F1110, 2011/2012, PÍSEMKA I. Praktická část

1a. Řešte následující soustavu rovnic o neznámých (x, y, z) a rozhodněte, pro které hodnoty parametru t má soustava

i) právě jedno řešení (toto řešení zapište)

ii) nekonečně mnoho řešení (zapište tato řešení pomocí volných neznámých)

iii) žádné řešení

$$\begin{array}{rcrcrcr} (t+1)x & + & 2y & + & (t^2+t)z & = & 3t+1 \\ tx & + & y & + & tz & = & 2t \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

1b. Uveďte příklad soustavy tří rovnic o čtyřech neznámých, jejíž řešení má

i) tři volné neznámé,

ii) dvě volné neznámé,

iii) jednu volnou neznámou,

iv) žádnou volnou neznámou.

V každém z uvedených příkladů určete hodnost matice a hodnost rozšířené matice soustavy.

---

2. Ve vektorovém prostoru V jsou dány podprostory L_1 a L_2. Určete dimenzi a nalezněte nějakou bázi L_1, L_2, $L_1 + L_2$, $L_1 \cap L_2$. Ověřte správnost pomocí věty o dimenzích. Určete tři různé doplňky k podprostoru L_2.

$$V = \mathbf{Mat}_{2x2}, \quad \text{matice řádu dva nad} \quad \mathbf{R},$$

$$L_1 = \left[\left|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right|\right],$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \,\middle|\, x + y - 2w = 0 \ \wedge \ x - y + z = 0 \right\}.$$

3. Je zadáno lineární zobrazení $f : V_1 \to V_2$. Zapište standardní báze ε ve V_1, η ve V_2. Určete matici zobrazení f ve standardních bázích ε ve V_1, η ve V_2. Určete jádro a obraz zobrazení. Určete matici zobrazení f v nových bázích ε' ve V_1, η' ve V_2, které jsou zadány. Ověřte výsledek pomocí transformačního vztahu s maticemi přechodu. Zapište předpis pro zobrazení.

$$V_1 = P_3[x], \quad V_2 = \mathbf{R}^3, \quad f(x^3+x^2) = (1,1,0), f(x^2+x) = (1,1,1),$$
$$f(x+1) = (0,2,-1), f(2) = (2,0,4),$$
$$\varepsilon' = \left\{x^3+x^2, x^2+x, x+1, 1\right\}, \quad \eta' = \{(1,1,0),(1,1,1),(0,1,0)\}.$$

---

4. Uveďte příklad:

a) Lineárního zobrazení $f : V \to V$, pro které $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. V případě, že takové zobrazení neexistuje, dokažte.

b) Dvou regulárních matic řádu 2, pro které platí $\det(A+B) = \det A + \det B$. V případě, že takové matice neexistují, dokažte.

c) Lineárního zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, pro které $f \circ f \circ f$ je nulové zobrazení, ale $f \circ f$ není nulové zobrazení.

d) Lineárního zobrazení $f : \mathrm{P}_3[x] \to \mathrm{Mat}_{2x2}$, které je izomorfismem, resp. které není izomorfismem. Zdůvodněte.

---

5. Vypočtěte determinant matice A a inverzní matici (pokud existuje) k matici B:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & c & c & c \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & 1 & c & c \\ 1 & 1 & 1 & c \end{pmatrix}$$