y) = 1$
(řešení $u = x$ a $u = (2 \pm \sqrt{x})^2$)

b) $u_x y_y = u$, $u(0, y) = y^2$
(řešení $u = (y + \frac{x}{4})^2$)

c) $4u = u_x^2 - u_y^2$, $u(\cos\sigma, \sin\sigma) = \cos 2\sigma$
(řešení $u = x^2 - y^2$)

d) $u_x^2 + yu_y = u$, $u(1, \sigma) = \sigma$
(řešení $u = y$)

Nehomogenní rovnice lineární v derivacích (tj. semilineární):

$$a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = f(x, y, u)$$

Řešení převodem na kanonický tvar:
Řešíme obyčejnou diferenciální rovnici

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{b(x, y)}{a(x, y)}.$$

Původní rovnici transformujeme do novým proměnných $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = y$, kde $\varphi(x, y) = C$ je implicitní popis řešení obyčejné rovnice. Transformací získáme kanonický tvar

$$u_\eta(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, u),$$

který vyřešíme integrací.

4. Řešte rovnice nebo okrajové úlohy:

a) Řešte rovnice, u kterých je to možné, z předchozích zadání převodem na kanonický tvar.

b) $xu_x + yu_y = 2u$
(řešení $u = k(\frac{y}{x}) \cdot y^2$)

c) $yu_x + u_y = -u$
(řešení $u = k(y^2 - 2x) \cdot \mathrm{e}^y$)

d) $u_x + u_y = -u(x - y)$
(řešení $u = k(y - x) \cdot \mathrm{e}^{y^2 - xy}$

e) $x^2 u_x + xyu_y = u^2$
(řešení $u = \frac{x}{1+xC(\frac{y}{x})} = \frac{xy}{y+xyD(\frac{y}{x})}$)

e1) $x^2 u_x + xyu_y = u^2$, $u(1, y) = y$
(řešení $u = \frac{xy}{y+x^2-xy}$

e2) $x^2 u_x + xyu_y = u^2$, $u(\cos\sigma, \sin\sigma) = 1$
(řešení $u = \frac{x}{1+x\left[1-\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right]}$)

e3) $x^2 u_x + xyu_y = u^2$, $u(x, 1 - x) = x$
(řešení $u = \frac{x^2}{x+y^2+xy}$)

Quasilineární rovnice pro funkci n proměnných s okrajovou podmínkou:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, u) u_{x_i} = f(x_1, \ldots, x_n, u),$$

$$x_i = \varphi_i(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}),\ i = 1, \ldots n, \quad u(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = u_0(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}).$$

Řešení metodou charakteristik:

je analogické (ale pracné, proto to ani nebudeme zkoušet). Řešíme soustavu $n + 1$ rovnic $x_i' = a_i, i = 1, \ldots n$, $u' = f$. Dosadíme $s = 0$, určíme konstanty, vyjádříme $s, \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ z n rovnic pro x_i a dosadíme do řešení $u = u(s(x1, \ldots, x_n), \sigma(x_1, \ldots, x_n))$.

Transportní rovnice

5. Ukažte, že řešení *transportní rovnice* pro funkci $u = u(t, x, y, z)$ a vektor $\vec{b} = (b^1, b^2, b^3)$

$$u_t + \vec{b} \cdot (u_x, u_y, u_z) = f(t, x, y, z)$$

s počáteční podmínkou

$$u(0, x, y, z) = g(x, y, z)$$

je

$$u(t, x, y, z) = g(x - b^1 t, y - b^2 t, z - b^3 t) + \int\limits_0^t f(\xi, x - b^1(t - \xi), y - b^2(t - \xi), z - b^3(t - \xi)) \mathrm{d}\xi.$$

Dále ukažte, že řešení rovnice

$$u_t + \vec{b} \cdot (u_x, u_y, u_z) + cu = 0, \quad \text{kde } c \text{ je konstanta}$$

je

$$u(t, x, y, z) = g(x - b^1 t, y - b^2 t, z - b^3 t)\mathrm{e}^{-ct}.$$

Navrhněte konkrétní příklady transportních rovnic s počátečními podmínkami a vyřešte.

