F1110, 2011/2012, TEST I. Teoretická část

1. Definujte *hodnost matice.* Určete hodnost následujících matic:

$$\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 1 \\ \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

---

2. Definujte *lineární závislost* souboru vektorů. Uveďte příklad souboru vektorů v prostoru polynomů stupně nejvýše 3, který je lineárně závislý a souboru, který je lineárně nezávislý. Zdůvodněte.

---

3. Definujte *determinant matice.* Formulujte tři tvrzení, týkající se determinantu (vlastnosti determinantu, např. Cauchyova věta).

---

4. Definujte *okruh.* Uveďte příklad nekomutativního okruhu a příklad okruhu bez jedničky.

---

5. Definujte *součet* a *přímý součet* podprosorů ve V. Rozhodněte a zdůvodněte, zda součet $L_2 + L_2$ v prostoru $V = \mathrm{Mat}_{2x2}$ je přímý, jestliže

$$L_1 = \{A \in V | A = A^T\}, \quad L_2 = \{A \in V | \mathrm{tr} A = 0\}.$$

---

6. Definujte *jádro lineárního zobrazení.* Určete jádro lineárního zobrazení $f : \mathrm{P}_n[x] \to \mathrm{P}_{n-2}[x]$, kde $f = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$ je zobrazení, které polynomu přiřadí jeho druhou derivaci.

---

7. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{R}^2$: vektor a má v bázi ε složky $a \sim (1,1)_\varepsilon$, v bázi $\overline{\varepsilon}$ má složky $a \sim (1,-2)_{\overline{\varepsilon}}$, vektor b má v bázi ε složky $b \sim (2,1)_\varepsilon$, v bázi $\overline{\varepsilon}$ má složky $b \sim (0,-1)_{\overline{\varepsilon}}$. Určete obě matice přechodu mezi bázemi ε, $\overline{\varepsilon}$.

---

8. Ve vektorovém prostoru $\mathbf{C}^2$ nad $\mathbf{R}$ nalezněte bázi obsahující vektor $(1+\mathrm{i}, 1+\mathrm{i})$.

9. Ve vektorovém prostoru čtvercových matic řádu 2 nad **C** určete složky vektoru A v bázi B:

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

---

10. Rozhodněte zda pro lineární zobrazení $f : V_1 \to V_2$ platí (pokud bude vaše odpověď ANO, dokažte, bude-li vaše odpověď NE, uveďte protipříklad):

a) Obrazy báze prostoru V_1 vždy tvoří bázi ve V_2.

b) $\mathrm{Im} f$ je podprostorem ve V_2.

c) Zobrazení f je izomorfismem právě tehdy, když je jeho jádro prázdná množina.