Rovnice kmitání struny

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x)$$

$$\left.\begin{aligned} u(0,x) &= \varphi(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} \text{ počáteční podmínky}$$

$$u(t,0) = 0 = u(t,l) \qquad \text{okrajové podmínky}$$

25.2.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial a} = -\mu(a)u \\ &u(0,a) = \varphi(a) \end{aligned}\right\} \text{ metoda charakteristik}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ &u(0,x) = A\,\delta(x) \end{aligned}\right\} \text{ metoda integrálních transformací}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t>0, \quad 0<x<l \\ &u(0,x) = \varphi(x) \qquad 0<x<l \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = \psi(x) \\ &u(t,0) = 0 = u(t,l) \qquad t>0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{metoda separace proměnných} \\ &\text{(Fourierova)} \end{aligned}$$

Řešení lze očekávat ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) \sin(n\omega t - \varphi_n)$$

okrajové podmínky $u(t,0) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(0) \sin(n\omega t - \varphi_n)$, $A_n(0) = 0$

$u(t,l) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(l) \sin(n\omega t - \varphi_n)$, $A_n(l) = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n''(x) \sin(n\omega t - \varphi_n), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} (n\omega)^2 A_n(x) \sin(n\omega t - \varphi)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^2 A_n''(x) + (n\omega)^2 A_n(x)\right) \sin(n\omega t - \varphi) = 0$$

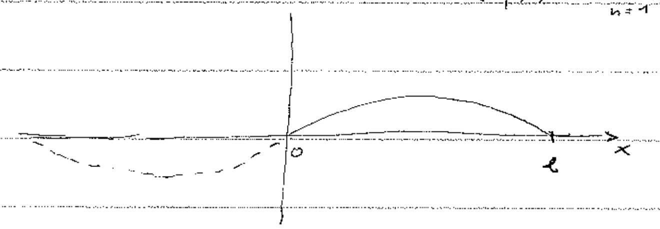
$$\boxed{A_n''(x) + \left(\frac{n\omega}{a}\right)^2 A_n(x) = 0}$$

+ podmínky
$$A_n''(x) + \left(\frac{n\omega}{a}\right)^2 A_n(x) = 0$$
$$A_n(0) = 0 = A_n(l)$$

Okrajová úloha pro ODR

Jiná možnost je očekávat řešení ve tvaru

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\frac{n\pi}{l}x$$



poč. podmínky $u(0,x) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0) \sin\frac{n\pi}{l}x \;\rightarrow\; a_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi}{l}x$

$u_t(0,x) = \psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0) \sin\frac{n\pi}{l}x \;\rightarrow\; a_n'(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x) \sin\frac{n\pi}{l}x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t) \sin\frac{n\pi}{l}x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 a_n(t)\right) \sin\frac{n\pi}{l}x = 0$$

$$a_n''(t) + \left(\frac{an\pi}{l}\right)^2 a_n(t) = 0$$

konec úvodu

Metody charakteristik

Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu ve dvou nezávisle proměnných

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$u(x, y(x)) = \text{const} \quad / \frac{d}{dx}$

$u_x + u_y \frac{dy}{dx} = 0$

$u_x\,dx + u_y\,dy = 0 \quad / \frac{1}{ds}$

s je nová neznámá

$u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds} = 0$

vrstevnice $\varphi(x,y) = \text{const}$

$\varphi(x, y(x)) = \text{const} \quad / \frac{d}{dx}$

$\varphi_x + \varphi_y \frac{dy}{dx} = 0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Charakteristický systém