Cvičení ze skript Franců:

6. Nalezněte obecné řešení následujících lineárních rovnic:

a) $xu_x - yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$

b) $yu_x - xu_y + 2xyu_z = 0$

c) $xu_x + 2yu_y - (2x^2 + 4y^2)u_z = 0$

d) $xu_x + yu_y + 2zu_z = 0$

e) $u_x + yu_y + 2zu_z = 0$

7. Nalezněte obecné řešení následujících kvazilineárních rovnic i řešení splňující uvedenou podmínku:

a) $xu_x - yu_y = x^2 + y^2, \quad u(x, -x) = x^2$

b) $yu_x - xu_y = 2xy, \quad u(x, x) = 2x^2 - 1$

c) $xu_x + 2yu_y + (2x^2 + 4y^2) = 0, \quad u(x, x) = 1 - x^2$

d) $xu_x + yu_y = 2u, \qquad u(x,1) = x$

e) $u_x + yu_y = 2u, \qquad u(x,1) = \mathrm{e}^x$

f) $yuu_x + xuu_y = 2xy, \qquad u(x,0) = 2x$

g) $2xu_x - yu_y = x^2 + y^2, \qquad u(2,y) = 1 - y^2$

h) $x^2u_x + yu_y = 2u, \qquad u(1,y) = y^3$

i) $u_x - y^2u_y = u^2, \qquad u(x,1) = \frac{1}{2x}$

j) $xu_x + yu_y = 2(x^2 + y^2), \qquad u(1,y) = 2y^2 + 1$

8. V rovnicích určete a načrtněte charakteristiky, napište obecné řešení, zvolte si vhodnou podmínku a určete partikulární řešení. Spočtené řešení ověřte zkouškou.

a) $u_x + 3u_y = 0$

b) $2u_x - u_y = 0$

c) $u_x + yu_y = 0$

d) $u_x + xu_y = 0$

e) $xu_x + yu_y = 0$

f) $xu_x - yu_y = 0$

g) $yu_x + xu_y = 0$

h) $yu_x - xu_y = 0$

i) $xu_x + 2yu_y = 0$

j) $xu_x - 2yu_y = 0$

k) $yu_x + 2xu_y = 0$

l) $yu_x - 2xu_y = 0$

Domácí úkol:
Vyřešení třech homogenních lineárních rovnic, nákres charakteristik. Vyřešení dvou nehomogenních semilineárních rovnic obecně, poté s okrajovou podmínkou, obrázek. Řešte jak převodem na kanonický tvar, tak pomocí metody charakteristik (pro quasilineární rovnice). Vyřešení jedné quasilineární a jedné obecné rovnice s okrajovou podmínkou metodou charakteristik.

Cvičení PDE 4.

Klasifikace semilineárních PDE druhého řádu, Sylvestrův zákon, signatura kvadratických forem. Metoda převodu na kanonický tvar - výpočet nových proměnných.

Klasifikace rovnic pro dvě proměnné:

Rovnice

$$A(x,y)u_{xx} + 2B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y)$$

je

- **hyperbolická**, jestliže $B^2 - AC > 0$, kanonický tvar:
$$u_{\xi\eta} = F_1(\xi,\eta,uu_\xi,u_\eta)$$
- **parabolická**, jestliže $B^2 - AC = 0$, kanonický tvar:
$$u_{\xi\xi} = F_2(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$
- **eliptická**, jestliže $B^2 - AC < 0$, kanonický tvar:
$$u_{\xi\xi} + u_{\eta,\eta} = F_3(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$$

Charakteristická rovnice je obyčejná diferenciální rovnice druhého řádu

$$Ay'^2 - 2By' + C = 0$$

tj.

H $y' = \frac{1}{A}\left[B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right]$ pro hyperbolickou,

P $y' = \frac{B}{A}$ pro parabolickou,

E nemá reálné charakteristiky pro eliptickou rovnici, $y' = \frac{1}{A}\left[B \pm \mathrm{i}\sqrt{AC - B^2}\right] = \mu \pm \mathrm{i}\nu$.

(Transformace do nových souřadnic $\xi = \xi(x,y)$, $\eta = \eta(x,y)$ musí splňovat $\xi_x\eta_y \neq \xi_y\eta_x$.)

Hyperbolická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, kde $\varphi(x,y) = C_1$, $\psi(x,y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristik (řešení H).

