1a. Řešte následující soustavu rovnic o neznámých (x, y, z) a rozhodněte, pro které hodnoty parametru t má soustava

- právě jedno řešení (toto řešení zapište)
- nekonečně mnoho řešení (zapište tato řešení pomocí volných neznámých)
- žádné řešení

$$\begin{array}{rcrcrcr} (t+1)x & + & 2y & + & (t^2+t)z & = & 3t+1 \\ tx & + & y & + & tz & = & 2t \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 4 \end{array}$$

2. Vypočtěte determinant:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & y & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & y & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & y & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & y & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

3. Vypočtěte:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}^n, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & b & b \\ 1 & b & b & b \end{pmatrix}^{-1}.$$

4. Určete znaménko permutace

$$\sigma = (1, 2n, 2, 2n-1, 3, 2n-2, \ldots, n, 2n-n+1).$$

5. Určete příčku mimoběžek p a q (tj. přímku, která protíná obě dvě)

$$p : x = 3 + 2t, y = -1 + t, z = 1 + 4t, \qquad q : x + y = 0, z + 3y + 1 = 0$$

a) která prochází bodem $(3, -2, 13)$,
b) která je rovnoběžná s osou x.

---

6. Ve vektorovém prostoru V všech matic 2×2 s operacemi sčítání a násobení matic skalárem jsou dány podmnožiny:

$$L_1 = \left\{ A \mid A = A^T \right\},$$

$$L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a + b + c + d = 0 \wedge a - d = 0 \right\}.$$

- Dokažte, že L_1 a L_2 jsou podprostory ve V.
- Určete bázi a dimenzi L_1 i L_2.
- Určete bázi a dimenzi $L_1 + L_2$ a $L_1 \cap L_2$.

7. Uveďte příklad regulární a singulární matice A (alespoň 2 krát 2), pro kterou platí: $2 \cdot A \cdot A \cdot A = 3 \cdot A \cdot A$.

8. V oboru komplexních čísel řešte rovnici $|z| = z^3$ a rovnici $z^4 + 16 = 0$.

9. Složky vektorů (v prostoru dimenze dva) $\vec{a}$ a $\vec{b}$ jsou v bázi ε: $(\alpha)_\varepsilon = (1, 2)_\varepsilon$ a $(\beta)_\varepsilon = (1, -1)_\varepsilon$ a v bázi ε': $(\alpha')_{\varepsilon'} = (-1, -1)_{\varepsilon'}$ a $(\beta')_{\varepsilon'} = (2, 1)_{\varepsilon'}$. Určete obě matice přechodu a složky vektoru $\vec{c}$: $(\gamma')_{\varepsilon'}$ v bázi ε', jetliže $\vec{c}$ má v bázi ε složky $(\gamma)_\varepsilon = (3, -1)_\varepsilon$.

10. Ve vektorovém prostoru polynomů stupně nejvýše dva nalezněte složky vektoru $3x^2 - 2x + 6$ v bázi $\varepsilon' = (x^2 - x + 1, 2x + 1, -3)$.