1. Je dána soustava rovnic o neznámých (x, y, z):

$$\begin{aligned} -x - y + a^2 z &= a + 1 \\ x + y - az &= -1 \\ ax + 2y - 3z &= 1 - a \end{aligned}$$

Určete matici soustavy a převeďte ji na schodovitý tvar (1 bod). Určete, pro která a má soustava nekonečně mnoho řešení a řešení zapište (1 bod), určete, pro která a nemá řešení žádné a pro která a má právě jedno řešení (řešení určete) (1 bod). CELKEM 3 body.

---

2. Ve vektorovém prostoru $V = R_4[x]$ nad $\mathbf{R}$ všech polynomů stupně nejvýše čtyři (odvážnější mohou řešit pro obecný stupeň n) s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomu skalárem jsou dány podmnožiny:

$$P_1 = \{p(x) \in V \mid p(x) = p(-x)\},$$

$$P_2 = \{p(x) \in V \mid p(0) = p(1) = 0\}.$$

- Dokažte, že P_1 a P_2 jsou podprostory ve V (1 bod).
- Nalezněte nějakou bázi a určete dimenzi P_1 i P_2 (1 bod).
- Nalezněte nějakou bázi a určete dimenzi $P_1 + P_2$ a $P_1 \cap P_2$ (1 bod).

CELKEM 3 body

3.

- Napište definici *lineárního obalu systému vektorů* a uveďte příklad, kdy čtyři různé vektory generují dvourozměrný podprostor v $\mathbf{R}^3$ (1 bod).
- Napište definici *lineární závislosti systému vektorů* a uveďte příklad systému vektorů v prostoru Mat_{2x2} čtvercových matic řádu 2 nad $\mathbf{R}$, který je závislý, a systému, který je nezávislý. Zdůvodněte. (1 bod)

CELKEM 2 body

---

4. Uvažujme množinu $\mathbf{C}^2$ všech dvojic komplexních čísel s operací sčítání dvojic (po složkách) a s operací násobení dvojice komplexních čísel číslem reálným (po složkách). Dokažte, že se jedná o vektorový prostor nad $\mathbf{R}$. Určete jeho dimenzi a nalezněte dvě různé báze tohoto prostoru B a B'. Určete složky vektoru $\vec{a} = (\mathrm{i}, 1 - \mathrm{i})$ v bázi B i v bázi B'.
CELKEM 3 body

5.

- Nalezněte bázi v prostoru $\mathbf{C^2}$ nad $\mathbf{C}$ obsahující vektor $(1+\mathrm{i}, 1)$. (1 bod).
- Nalezněte bázi v prostoru $\mathbf{C^2}$ nad $\mathbf{R}$ obsahující vektor $(1+\mathrm{i}, 1)$. (1 bod).

CELKEM 2 body

---

6. Uveďte tři příklady množiny V s operacemi sčítání a násobení skalárem, které NEJSOU vektorovým prostorem. Zdůvodněte!
CELKEM 2 body

7.

- Uveďte příklad nenulové matice A (alespoň 2 krát 2), pro kterou platí: $2 \cdot A \cdot A \cdot A = 3 \cdot A \cdot A$ (1 bod).
- Uveďte příklad matice A (alespoň 2 krát 2), pro kterou předchozí rovnost neplatí (1 bod).

CELKEM 2 body

---

8. Dokažte:

- Řešení homogenní soustavy lineárních rovnic nad $\mathbf{R}$ pro n neznámých je podprostorem v $\mathbf{R}^n$ (se standardně definovanými operacemi).
- Každá báze vektorového prostoru V má stejný počet prvků.
- Průnik dvou podprostorů $P_1 \subset V$, $P_2 \subset V$ je opět podprostorem ve V.

CELKEM 3 body