Parabolická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, kde $\psi(x,y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristiky (řešení P) a $\varphi(x,y)$ je libovolná nezávislá funkce.

Eliptická rovnice

Transformujeme ji do nových proměnných $\xi = \varphi(x,y)$, $\eta = \psi(x,y)$, kde $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi)$, $\psi(x,y) == \frac{1}{2\mathrm{i}}(\Phi - \Psi)$ a $\Phi(x,y) = C_1$, $\Psi(x,y) = C_2$ je implicitní vyjádření charakteristiky (řešení E).

Rovnice s konstantními koeficienty Řešení rovnice

$$Au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} = du_x + eu_y + fu + g(x,y)$$

můžeme (po předchozí transformaci) hledat ve tvaru $u = v\mathrm{e}^{\lambda\xi+\mu\eta}$, $v = v(\xi,\eta)$ a vhodnou volbou konstant λ a μ převést na jednodušší tvar.

---

1. Klasifikujte a převeďte rovnici na kanonický tvar (s výjimkou eliptických nalezněte řešení):

a) $yu_{yy} - xu_{xy} + u_y = 0$
(řešení: hyperbolická, $\xi = x$, $\eta = xy$, $u_{\xi\eta} = 0$, $u = F(x) + G(xy)$)

b) $x^2u_{xx} - 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} - x^2u_x + (x+2)yu_y = 0$
(řešení: parabolická, např. $\xi = xy$, $\eta = x$, $\eta^2(u_{\eta\eta} - u_\eta) = 0$, $u = \mathrm{e}^x \cdot C(xy) + D(xy)$?)

c) $y^2u_{yy}+x^2u_{yy} = 0$ (řešení: eliptická, $\xi = y^2$, $\eta = x^2$, $2\xi\eta\Delta u = -\xi u_\eta - \eta u_\xi$)

d) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$
(řešení: eliptická, $\xi = x + 2y$, $\eta = \sqrt{7}x$, $\Delta u = 0$)

Cvičení ze skript Franců:
Klasifikujte a převeďte rovnici na kanonický tvar

a) $u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} - 3u_x = 0$

b) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} = 2u_x + u_y$

c) $u_{xx} - u_{xy} + 2u_{yy} = 0$ (řešení: eliptická $\Delta u = 0$, $\xi = x - 2y$, $\eta = x$)

d) $u_{xx} + u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

e) $x^2u_{xx} - y^2u_{yy} = 0$ (řešení: hyperbolická $u_{\xi\eta} = u_\xi/\eta$, $\xi = y/x$, $\eta = xy$)

f) $y^2u_{xx} + x^2u_{yy} = 0$

g) $x^2u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^2u_{yy} = 0$

h) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x - 5u_y + 4u = 0$

i) $u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 5u_x + 5u_y + 4u = 0$

j) $5u_{xx} - 6u_{xy} + u_{yy} = u_y$

k) $u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = u_x + u_y$

l) $u_{xx} - 7u_{xy} + 12u_{yy} = u_x$

m) $u_{xx} + 2u_{xy} - 15u_{yy} = u_y + u$

n) $3u_{xx} - 4u_{xy} + u_{yy} = 3u_x - u_y$

Domácí úkol

Převeďte na kanonický tvar jednu eliptickou, jednu parabolickou a jednu hyperbolickou rovnici.

Cvičení PDE 5.

Řešení počáteční úlohy pro hyperbolickou rovnici ve dvou nezávisle proměnných.

1. Homogenní hyperbolická rovnice (kmity nekonečné struny)
Rovnice

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

2. Homogenní hyperbolická rovnice (kmity nekonečné struny) s obecným počátkem
Rovnice

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x), \quad (t,x) \in (\sigma,\infty) \times (-\infty,\infty),$$
$$u(\sigma,x) = \varphi(x), \quad u_t(\sigma,x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x) = \frac{\varphi(x-a(t-\sigma)) + \varphi(x+a(t-\sigma))}{2} + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} \psi(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

3. Nehomogenní hyperbolická rovnice s homogenní počáteční podmínkou (buzené kmity nekonečné struny)
Rovnice

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = 0, \quad u_t(0,x) = 0, \quad x \in (-\infty,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x) = \frac{1}{2a} \int\limits_0^t \left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)} f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi \right) \mathrm{d}\sigma.$$