$\frac{dx}{ds} = a(x,y)$

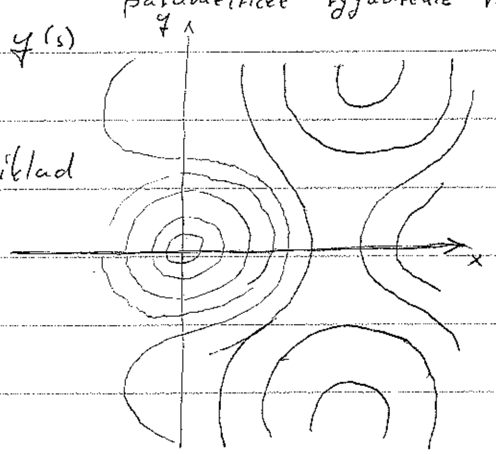
$\frac{dy}{ds} = b(x,y)$

Riešenie – charakteristika $x = x(s)$

$y = y(s)$

parametrické vyjadrenie vrstevnice riešenia

Napríklad



eliminace parametru s: $\varphi(x,y) = \text{const}$

Řešení rovnice: $u(x,y) = \Phi(\varphi(x,y))$, kde Φ je diferencovatelná jednoznačná funkce

Príklad: $(1+x^2)u_x + xy\,u_y = 0$

charakt. systém

$\frac{dx}{ds} = 1+x^2$

$\frac{dy}{ds} = xy$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int ds$

$\operatorname{arctg} x = s + C_1$

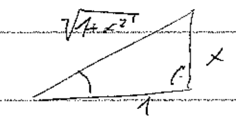
$x = \operatorname{tg}(s+C_1)$ dosadím do 2. rovnice

$\frac{dy}{ds} = y\operatorname{tg}(s+C_1)$

$\int \frac{dy}{y} = \int \operatorname{tg}(s+C_1)\,ds$

$\ln|y| = -\int \frac{-\sin(s+C_1)}{\cos(s+C_1)}\,ds = -\ln|\cos(s+C_1)| + C_2$

$y = \frac{1}{\cos(s+C_1)}C_3$



$\cos(s+C_1) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = \sqrt{1+x^2}\cdot C_3$

$\frac{y}{\sqrt{1+x^2}} = C_3 \quad \to \quad \frac{y^2}{1+x^2} = \text{const}$

$\boxed{\text{Riešenie} \quad u(x,y) = \Phi\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)}$

$u_x = \Phi'\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right) y^2 \frac{-2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2xy^2}{(1+x^2)^2}\Phi'$

$u_y = \Phi'\left(\frac{y^2}{1+x^2}\right)\frac{2y}{1+x^2} = \frac{2y}{1+x^2}\Phi'$

$(1+x^2)u_x = -\frac{2xy^2}{1+x^2}\Phi'$

$xy\,u_y = \frac{2xy^2}{1+x^2}\Phi'$

$$\frac{\frac{dy}{ds}}{\frac{dx}{ds}} = \frac{xy}{1+x^2}$$

Riešenie 2. spôsobom

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{1+x^2} \qquad \int \frac{dy}{y} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2}$$

$$\ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + const$$

$$\frac{y^2}{1+x^2} = const \qquad \frac{y^2}{1+x^2} = \alpha^2 \qquad -\alpha^2x^2 + y^2 = \alpha^2 \implies$$

$$-x^2 + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$$

Charakteristická rovnice

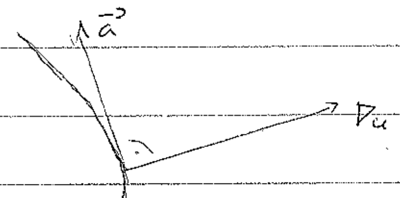
$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

řešení v implicitním tvaru $\varphi(x,y) = const.$, φ ... první integrál parc. rovnice

Iná úvaha

$$\vec{a} = (a(x,y), b(x,y))$$

$$\vec{a} \cdot \nabla u = 0$$



Keďže gradient ukazuje smer najvyššieho nárastu, kolmý vektor $\vec{a}$ bude tečný vektor k vrstevnici

vrstevnice $x = x(s)$
$y = y(s)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a \\ \frac{dy}{ds} &= b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\varphi(x,y) = const. \\ &\varphi(x(s), y(s)) = const \quad \Big/ \frac{d}{ds} \end{aligned}$$

