TEST IV. — ALGEBRA

1.

- Definujte *skalární součin.*
- Zapište matici skalárního součinu v prostoru polynomů stupně nejvýše 1 nad $\mathbf{R}$, který je dán předpisem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(1)q(1) + p(-1)q(-1)$$

  v bázi $(x-3, x+1)$.

2.

- Definujte *vlastní vektor* lineárního operátoru $f : V \to V$.
- Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory operátoru $f : \mathbf{Mat}_{2x2}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Mat}_{2x2}(\mathbf{C})$ daného předpisem:

$$f\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}.$$

  Má tento operátor diagonální reprezentaci?

3.

- Matice A a B jsou *podobné*, jestliže existuje regulární matice T tak, že platí $B = TAT^{-1}$. Ukažte, že podobnost je relací ekvivalence.
- Uveďte příklad tří matic se stejným charakteristickým polynomem, z nichž žádné dvě si nejsou podobné. Zdůvodněte.

4.

- Definujte *samoadjungovaný lineární operátor* $f : U \to U$ a uveďte jeho základní vlastnosti (jaké má vlastní hodnoty, co platí pro vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám, jakou maticí je reprezentován v ortonormální bázi).
- Rozhodněte, zda operátor $\varphi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ zadaný předpisem $f(x,y) = (\mathrm{i}y, \mathrm{i}x)$ může být při vhodně zvoleném skalárním součinu v $\mathbf{C}^2$ samoadjungovaný. Zdůvodněte. Pokud ano, zadejte skalární součin maticí G tak, aby φ byl samoadjungovaný.

---

5. Lineární operátor $f : \mathbf{C}^4 \to \mathbf{C}^4$ má čtyřnásobnou vlastní hodnotu $\lambda = 5$, napište všechny možnosti Jordanova normálního tvaru matice tohoto operátoru. U každé z nich zapište příslušný kanonický tvar charakteristické matice. U všech případů uveďte dimenzi podprostoru L_λ vlastních vektorů a hodnost matice $(J - \lambda E)$.

6.

- Definujte *Ortogonální projekci* a *komponentu* vektoru $\vec{a}$ vzhledem k podprostoru $L \subset U$.

- Určete ortogonální projekci vektoru 1 do podprostoru $L = [|x^k|]$ v prostoru polynomů stupně nejvýše $n \geq k$. Skalární součin je zadán vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int\limits_0^2 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

7.

- Definujte *ortogonální* a *ortonormální* systém vektorů.
- Skalární součin $\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ je zadán předpisem $\langle (a,b),(c,d)\rangle = ac^* + \mathrm{i}bc^* - \mathrm{i}ad^* + 2bd^*$. Zapište jeho matici ve standardní bázi a ověřte, že má vlastnosti matice skalárního součinu. Nalezněte libovolnou ortonormální bázi.

8.

- Uveďte dva příklady operátoru v $\mathbf{R}^2$ (se standardně zadaným skalárním součinem $G = E$), který je ortogonální a současně symetrický.
- Uveďte příklad nediagonální matice řádu dva, která je současně ortogonální a symetrická.

9.

- Definujte ekvivalenci polynomických matic (ekvivalentní úpravy).
- Zapište elementární matici, která realizuje úpravu matice čtvrtého řádu spočívající v přičtení $(2\lambda{+}1)$-násobku čtvrtého řádku k trojnásobku prvního řádku. Zapište úpravu jako maticové násobení.

---

10. Operátor $f : V \to V$ se nazývá *nilpotentní*, jestliže existuje přirozené číslo k tak, že platí $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{k} = 0$. Ukažte, že jedinou přípustnou vlastní hodnotou pro tento operátor je číslo nula.