4. Obecná počáteční úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici
Rovnice

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx}(t,x) + f(t,x), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times (-\infty,\infty),$$
$$u(0,x) = \varphi(x), \quad u_t(0,x) = \psi(x), \quad x \in (-\infty,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma.$$

5. Obecná počáteční úloha pro nehomogenní hyperbolickou rovnici s jednou okrajovou podmínkou (kmity nekonečné struny upevněné na jednom konci)
Rovnice

$$u_{tt}(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x),\quad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,\infty),$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,\infty),$$

$$u(t,0)=0,\quad t\in(0,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x)=\frac{\tilde\varphi(x-at)+\tilde\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\tilde\psi(\xi)\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\left(\int\limits_{x-a(t-\sigma)}^{x+a(t-\sigma)}\tilde f(\sigma,\xi)\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}\sigma,$$

kde $\tilde\varphi$, $\tilde\psi$, $\tilde f$ jsou lichá rozšíření funkcí φ, ψ, f.

(Je-li okrajová podmínka nehomogenní $u(t,0)=\alpha(t)$ je řešení

$$u(t,x)=v(t,x)+\alpha(t),$$

kde $v(t,x)$ je řešení předchozí úlohy, ve které $f(t,x)$ nahradíme $f(t,x)-\alpha''(t)$, $\psi(x)$ nahradíme $\psi(x)-\alpha'(0)$ a $v(t,0)=0$.)

6. Obecná počáteční úloha pro hyperbolickou rovnici s okrajovými podmínkami Dirichletova typu (kmity konečné struny upevněné na obou koncích)
Rovnice

$$u_{tt}(t,x)=a^2u_{xx}(t,x)+f(t,x),\quad (t,x)\in(0,\infty)\times(0,l),$$

$$u(0,x)=\varphi(x),\quad u_t(0,x)=\psi(x),\quad x\in(0,l),$$

$$u(t,0)=u(t,l)=0,\quad t\in(0,\infty),$$

má řešení

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\omega t+B_n\sin n\omega t)\sin\frac{n\pi}{l}x+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f(\sigma,\xi)G(x,\xi,t-\sigma)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\sigma,$$

kde

$$\begin{aligned}
\omega &= \frac{a\pi}{l}, \\
A_n &= \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi, \\
B_n &= \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi \mathrm{d}\xi, \\
G(x,\xi,t-\sigma) &= \frac{2}{a\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi a}{l}(t-\sigma).
\end{aligned}$$

(Pro nehomogenní okrajovou podmínku $u(t,0)=\alpha$, $u(t,l)=\beta$ je $u = v(t,x)+U(t,x)$, kde $U(t,x)=\alpha(t)+\frac{x}{l}(\beta(t)-\alpha(t))$ a $v(t,x)$ je řešení předchozí úlohy ve které $f(t,x)$ nahradíme $f(t,x)-U_{tt}(t,x)+a^2U_{xx}(t,x)$, $\varphi(x)$ nahradíme $\varphi(x)-U(0,x)$, $\psi(x)$ nahradíme $\psi(x)-U_t(0,x)$ a $v(t,0)=v(t,l)=0$.)

---

1. Nalezněte řešení:

a) $u_{tt}-u_{xx}=0$, $u(0,x)=\sin x$, $u_t(0,x)=x\cos x$
(řešení: $u=\frac{1}{2}\left[\sin(x-t)+\sin(x+t)+(x+t)\sin(x+t)+\cos(x+t)-\right.$
$\left.-(x-t)\sin(x-t)-\cos(x-t)\right]$)

b) $u_{tt}-u_{xx}=0$, $u(0,x)=2x$, $u_t(0,x)=\ln(1+x^2)$
(řešení: $u=2x+\frac{1}{2}\left[(x+t)\ln(1+(x+t)^2)-2(x+t)+2\arctan(x+t)-\right.$
$\left.-(x-t)\ln(1+(x-t)^2)+2(x-t)-2\arctan(x-t)\right]$)

c) $u_{tt}-u_{xx}=\sin x$, $u(0,x)=x$, $u_t(0,x)=\frac{1}{x}$
(řešení: $u=x+\ln\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}+\sin x-\sin x\cos t$?)

