Varianta I.

1. Nechť

$$\begin{aligned} U_1 &= A - B \\ U_2 &= A - (A \cap B) \end{aligned}$$

Rozhodněte, která z následujících možností platí: $U_1 \subseteq U_2$, $U_2 \subseteq U_1$, $U_1 = U_2$, $U_1 || U_2$. Odpověď zdůvodněte

[1bod]

Řešení: $(U_1 = U_2) \wedge (\mathrm{U}_1 \subseteq U_2) \wedge (\mathrm{U}_2 \subseteq U_1)$.

2. Uveďte příklad dvou relací, z nichž ani jedna není univerzální, ale jejichž složením vznikne univerzální relace.

[1bod]

Řešení: Např. $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$, $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{\alpha, \beta\}$, $\varrho = \{[a, x]\}$, $\eta = \{[x, \alpha], [x, \beta]\}$.

3. Jsou dány relace $\varrho \subset N \times N$, $\eta \subset N \times N$.

$$\begin{aligned} x \varrho y &\Leftrightarrow x^2 = y \\ x \eta y &\Leftrightarrow x \cdot y = y \end{aligned}$$

a) Rozhoděte, zda některá z nich je, či není zobrazením, injektivním zobrazením, surjektivním zobrazením.

b) Určete relaci $\varrho \circ \eta$ a $\eta \circ \varrho$.

c) Rozhodněte, zda některá ze složených relací je zobrazením.

Odpověď zdůvodněte.

[3 body]

Řešení: ϱ je zobrazením, neboť ke každému přirozenému číslu existuje jeho druhá mocnina a je určena jednoznačně, je injektivní, neboť dvě různá přirozená čísla nemohou mít stejnou druhou mocninu, není surjektivní (např. číslo dvě není mocninou žádného přirozeného čísla), η není zobrazením, neboť dom$\eta \neq \mathbf{N}$, $x(\varrho \circ \eta)y \Leftrightarrow x = 1 \wedge y \in \{1, 4, 9, \ldots\}$, $x(\eta \circ \varrho)y \Leftrightarrow x = 1 \wedge y \in \mathbf{N}$, tj. $\eta \circ \varrho = \eta$. Ani jedna ze složených relací není zobrazením.

Varianta II.

1. Nechť

$$\begin{aligned} U_1 &= A - B \\ U_2 &= (A \cup B) - B \end{aligned}$$

Rozhodněte, která z následujících možností platí: $U_1 \subset U_2$, $U_2 \subset U_1$, $U_1 = U_2$, $U_1 || U_2$. Odpověď zdůvodněte

[1bod]

Řešení: $(U_1 = U_2)$ $\wedge(\mathrm{U}_1 \subseteq U_2)$ $\wedge(\mathrm{U}_2 \subseteq U_1)$.

2. Uveďte příklad dvou neprázdných relací, jejichž složením vznikne relace prázdná. Množiny zvolte sami.

[1bod]

Řešení: Např. $\varrho \subseteq A \times B$, $\eta \subseteq B \times C$, $A = \{a\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{\alpha\}$, $\varrho = \{[a, x]\}$, $\eta = \{[y, \alpha]\}$.

3. Jsou dány relace $\varrho \subset N \times N$, $\eta \subset N \times N$.

$$\begin{aligned} x \varrho y &\Leftrightarrow x = y^2 \\ x \eta y &\Leftrightarrow x \cdot y = x \end{aligned}$$

a) Rozhoděte, zda některá z nich je, či není zobrazením, injektivním zobrazením, surjektivním zobrazením.

b) Určete relaci $\varrho \circ \eta$ a $\eta \circ \varrho$.

c) Rozhodněte, zda některá ze složených relací je zobrazením.

Odpověď zdůvodněte.

[3 body]

Řešení: ϱ není zobrazením, neboť dom$\varrho \neq \mathbf{N}$, η je konstantní zobrazení, není injektivní ani surjektivní. $\varrho \circ \eta = \eta$ je zobrazení, $x(\eta \circ \varrho)y \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 9 \ldots\} \wedge y = 1$ zobrazením není.

Varianta III.

1. Nechť

$$\begin{aligned} U_1 &= A \cap B \\ U_2 &= A - (A - B) \end{aligned}$$

Rozhodněte, která z následujících možností platí: $U_1 \subset U_2$, $U_2 \subset U_1$, $U_1 = U_2$, $U_1 || U_2$. Odpověď zdůvodněte

[1bod]

Řešení: $(U_1 = U_2)$ $\wedge(\mathrm{U}_1 \subseteq U_2)$ $\wedge(\mathrm{U}_2 \subseteq U_1)$.

2. Uveďte příklad relací, které komutují, a relací, které nekomutují. Množiny zvolte sami.

[1bod]

Řešení: Např. prázdná relace $\emptyset \subset A \times A$ nebo identické zobrazení $\mathrm{id}_A \subset A \times A$ (diagonála) komutuje s každou relací. Nasledující relace nekomutují: $\varrho \subseteq A \times A$, $\eta \subseteq A \times A$, $A = \{a, b\}$, $\varrho = \{[a, b]\}$, $\eta = \{[a, b], [b, b]\}$. Nekomutují ani relace z příkladu 3. varianty I., II., III.

3. Jsou dány relace $\varrho \subset N \times N$, $\eta \subset N \times N$.

$$\begin{aligned} x \varrho y &\Leftrightarrow x = 2y \\ x \eta y &\Leftrightarrow y = 2x \end{aligned}$$

a) Rozhoděte, zda některá z nich je, či není zobrazením, injektivním zobrazením, surjektivním zobrazením.

b) Určete relaci $\varrho \circ \eta$ a $\eta \circ \varrho$.

c) Rozhodněte, zda některá ze složených relací je zobrazením.

Odpověď zdůvodněte.

[3 body]

Řešení: ϱ není zobrazením, neboť $\mathrm{dom}\varrho \neq \mathbf{N}$, η je injektivním zobrazením, neboť ke každému přirozenému číslu existuje právě jedno dvojnásobné číslo a pro žádná dvě různá přirozená čísla se jejich dvojnásobky nerovnají, není surjektivní (lichá čísla nemají vzor), $\varrho \circ \eta$ je identické zobrazení, tedy surjektivní a injektivní, $x(\eta \circ \varrho)y \Leftrightarrow (x = y$ a x je sudé číslo). $\eta \circ \varrho$ není zobrazením.