**PÍSEMKA IV. — ALGEBRA**

**1.** Lineární zobrazení $f :: \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ je zadáno ve standardní bázi maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory $f$.

b) Určete Jordanův normální tvar $J_A$ matice $A$.

c) Určete podobnostní transformaci, které převede matici $A$ na $J_A$ (obecně).

d) Vypočtěte matici $A^5$.

---

**2.** Samoadjungovaný lineární operátor $\varphi$ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi $B$ reprezentován maticí $A$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ -\mathrm{i} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení $\varphi$,

b) spektrální reprezentaci zobrazení $\varphi$ v bázi $B$ (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde $P_i$ jsou matice projekce),

c) matici $\overline{A}$ reprezentující $\varphi$ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu $T$, $T^{-1}$ mezi bázemi $B$ a $\overline{B}$,

d) matici $A^{10}$.

---

**3.** Nalezněte kanonický tvar kuželosečky

$$x^2 + 2xy + y^2 - 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y - 16 = 0.$$

a rozhodněte o jakou kuželosečku se jedná.

---

**4.** Ukažte, že pro unitární operátor platí:

- jeho vlastní hodnoty jsou komplexní jednotky,
- vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou ortogonální,
- v ortonormální bázi je reprezentován unitární maticí.

---