Domácí úkol: Najděte řešení nehomogenní hyperbolické rovnice s obecnou počáteční podmínkou

- bez okrajové podmínky
- s jednou okrajovou podmínkou
- se dvěma okrajovými podmínkami

Cvičení PDE 6.

Metoda integrálních transformací.

O všech funkcích, jejichž Fourierův obraz potřebujeme, předpokládáme, že $f \in L^1(\mathbf{R})$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty.$$

Konvoluce:

$$(f \star g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) \mathrm{d}y$$

1. Dokažte komutativitu a asociativitu konvoluce.

Fourierův obraz funkce f:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}x$$

($\hat{f}$ obecně nemusí být prvkem $L^1(\mathbf{R})$.)

Inverzní Fourierův obraz funkce g:

$$\check{g}(x) = \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi x} \mathrm{d}\xi.$$

(pro stejnoměrně spojitou funkci $f \in L^1(\mathbf{R})$ a je-li $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R})$ platí $f = \mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}(f)]$.

---

2. Dokažte některé z vlastností Fourierovy transformace:

Vlastnosti Fourierovy transformace:

a) Je-li $f \in L^1(\mathbf{R})$ omezená, pak $\hat{f}$ je spojitá

b) Linearita $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$

c) Změna měřítka pro $f_R(x) = f(Rx)$, $R > 0$: $\hat{f_R}(\xi) = \frac{1}{R} \hat{f}\left(\frac{\xi}{R}\right)$

d) Transformace derivace, je-li $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$: $\hat{f'}(\xi) = \mathrm{i}\xi \hat{f}(\xi)$

e) Derivace transformace: $\frac{\mathrm{d}\hat{f}}{\mathrm{d}\xi} = -\mathrm{i}\widehat{x f(x)}$

f) Transformace konvoluce: $\mathcal{F}(f \star g)(x) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$

g) Transformace posunutí pro $f_a(x) = f(x-a)$: $\hat{f}_a(\xi) = \hat{f}(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\xi}$

h) Posunutí transformace: $\mathcal{F}(f\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax})(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$

i) Základní identita: $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f\hat{g} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{f}g$

h) Zobrazení $f \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f}$ je L^2-izometrie na množině $L^1 \cap L^2$ (tj. zachovává normu).

Rovnice vedení tepla
3. Pomocí Fourierovy transformace převeďte rovnici

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

na tvar (jehož řešení nalezněte):

$$\hat{u}_t(\xi, t) = -\kappa\xi^2\hat{u}(\xi, t)$$

Řešení počáteční úlohy

$$u_t = \kappa u_{xx}, \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

je pak dáno konvolucí

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa t}}\,\mathrm{d}y$$

Řešení počáteční úlohy pro nehomogenní rovnici

$$u_t = \kappa u_{xx} + f(x,t), \quad u(x,0) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, t \in \mathbf{R}^+$$

je dáno vztahem

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\kappa}} \int\limits_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\sigma}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y,\sigma)\mathrm{e}^{-\frac{(x-y)^2}{4\kappa(t-\sigma)}}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}\sigma$$

4. Pomocí těchto vzorců a "errorfunkce" $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi$ vyjádřete řešení následujících úloh.

a) $u_t = u_{xx}$, $u(x,0) = 1$ pro $x \in (-1,1)$, jinak nula
(řešení: $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2\sqrt{t}}\right)\right]$)

b) příklady z textu k přednáškám, str. 34

Cvičení PDE 7.

Metoda separace proměnných (Fourierova)

Řešení rovnice hledáme ve tvaru

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

Dosadíme do rovnice a řešíme separací proměnných.

