Domácí úkol — cvičení 5

- Ukažte, že vlastní vektory příslušné různým vlastním hodnotám jsou nezávislé.
- Uveďte příklad lineární transformace, která nemá žádný vlastní vektor nad $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$.
- Uveďte příklad lineární transformace, která není diagonalizovatelná nad $\mathbf{R}$ i $\mathbf{C}$.
- Popište množinu všech lineárních transformací $\varphi \in L(V, V)$, pro něž platí, že každý vektor $\vec{a} \in V$ je jejich vlastní.
- Ukažte, že vlasní vektory příslušné téže vlastní hodnotě tvoří podprostor.
- Ukažte, že číslo $\lambda = 0$ nemůže být vlastní hodnotou regulární lineární transformace.
- Ukažte, že stopa matice, která reprezentuje lineární transformaci v různých (libovolných) bázích je vždy stejná (tj. stopa je invariantní vůči podobnostní transformaci).
- Určete jaké vlastní hodnoty může mít *idempotentní* lineární transformace, tj. taková, pro kterou $f \circ f = f$. Ukažte, že taková transformace je vždy diagonalizovatelná (návod na internetu).
- Určete jaké vlastní hodnoty může mít *involutivní* lineární transformace, tj. taková, pro kterou $f \circ f = \mathrm{id}_V$. Ukažte, že taková transformace je vždy diagonalizovatelná (návod na internetu).
- Popište množinu všech lineárních transformací, pro kterou image splývá s jádrem.