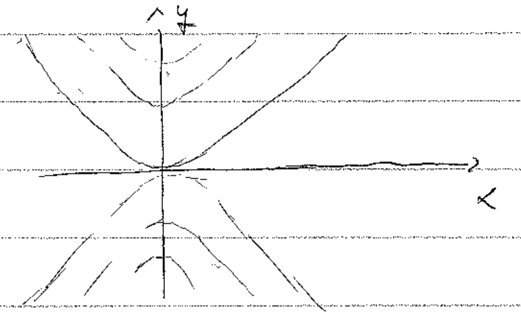
$$\varphi_x \frac{dx}{ds} + \varphi_y \frac{dy}{ds} = 0$$

$$a\varphi_x + b\varphi_y = 0$$

$$u = \Phi(\varphi(x,y))$$

$u_x = \Phi'\varphi_x \quad /a \qquad a u_x + b u_y = \Phi'(a\varphi_x + b\varphi_y) = 0$

$u_y = \Phi'\varphi_y \quad /b$



$\implies$ (Čiara, ktorá pretína všetky vrstevnice sa nazýva okraj)

okraj: $x = 0$

okrajová podmienka $u(0,y) = y^2$

Má platiť $u(0,y) = y^2 = \Phi(y^2)$

$\Phi(\eta) = \eta$ (éta) "metóda hádania"

$$u(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}$$

Okrajová úloha

Okraj ... krivka, ktorá pretína každú charakteristiku práve jeden raz.

$x = x(\sigma)$ (sigma)

$y = y(\sigma)$

Okrajová podmienka $u(x(\sigma), y(\sigma)) = f(\sigma)$

Char. systém s poč. podmienkami

$x(0) = x(\sigma)$

$y(0) = y(\sigma)$

Riešenie: $\left.\begin{aligned} x &= x(s,\sigma) \\ y &= y(s,\sigma) \end{aligned}\right\} \implies \sigma = \sigma(x,y)$

Riešenie danej úlohy: $u(x,y) = f(\sigma(x,y))$

Okraj : $x = 0$

$y = \sigma$

Okrajová podmínka $u(0, \sigma) = \sigma^2$

$x(0) = \operatorname{tg} C_1 = 0 \to C_1 = k\pi$

$y(0) = \frac{C_3}{\cos C_1} = \sigma \to C_3 = \sigma \cos k\pi = (-1)^k \sigma$

$x = \operatorname{tg}(s + k\pi) = \frac{\sin s \cos k\pi + \sin k\pi \cos s}{\cos s \cos k\pi + \sin s \sin k\pi} = \operatorname{tg} s$

$y = \frac{(-1)^k \sigma}{\cos(s + k\pi)} = \frac{\sigma}{\cos s}$

$x = \operatorname{tg} s$ | $\cos s = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$y = \frac{\sigma}{\cos s}$ | $y = \sigma \cdot \sqrt{1+x^2} \to \sigma = \frac{y}{\sqrt{1+x^2}}$

$u(x,y) = \frac{y^2}{1+x^2}$

Lineární homogenní parciální diferenciální rovnice prvního řádu

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0$$

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$

$\vec{a} \cdot \nabla u = 0$

Charakt. systém

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Řešení – charakteristika $x_i = x_i(s)$, $i = 1, 2, \dots, n$ ... křivka v n-rozměrném prostoru vyjadřuje vrstevnice $u(x_1(s), \dots, x_n(s)) = \text{const.}$

obecné vyjádření charakteristiky $\varphi_j(x_1, \dots, x_n) = \text{const}$, $j = 1, 2, \dots, n-1$

Řešení rovnice $u(x_1, \dots, x_n) = \Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$

Okrajová úloha — okraj je teraz nadplocha

$\cancel{x_i = x_i(\sigma)}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$ $\quad x_i = x_i(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1})$

Okrajová podmínka $u(x_1(\vec{\sigma}), \dots, x_n(\vec{\sigma})) = f(\vec{\sigma})$

Charakt. systém s poč. podmínkami

$x_i(0) = x_i(\vec{\sigma})$

Řešení poč. úlohy pro char. systém

$x_i = x_i(s, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1})$, $i = 1, 2, \dots, n$

Vypočítáme $\sigma_j = \sigma_j(x_1, \dots, x_n)$, $j = 1, 2, \dots, n-1$

Řešení úlohy: $u(x_1, \dots, x_n) = f(\sigma_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \sigma_{n-1}(x_1, \dots, x_n))$