I. Pro parabolickou rovnici $u_t = ku_{xx}$ s počáteční podmínkou $u(x,0) = \varphi(x)$ dostáváme

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

a tedy

$$T = c\mathrm{e}^{-\lambda kt}, \quad X = c_1\mathrm{e}^{\mu x} + c_2\mathrm{e}^{-\mu x}, \quad \mu^2 + \lambda = 0$$

Dosadíme do okrajových podmínek

A. Dirichletovy: $u(0,t) = u(l,t) = 0 \Longrightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt},$$

kde c_n určíme z počáteční podmínky

$$c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \sin\frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

B. Neumannovy: $u_x(0,t) = u_x(l,t) = 0 \Longrightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\frac{n\pi x}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 kt},$$

kde c_n určíme z počáteční podmínky

$$c_0 = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(x)\mathrm{d}x, \quad c_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \cdot \cos\frac{n\pi x}{l} \mathrm{d}x.$$

C. Smíšené 1: $u(0,t) = u_x(l,t) = 0 \Longrightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{(n-\frac{1}{2})\pi x}{l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{l}\right)^2 kt}.$$

D. Smíšené 2: $u_t(0,t) = u(l,t) = 0 \Longrightarrow$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2l} \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2n-1)\pi}{2l}\right)^2 kt}.$$

E. Jiné (např. Newtonovy): postupujeme podobně, ale výpočty jsou složitější, koeficienty c_n jsou vždy koeficienty rozvoje funkce $\varphi(x)$ do příslušné Fourierovy řady.

II. Pro hyperbolickou rovnici $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ s počátečními podmínkami $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$, dostáváme

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

a tedy

$$T_n = a_n \cos\left(\sqrt{\lambda_n} at\right) + b_n \sin\left(\sqrt{\lambda_n} at\right),$$

u X postupujeme stejně jako v případě parabolické rovnice — čísla $\mu_n = \sqrt{\lambda_n}$ určíme dosazením do okrajových podmínek a čísla a_n a b_n jsou koeficienty rozvoje do příslušných Fourierových řad dané počátečními podmínkami.

III. Pro eliptickou rovnici $\Delta u(x,y) = 0$ dostáváme

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

a tedy

$$Y_n = A_n \mathrm{e}^{\sqrt{\lambda_n} y} + B_n \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda_n} y},$$

u X postupujeme stejně jako v případě parabolické a hyperbolické rovnice — čísla $\sqrt{\lambda_n}$, A_n a B_n určíme z dalších zadaných podmínek.

1.Pro uvedené typy okrajových podmínek (A, B, C, D — Dirichletovy, Neumannovy, smíšené) proveďte pečlivě výpočet řešení rovnice $X'' + \lambda X = 0$. Ukažte, že ve všech čtyřech případech je λ nezáporné a tedy X lze do okrajových podmínek dosazovat ve tvaru $X = C \cos \beta x + D \sin \beta x$, i$\beta = \mu = \sqrt{-\lambda}$ resp. $\beta = \sqrt{\lambda}$.

2.Řešte následující rovnice metodou separace proměnných

a) $u_t = u_{xx}$, $u(t,0) = u_x(t,a) = 0$, $u(0,x) = x(2a-x)$
Řešení:

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\left[\frac{(2n-1)}{2a}\pi\right]^2 t} \sin \frac{2n-1}{2a}\pi x, \quad c_n = \frac{2}{a}\int_0^a x(2a-x) \sin \frac{2n-1}{2a}\pi x \mathrm{d}x.$$

b) $u_{tt} = u_{xx}$, $u(t,0) = u(t,a) = 0$, $u(0,x) = x(a-x)$, $u_t(0,x) = 0$ Řešení:

$$u(t,x) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi t}{a}.$$

c) $u_{xx} + u_{yy} = 0,\ u(0,y) = u(a,y) = u(x,a) = 0,\ u(x,0) = x(a-x)$ Řešení:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{a}x\left(a_n \mathrm{e}^{\frac{n\pi}{a}y} + b_n \mathrm{e}^{-\frac{n\pi}{a}y}\right),$$

$$a_n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2n\pi}} \cdot \frac{2}{a}\int_0^a x(a-x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2n\pi}} \cdot \frac{2}{a}\int_0^a x(a-x)\sin\frac{n\pi}{a}x\,\mathrm{d}x.$$

d) $u_{xx}+u_{yy} = 0$, $(x,y) \in (0,\pi)\times(0,\pi)$, $u(0,y) = \sin y$, $u(\pi,y) = 0$, $u(x,0) = 0 = u(x,\pi)$.
Řešení:

$$u(x,y) = \sin y \cdot \left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{x} + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-x}\right).$$

e) $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $(x,y) \in (0,a) \times (0,a)$, $u(0,y) = 0$, $u(a,y) = 0$, $u(x,0) = \sin\frac{\pi}{a}x\cos\frac{\pi}{a}x$, $u(x,a) = -\sin\frac{\pi}{a}x$.
Řešení:

$$u(x,y) = \sin\frac{\pi}{a}x \cdot \left(\frac{1}{\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{a}y} + \frac{1}{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{a}y}\right) +$$

$$+\sin\frac{2\pi}{a}x \cdot \left(\frac{1}{2-2\mathrm{e}^{4\pi}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{a}y} + \frac{1}{2-2\mathrm{e}^{-4\pi}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{a}y}\right).$$

Cvičení PDE 8.

