

Ukázková písemka M4010 s komentářem, celkem 8 + 2 body

1. Nalezněte řešení rovnice se zadanou okrajovou podmínkou, proveďte zkoušku:

$$u_x^2 + u_y^2 = 1, \quad u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o obecnou rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
 - b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
- Celkem 1,5 bodu, řešení $\sqrt{x^2 + y^2}$ a $2 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

2. Nalezněte obecné řešení rovnice i partikulární řešení splňující zadanou okrajovou podmínkou, načrtněte charakteristiky i okrajovou křivku a proveďte zkoušku:

$$u_x - y^2 u_y = u^2, \quad u(x, 1) = \frac{1}{2x}.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Jedná se o semilineární rovnici prvního řádu a budeme ji řešit metodou charakteristik nebo převodem na kanonický tvar, zvolení a zápis metody ... 0,25 bodu
 - b) Vyřešení odpovídající soustavy obyčejných rovnic nebo převod na kanonický tvar a integrace ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajové podmínky a výsledek ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky a obrázek ... 0,25 bodu
- Celkem 1,5 bodu, řešení

$$u = \frac{y}{yC\left(\frac{1}{y} - x\right) - 1}, \quad u_p = \frac{y}{2xy + 3y - 3}.$$

3. Klasifikujte rovnici druhého řádu a převedte na kanonický tvar. Lze-li převedená rovnice řešit integrací, vyřešte (proveďte zkoušku - máte-li čas):

$$(1 + x^2)u_{xx} + (1 + y^2)u_{yy} + yu_y = 0.$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Klasifikace (určení typu rovnice) ... 0,25 bodu
b) Nalezení nových proměnných ... 0,5 bodu
c) Převod na kanonický tvar ... 0,5 bodu
d) Integrace a řešení, případně provedení zkoušky ... 0,25 bodu
Celkem 1,5 bodu, řešení: Eliptická rovnice,

$$\xi = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}), \quad \eta = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}),$$

$$\Delta u = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = (\tanh\eta)u_{\eta} = \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^{\eta} + e^{-\eta}}u_{\eta}.$$

-
4. Řešte počáteční úlohu pro hyperbolickou rovnici a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= u_{xx}(t, x) + \cos x, & (t, x) &\in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(0, x) &= x^2, & x &\in (-\infty, \infty), \\ u_t(0, x) &= \operatorname{arctg}x, & x &\in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) D'Alembertův vzorec a správné dosazení ... 0,25 bodu
b) Výpočet prvního integrálu ... 0,5 bodu
c) Výpočet druhého integrálu ... 0,5 bodu
d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
Celkem 1,5 bodu, řešení

$$\begin{aligned} u(t, x) &= x^2 + t^2 + \frac{1}{2} [(x+t)\operatorname{arctg}(x+t) - (x-t)\operatorname{arctg}(x-t) + \\ &+ \ln \sqrt{\frac{1+(x-t)^2}{1+(x+t)^2}} - \cos(x+t) - \cos(x-t)] + \cos x. \end{aligned}$$

-
5. Řešte úlohu

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & (x, y) &\in (0, \pi) \times (0, \pi) \\ u(x, 0) &= 0 \\ u(x, \pi) &= 0 \\ u(\pi, y) &= 0 \\ u(0, y) &= \sin y \end{aligned}$$

Komentář a orientační bodování:

- a) Metoda separace proměnných a zápis rovnic 0,25 bodu
 - b) Řešení rovnic ... 0,5 bodu
 - c) Dosazení okrajových podmínek ... 0,5 bodu
 - e) Výpočet Fourierových koeficientů ... 0,5 bodu
 - d) Provedení zkoušky ... 0,25 bodu
- Celkem 2 body, řešení

$$u(x, y) = \sin y \cdot \left(\frac{1}{1 - e^{2\pi}} e^x + \frac{1}{1 - e^{-2\pi}} e^{-x} \right).$$

6. Řešení rovnice metodou integrální transformace. Například některé úlohy ze cvičení ke kapitole 2 (na straně asi 34) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (parabolická rovnice). (Student spočítá doma a přinese ke zkoušce, příklad je hodnocen jedním bodem.)
Celkem ...1 bod.

7. Řešení Laplaceovy rovnice na kruhu (vnitřní nebo vnější Dirichletova úloha), například některé úlohy ze cvičení ke kapitole 4 (na straně asi 81) učebního textu doc. Pospíšila k přednáškám (eliptická rovnice). (Student spočítá doma a přinese ke zkoušce, příklad je hodnocen jedním bodem.)
Celkem ...1 bod.