

Zápočtová písemka M4010, 8 + 2 body

1. Nalezněte řešení rovnice se zadanou okrajovou podmínkou, proveďte zkoušku:

$$u_x^2 + u_y^2 = u, \quad u(\cos \sigma, \sin \sigma) = 1.$$

2. Nalezněte obecné řešení rovnice i partikulární řešení splňující zadanou okrajovou podmínkou, načrtněte charakteristiky i okrajovou křivku a proveďte zkoušku:

$$xu_x + yu_y = 2(x^2 + y^2), \quad u(1, y) = 2y^2 + 1.$$

3. Klasifikujte rovnici druhého řádu a převedte na kanonický tvar. Lze-li převedená rovnice řešit integrací, vyřešte (proveďte zkoušku - máte-li čas):

$$x^2 u_{xx} - 2xu_{xy} + u_{yy} + xu_x = 0.$$

4. Řešte počáteční úlohu pro hyperbolickou rovnici a proveďte zkoušku:

$$\begin{aligned} u_{tt}(t, x) &= 4u_{xx}(t, x) + \cos^2 x, & (t, x) &\in (0, \infty) \times (-\infty, \infty), \\ u(0, x) &= x^3, & x &\in (-\infty, \infty), \\ u_t(0, x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x &\in (-\infty, \infty). \end{aligned}$$

5. Řešte úlohu

$$\begin{aligned} u_{xx} &= u_{tt}, & x &\in (0, l), \quad t \in (0, \infty) \\ u_x(t, 0) &= 0, & t &\in (0, \infty), \\ u_x(t, l) &= 0, & t &\in (0, \infty), \\ u(0, x) &= -\cos \frac{\pi}{l} x, & x &\in (0, l), \\ u_t(0, x) &= \cos^2 \frac{\pi}{l} x - \sin^2 \frac{\pi}{l} x, & x &\in (0, l). \end{aligned}$$

6. Další maximálně 2 body získává student za aktivní účast ve cvičení a plnění domácích úkolů (pokud byly zadávány).