Metody řešení eliptických rovnic.

0. Jako rozcvičku bez znalostí metod řešení eliptických rovnic nalezněte nějaké řešení rovnice (kanonický tvar z příkladu 4.1.c)

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{1}{2}\left(\frac{u_x}{x} + \frac{u_y}{y}\right).$$

Využijte symetrií v rovnici a hledejte řešení ve vhodném tvaru.
Řešení: Např. $u(x, y) = \text{konst}$, $u(x, y) = C_1\sqrt{x} + C_2\sqrt{y} + C_3$ (hledáme ve tvaru $u = F(x) + G(y)$), $u(x, y) = C\sqrt{xy} + D$ (hledáme ve tvaru $u = F(xy)$), $u(x, y) = \frac{C}{\sqrt{x^2+y^2}} + D$ (hledáme ve tvaru $u = F(r) = F(\sqrt{x^2 + y^2})$).

1. Převeďte Laplaceovu rovnici $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ do polárních souřadnic.
Řešení:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r}u_r = 0.$$

2. Ověřte, že funkce

$$u(r, \varphi) = r^k \cos k\varphi, \quad v(r, \varphi) = r^k \sin k\varphi$$

jsou řešením předchozí rovnice a vyjádřete je v kartézských souřadnicích pro $k = 0, 1, 2, 3 \ldots$.
Řešení: $1, 0, x, y, x^2 - y^2, 2xy, x^3 - 3xy^2, 3x^2y - y^3, \ldots$.

2. Převeďte Laplaceovu rovnici $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ do kulových souřadnic.
Řešení:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}u_{\varphi\varphi} + \frac{2}{r}u_r + \frac{1}{r^2 \mathrm{tg}\theta}u_\theta = 0.$$

3. Uvažujme zobrazení

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x, y) \longrightarrow (\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

dané vztahy

$$\tilde{x} = \frac{xa^2}{x^2 + y^2}, \quad \tilde{y} = \frac{ya^2}{x^2 + y^2}.$$

Toto zobrazení se nazývá *Kruhová inverze*. Ukažte, že je bijekcí a zobrazuje množinu $M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | 0 < x^2 + y^2 \leq a^2\}$ na množinu $K = \{(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} | \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \geq a^2\}$ a naopak. Najděte předpis pro inverzní zobazení, určete samozružené body a vyjádřete zobrazení v polárních souřadnicích.
Řešení: $(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = (\frac{a^2}{r}, \varphi)$.

4. Pomocí předchozího zobrazením ukažte, že funkce $u(r,\varphi)$ je harmonická na množině M právě tehdy, když funkce $u(\frac{a^2}{r},\varphi)$ je harmonická na množině K. (*Harmonickou funkcí* nazýváme řešení homogenní Laplaceovy rovnice.)

5. Určete kruhové inverze harmonických funkcí z příkladu 2, pro $k = 0, 1, \dots$ je vyjádřete v kartézských souřadnicích a ověřte, že jsou harmonické (tj. řešením rovnice $\Delta u = 0$).
Řešení: 1, 0, $\frac{1}{r}\cos\varphi = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{r}\sin\varphi = \frac{y}{x^2+y^2}$, …, $\frac{1}{r^k}\cos^k\varphi$, $\frac{1}{r^k}\sin^k\varphi$.

6. Ukažte, že Laplaceova rovnice je invariatní vůči rotaci v $\mathbf{R}^2$, resp. ukažte, že Laplaceova rovnice je invariantní vůči ortogonální transformaci $\mathbf{R}^n$.
Návod: Položte $v(x,y) = u(\tilde{x},\tilde{y}) = u(x\cos\alpha + y\sin\alpha, -x\sin\alpha + y\cos\alpha)$ a ukažte, že $\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = u_{\tilde{x}\tilde{x}} + u_{\tilde{y}\tilde{y}} = \Delta u$. V n-rozměrném případě položte $v(\mathbf{x}) = u(\tilde{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}\cdot A)$, kde $\mathbf{x} = (x^1,\dots,x^n)$, $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$, $A = (a^i_j)$ a využijte vlastnosti ortogonálních matic $A^{-1} = A^T$.

7. Hledejte řešení Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ve tvaru $u = u(r) = u(\sqrt{x^2+y^2})$. Sestavte odpovídající obyčejnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení.
Řešení: $u(x,y) = C\ln\sqrt{x^2+y^2} + D$.

8. Hledejte řešení Laplaceovy rovnice $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ ve tvaru $u = u(r) = u(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$. Sestavte odpovídající obyčejnou diferenciální rovnici a nalezněte řešení.
Řešení: $u(x,y,z) = C\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + D$.

9. Nalezněte ohraničené řešení rovnice

$$\Delta u = 0, \quad \text{pro} \quad x^2+y^2 < R^2, \quad \text{a} \quad u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = \sin^4\varphi.$$

Návod: Převeďte rovnici do polárních souřadnic a hledejte řešení ve tvaru

$$u(r,\varphi) = X(r)\cdot\Phi(\varphi), \quad u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi), \quad u(R,\varphi) = \sin^4\varphi, \quad u(0,\varphi) = C.$$

Řešení:

$$u(x,y) = \frac{3}{8} - \frac{x^2-y^2}{2R^2} + \frac{x^4+y^4-6x^2y^2}{8R^4}.$$

10. Nalezněte ohraničené řešení rovnice

$$\Delta u = 0, \quad \text{pro} \quad x^2+y^2 > R^2, \quad \text{a} \quad u(R\cos\varphi, R\sin\varphi) = \cos^2\varphi.$$

Návod: Převeďte rovnici do polárních souřadnic a hledejte řešení ve tvaru

$$u(r,\varphi) = X(r)\cdot\Phi(\varphi), \quad u(r,\varphi) = u(r,\varphi+2\pi), \quad u(R,\varphi) = \cos^2\varphi.$$

Řešení:

$$u(x,y) = \frac{1}{2} + \frac{x^2-y^2}{2(x^2+y^2)}R^2.$$

11. Nalezněte řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = K, \quad \text{pro} \quad x^2 + y^2 < R^2,$$

$$u(x, y) = 0, \quad \text{pro} \quad x^2 + y^2 = R^2.$$

Řešení: $u(x, y) = \frac{K}{4}\left(x^2 + y^2 - R^2\right)$.

12. Nalezněte řešení Poissonovy rovnice

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = K, \quad \text{pro} \quad x^2 + y^2 + z^2 < R^2,$$

$$u(x, y, z) = 0, \quad \text{pro} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Řešení: $u(x, y, z) = \frac{K}{6}\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right)$.

13. Příklady v textu k přednáškám na straně 81.

Cvičení PDE 9.

Okrajová úloha pro obyčejné diferenciální rovnice. Greenovy funkce.

Cvičení PDE 10:

Příprava na zkouškovou písemku.

1. Rovnice prvního řádu (semilineární nebo lineární nehomogenní nebo quasilineární) obecně i s okrajovou podmínkou.

2. Obecná rovnice prvního řádu s okrajovou podmínkou.

3. Klasifikace rovnice druhého řádu a převod na kanonický tvar.

4. Nehomogenní hyperbolická rovnice bez okrajové, s jednou nebo se dvěma okrajovými podmínkami.

5. Rovnice řešená metodou separace proměnných (asi eliptická).

Ke zkoušce přinést samostatně vypracované řešení rovnice metodou integrální transformace, například některé úlohy ze cvičení ke kapitole 2 (na straně asi 34) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (parabolická rovnice.

Ke zkoušce přinést samostatně vypracované řešení Laplaceovy rovnice na kruhu (vnitřní nebo vnější Dirichletova úloha), například některé úlohy ze cvičení ke kapitole 4 (na straně asi 81) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (eliptická rovnice).